УДК 517.927.4

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

М. М. Кобилзода, А. Н. Наимов

Таджикский национальный университет;
Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 11.01.2017 г.

Аннотация. Для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости исследованы свойства положительных решений при возрастании независимой переменной t. Доказано, что любое положительное решение определено при всех $t > 0$ и при больших значениях t ограничено снизу и сверху положительными константами, зависящими лишь от коэффициентов системы уравнений. На основе полученной оценки, применяя теорию вращения векторных полей, доказано существование положительного периодического решения заданного периода ω, если коэффициенты системы уравнений ω–периодичны по переменной t.

Ключевые слова: система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, положительное решение, периодическое решение, вращение векторного поля.

ON POSITIVE AND PERIODIC SOLUTIONS OF ONE CLASS OF SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS ON A PLANE

M. M. Kobilzoda, A. N. Naimov

Abstract. For one class of systems of nonlinear ordinary differential equations on a plane, the properties of positive solutions are investigated as the independent variable t increases. It is proved that any positive solution is defined for all $t > 0$ and for large values of t is bounded below and above by positive constants that depend only on the coefficients of the system of equations. Based on the obtained estimate, applying the theory of rotation of vector fields, the existence of a positive periodic solution of a given period ω is proved if the coefficients of the system of equations ω are periodic in the variable t.

Keywords: system of nonlinear ordinary differential equations, positive solution, periodic solution, rotation of a vector field.

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию положительных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} x'(t) = c(t, x(t), y(t))(Y(t, x(t), y(t)) - y(t))x(t) - k_1(t, x(t), y(t))x(t); \\ y'(t) = a(t, x(t), y(t))(Y(t, x(t), y(t)) - y(t))x(t) - k_2(t, x(t), y(t))y(t)). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $c(t, \xi, \eta)$, $Y(t, \xi, \eta)$, $k_1(t, \xi, \eta)$, $a(t, \xi, \eta)$, $k_2(t, \xi, \eta)$ — заданные функции, которые непрерывны по совокупности переменных $(t, \xi, \eta) \in R^3$, ограниченны и положительны.

Система уравнений (1) в случае постоянных и положительных коэффициентов c, a, Y, k_1, k_2 исследована в работах [1–3]. В этих работах доказано, что если коэффициенты c, a, Y, k_1, k_2 постоянны, положительны и выполнено условие $cY > k_1$, то любое решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ и определено и положительно на правой полуоси $(0; +\infty)$ и при неограниченном возрастании t приближается к единственной стационарной точке. Данное свойство можно назвать свойством диссипативности положительных решений [4]. В работе [3] свойство диссипативности положительных решений системы уравнений (1) доказано методом направляющей функции. Метод направляющей функции при исследовании нелинейных краевых задач, в том числе периодических задач, применяется в работах [5–7].

Исследование положительных решений системы уравнений (1) в случае переменных коэффициентов c, a, Y, k_1, k_2, зависящих от t, проведено в работе [8]. В этой работе найдены условия, при выполнении которых, любое решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1) с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ определено и положительно на правой полуоси $(0; +\infty)$ и при неограниченном возрастании t приближается к определенному ограниченному множеству.

Интерес представляет исследование положительных решений системы уравнений (1) в случае, когда коэффициенты c, a, Y, k_1, k_2 зависят от t, x, y. В настоящей работе доказано, что если коэффициенты c, a, Y, k_1, k_2 зависят от t, x, y и удовлетворяют четырем условиям, то свойство диссипативности положительных решений сохраняется. Кроме того, любое положительное решение системы уравнений (1) при больших значениях t ограничено снизу и сверху положительными константами, зависящими лишь от коэффициентов системы уравнений. На основе полученной оценки, применяя теорию вращения векторных полей [5], доказано существование положительного периодического решения заданного периода ω, если коэффициенты системы уравнений ω–периодичны по переменной t.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функции $c(t,\xi,\eta)$, $a(t,\xi,\eta)$, $Y(t,\xi,\eta)$, $k_1(t,\xi,\eta)$, $k_2(t,\xi,\eta)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) непрерывны по совокупности переменных $(t,\xi,\eta) \in R^3$;

2) существуют положительные числа c_1, c_2, Y_1, Y_2, $k_{1,1}$, $k_{1,2}$, a_1, a_2, $k_{2,1}$, $k_{2,2}$ такие, что при всех $(t,\xi,\eta) \in R^3$ имеют место неравенства

$$c_1 < c(t,\xi,\eta) < c_2, a_1 < a(t,\xi,\eta) < a_2, Y_1 < Y(t,\xi,\eta) < Y_2,$$

$$k_1, 1 < k_1(t,\xi,\eta) < k_1, 2, k_2, 1 < k_2(t,\xi,\eta) < k_2, 2;$$

3) нижняя грань значений функции $Y(t,\xi,\eta) - k_1(t,\xi,\eta)/c(t,\xi,\eta)$ больше некоторого положительного числа m_0;

4) при $t_2 > t_1 > \tau$, $t_2 - t_1 < \frac{Y_2}{\nu_{M_1,\varepsilon}}$, $\xi_1 > M_1 - \varepsilon$, $\xi_2 > M_1 - \varepsilon$, $\eta_1, \eta_2 \in (0, Y_2)$ имеет место неравенство

$$Y(t_2,\xi_2,\eta_2) - Y(t_1,\xi_1,\eta_1) < \frac{1}{2c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right),$$

где положительные числа M_1, ε, τ такие, что

а) $\frac{\varepsilon}{M_1} < \min(1, k_{1,1})$;

б) $\nu_{M_1,\varepsilon} := \frac{1}{2c_2} a_1 \left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right)(M_1 - \varepsilon) - k_{2,2} Y_2 > 0$;

в) $(M_1 - \varepsilon) e^{\frac{c_2 Y_2^2}{\nu_{M_1,\varepsilon}}} < M_1$.

Выберем положительное число m_1, удовлетворяющее условиям

д) $\mu(\sqrt{m_1}) := k_{2,1} m_0 - a_2 Y_2 \sqrt{m_1} > 0$;

e) $e^{c_2 Y_2 \frac{Y_2}{\mu(\sqrt{m_1})}} < \sqrt{m_1}$.

Обозначим

$$M_2 = Y_2, m_2 = \frac{1}{2}\frac{a_1 Y_1 m_1}{a_1 m_1 + k_{2,2}}.$$

Основными результатами являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть функции $c(t,\xi,\eta)$, $Y(t,\xi,\eta)$, $k_1(t,\xi,\eta)$, $a(t,\xi,\eta)$, $k_2(t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условиям 1–4. Тогда любое решение $(x(t),y(t))$ системы уравнений (1) с положительными начальными значениями $x(0)$ и $y(0)$ определено и положительно на правой полуоси $(0;+\infty)$ и существует τ_0, зависящее от $x(0)$ и $y(0)$, такое, что при $t > \tau_0$ имеют место оценки*

$$m_1 < x(t) < M_1, m_2 < y(t) < M_2. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если функции $c(t,\xi,\eta)$, $Y(t,\xi,\eta)$, $k_1(t,\xi,\eta)$, $a(t,\xi,\eta)$, $k_2(t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условиям 1 – 4 и ω–периодичны по переменной t, то существует хотя бы одно положительное ω—периодическое решение системы уравнений (1).*

Теорема 1 в случае, когда коэффициенты c, a, Y, k_1, k_2, зависят лишь от t, доказана в работе [8]. Условие 4 используется при доказательстве оценки $x(t) < M_1$.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НА ПРАВОЙ ПОЛУОСИ

В этом параграфе приведем доказательство теоремы 1.

Согласно теореме Пеано [9], для любой пары чисел (x_0, y_0) существует решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Решение $(x(t), y(t))$ задачи (1), (3) определено на максимальном интервале (α, β), где $\alpha < 0$, $\beta > 0$ и числа α, β, в общем, зависят от пары (x_0, y_0). Исследуем поведение данного решения при $t > 0$.

1°. *Если $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$, то $x(t) > 0$ и $y(t) > 0$ при $t \in (0, \beta)$.*

Действительно из первого уравнения системы (1) имеем:

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t [c(s,x(s),y(s))(Y(s,x(s),y(s))-y(s))-k_1(s,x(s),y(s))]\, ds}.$$

Следовательно, $x(t) > 0$ для любого $t \in (0, \beta)$, так как по условию $x(0) > 0$. Проверим, что $y(t) > 0$ при $t \in (0, \beta)$. Пусть от противного, существует точка t_0 такая, что $y(t_0) = 0$ и $y(t) > 0$ при $t \in (0, t_0)$. Отсюда следует $y'(t_0) \leqslant 0$, так как t_0 — точка минимума функции $y(t)$ на отрезке $[0, t_0]$. Но, с другой стороны, согласно второму уравнению системы (1) имеем:

$$y'(t_0) = a(t_0, x(t_0), 0)Y(t_0, x(t_0), 0)x(t_0) > a_1 Y_1 > 0,$$

пришли к противоречию. Свойство 1° верно.

2°. *Если $y_0 < Y_2$, то $y(t) < Y_2$ при всех $t \in (0, \beta)$.*

Пусть $y_0 < Y_2$ и в некоторой точке $t \in (0, \beta)$ имеет место равенство $y(t_0) = Y_2$. Можно считать, что $y(t) < Y_2$ при всех $t \in [0, t_0)$. Тогда t_0 — точка максимума функции $y(t)$ на отрезке $[0, t_0]$, поэтому $y'(t_0) \geqslant 0$. С другой стороны, в силу второго уравнения системы (1) и оценки $Y(t_0, x(t_0), Y_2) - Y_2 < 0$ имеем:

$$y'(t_0) = a(t_0, x(t_0), Y_2)(Y(t_0, x(t_0), Y_2) - Y_2)x(t_0) - k_2(t_0, x(t_0), Y_2)Y_2 < 0.$$

Пришли к противоречию.

3°. *Если $y_0 > Y_2$, то существует точка $t_1 > 0$ такая, что $y(t) > Y_2$ при $t \in [0, t_1)$, $y(t_1) = Y_2$ и $y'(t_1) < 0$.*

Действительно, если $y_0 > Y_2$, то в силу второго уравнения системы (1) имеем: $y'(t) < 0$ пока $y(t) > Y_2$, т. е. функция $y(t)$ убывает, пока выполняется неравенство $y(t) > Y_2$. Покажем существование точки t_1, где имеет место равенство $y(t_1) = Y_2$. Если такая точка t_1 не существует, то функция $y(t)$ убывает и вместе с $x(t)$ определены на промежутке $[0, +\infty)$. При этом $y(t)$ при $t \to +\infty$ приближается к некоторому значению $Y_3 \geqslant Y_2$. Следовательно, $y'(t)$ вдоль некоторой последовательности $t_n \to +\infty$ стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} y'(t_n) = 0.$$

Но, с другой стороны, из второго уравнения системы (1) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} y'(t_n) < a_2(Y_2 - Y_3)x(t) - k_(2, 1)Y_3 < 0,$$

пришли к противоречию. Следовательно, существует точка t_1 такая, что $y(t_1) = Y_2$. В силу второго уравнения системы (1) имеем:

$$y'(t_1) < -k_2(t_1, x(t_1), Y_2)Y_2 < 0.$$

4°. *Любое положительное решение системы уравнений (1) определено на промежутке $[0, +\infty)$.*

Из свойств 2° и 3° следует, что $y(t)$ ограничена на интервала $(0, \beta)$. А из представления (4) следует, что $x(t)$ также ограничена:

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^\beta [c(s,x(s),y(s))(Y(s,x(s),y(s))-y(s))-k_1(s,x(s),y(s))]ds} < x(0)e^{c_2Y_2\beta}.$$

Отсюда, в силу теоремы о нелокальном продолжении решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [9], следует, что $\beta = +\infty$.

5°. *Существует $\tau_1 > \tau$ такое, что $x(t) < M_1$ при $t > \tau_1$.*

Предположим, что свойство 5° не верно. Проверим, что

$$\forall\, n > 0 \quad \exists\, t_n > n, \quad x(t_n) \geqslant M_1, x'(t_n) > -\varepsilon. \tag{4}$$

В противном случае при некотором $n_0 > 0$ и при всех $t > n_0$ либо $x(t) < M_1$, либо $x'(t) \leqslant -\varepsilon$. Если при некотором $t_* > n_0$ имеет место неравенство $x(t_*) < M_1$, то в наших условиях существует $t_{**} > t_*$ такое, что $x(t_{**}) = M_1$ и $x'(t_{**}) \geqslant 0$, так как в этой точке функция $x(t)$ достигает своего максимума на отрезке $[t_*; t_{**}]$; тем самым приходим к противоречию. А если $x(t) \geqslant M_1$ и $x'(t) \leqslant -\varepsilon$ при всех $t > n_0$, то

$$x(t) \leqslant x(n_0) - \varepsilon(t - n_0) < M_1 \quad \text{при} \quad t > n_0 + \frac{x(n_0) - M_1}{\varepsilon},$$

снова приходим к противоречию. Таким образом, если свойство 5° не верно, то имеет место утверждение (5).

Выберем натуральное число n, удовлетворяющее следующим условиям:

$$n - \frac{Y_2}{\nu_{M_1,\varepsilon}} > \tau, y(t) < Y_2 \quad \text{при} \quad t > n - \frac{Y_2}{\nu_{M_1,\varepsilon}}.$$

Для выбранного n, согласно (5), существует $t_n > n$ такое, что

$$x(t_n) \geqslant M_1, x'(t_n) > -\varepsilon.$$

В силу первого уравнения системы (1) имеем:

$$x'(t_n) = c(t_n, x(t_n), y(t_n))(Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - y(t_n))x(t_n) - k_1(t_n, x(t_n), y(t_n))x(t_n) > -\varepsilon,$$

$$c(t_n, x(t_n), y(t_n))(Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - y(t_n)) >$$
$$> k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}, Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - y(t_n) > \frac{1}{c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right).$$

Пусть (τ_n, t_n) — наибольший интервал, где выполняются неравенства

$$x(t) > M_1 - \varepsilon, Y(t, x(t), y(t)) - y(t) > \frac{1}{2c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right).$$

На этом интервале оценим снизу $y'(t)$, воспользуясь вторым уравнением системы (1):

$$y'(t) > \frac{1}{2c_2}a_1\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right)(M_1 - \varepsilon) - k_{2,2}Y_2 = \nu_(M_1, \varepsilon) > 0.$$

Интегрируя от τ_n до t_n, имеем: $t_n < \tau_n < \frac{Y_2}{\nu_{M_1,\varepsilon}}$ и

$$\text{либо } x(\tau_n) = M_1 - \varepsilon, \text{ либо } Y(\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)) - y(\tau_n) = \frac{1}{2c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right).$$

Так как $\tau_n > t_n - \frac{Y_2}{\nu_{M_1,\varepsilon}} > n - \frac{Y_2}{\nu_{M_1,\varepsilon}} > \tau$, поэтому $y(t) < Y_2$ при $t \in (\tau_n, t_n)$.

Если имеет место равенство $x(\tau_n) = M_1 - \varepsilon$, то в силу представления (4) оценим сверху $x(t_n)$:

$$M_1 \leqslant x(t_n) = x(\tau_n)e^{\int_{\tau_n}^{t_n}[c(s,x(s),y(s))(Y(s,x(s),y(s))-y(s))-k_1(s,x(s),y(s))]ds} <$$
$$< (M_1 - \varepsilon)e^{c_2Y_2(t_n - \tau_n)} < (M_1 - \varepsilon)e^{c_2Y_2\frac{Y_2}{\nu_{M_1,\varepsilon}}} < M_1 \text{ (согласно условию в)},$$

пришли к противоречию. В случае, когда имеет место равенство

$$Y(\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)) - y(\tau_n) = \frac{1}{2c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right),$$

оценим сверху $Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - y(t_n)$:

$$\frac{1}{c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right) < Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - y(t_n) =$$
$$= Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - Y(\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)) + Y(\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)) - y(t_n) <$$
$$< Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - Y(\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)) + Y(\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)) - y(\tau_n) <$$
$$< \frac{1}{2c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right) + \frac{1}{2c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right) = \frac{1}{c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right),$$

так как в силу условия 4

$$Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - Y(\tau_n, x(\tau_n), y(\tau_n)) < \frac{1}{2c_2}\left(k_{1,1} - \frac{\varepsilon}{M_1}\right).$$

Пришли к противоречию. Свойство 5° доказано.

6°. *Существует $\tau_2 > 0$ такое, что $x(t) > m_1$ при $t > \tau_2$.*

Предположим, что свойство 6° не верно. Проверим, что

$$\forall\, n > 0 \quad \exists\, t_n > n,\ x(t_n) \leqslant m_1, x'(t_n) \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

В противном случае при некотором $n_0 > 0$ и при всех $t > n_0$ либо $x(t) > m_1$, либо $x'(t) > \varepsilon$. Если при некотором $t_* > n_0$ имеет место неравенство $x(t_*) > m_1$, то либо существует $t_{**} > t_*$ такое, что $x(t_{**}) = m$ и $x'(t_{**}) \leqslant 0$, так как в этой точке функция $x(t)$ достигает своего минимума на отрезке $[t_*, t_{**}]$ и приходим к противоречию, либо $x(t) > m_1$ при всех $t > t_*$ и свойство 6° верно. Следовательно, $x(t) \leqslant m_1$ и $x'(t) > \varepsilon$ при всех $t > n_0$. Отсюда выводим:

$$x(t) \geqslant x(n_0) + \varepsilon(t - n_0) > m_1 \quad \text{при} \quad t > n_0 + \frac{m_1 - x(n_0)}{\varepsilon}.$$

Пришли к противоречию. Таким образом, если свойство 6° не верно, то имеет место утверждение (6).

Выберем n, удовлетворяющее следующим условиям:

$$n - \frac{Y_2}{\mu(\sqrt{m_1})} > 0, y(t) < Y_2 \quad \text{при} \quad t > n - \frac{Y_2}{\mu(\sqrt{m_1})}.$$

Для выбранного n, согласно (6), существует $t_n > n$ такое, что

$$x(t_n) \leqslant m_1,\ x'(t_n) \leqslant \varepsilon.$$

Положительное число ε по выбору удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < m_1(c_1(Y_2 - m_0) - k_{1,2}).$$

В силу первого уравнения системы (1) имеем:

$$x'(t_n) = c(t_n, x(t_n), y(t_n))(Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - y(t_n))x(t_n) - k_1(t_n, x(t_n), y(t_n))x(t_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{x(t_n)},$$

$$c(t_n, x(t_n), y(t_n))(Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - y(t_n)) < k_{1,2} + \frac{\varepsilon}{x(t_n)},$$

$$y(t_n) > Y(t_n, x(t_n), y(t_n)) - \frac{1}{c_1}\left(k_{1,2} + \frac{\varepsilon}{x(t_n)}\right) > m_0 \text{ (в силу выбора } \varepsilon).$$

Пусть $(\tau_n.t_n)$ — наибольший интервал, где выполняются неравенства $x(t_n) < \sqrt{m_1}$ и $y(t) > m_0$. На этом интервале оценим сверху $y'(t)$, воспользуясь вторым уравнением системы (1):

$$y'(t) < a_2 Y_2 \sqrt{m_1} - k_{2,1} m_0 = -\mu(\sqrt{m_1}) < 0.$$

Интегрируя от τ_n до t_n, имеем:

$$t_n - \tau_n \leqslant \frac{Y_2}{\mu(\sqrt{m_1})} \text{ и } x(\tau_n) = \sqrt{m_1}.$$

Оценим сверху $x(t_n)$ в силу первого уравнения системы (1):

$$m_1 \leqslant x(t_n) = x(\tau_n) e^{\int_{\tau_n}^{t_n} [c(s,x(s),y(s))(Y(s,x(s),y(s)) - y(s)) - k_1(s,x(s),y(s))]ds} <$$

$$< \sqrt{m_1} e^{c_2 Y_2 (t_n - \tau_n)} < \sqrt{m_1} e^{c_2 Y_2 \frac{Y_2}{\mu(\sqrt{m_1})}} < m_1.$$

Пришли к противоречию. Свойство 6° доказано.

7°. *Существует* $\tau_3 \geqslant \tau_2$ *такое, что* $y(t) > m_2$ *при* $t > \tau_3$.

Если при $t > \tau_2$ имеет место неравенство $y(t) \leqslant m_2$, то, оценив снизу $y'(t)$ в силу второго уравнения системы (1), имеем:

$$y'(t) > a_1(Y_1 - m_2)m_1 - k_{2,2}m_2 > 0 \text{ (в силу выбора } m_2).$$

Следовательно, существует точка τ_3 такая, что $y(\tau_3) > m_2$. Проверим, что $y(t) > m_2$ при $t > \tau_3$. Действительно, если существует точка t_3, где $y(t_3) = m_2$ и $y(t) > m_2$ при $t \in (\tau_3, t_3)$, то $y'(t_3) \leqslant 0$. Но, с другой стороны, в силу второго уравнения системы (1) имеем: $y'(t_3) > a_1(Y_1 - m_2)m_1 - k_{2,2}m_2 > 0$, приходим к противоречию. Следовательно, свойство 7° верно.

Из доказанных свойств 1°–7° вытекает теорема 1.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Прежде, чем доказать теорему 2, введем некоторые обозначение. Фиксируя $(t_0, \xi_0, \eta_0) \in R^3$, где $t_0 > \tau_0$, обозначим:

$$Y^0 = Y(t_0, \xi_0, \eta_0), a^0 = a(t_0, \xi_0, \eta_0), c^0 = c(t_0, \xi_0, \eta_0), k_1^0 = k_1(t_0, \xi_0, \eta_0), k_2^0 = k_2(t_0, \xi_0, \eta_0).$$

Далее, введем семейства функций, зависящих от параметра $\lambda \in [0, 1]$:

$$c_\lambda(t, \xi, \eta) = (1 - \lambda)c(t, \xi, \eta) + \lambda c^0, a_\lambda(t, \xi, \eta) = (1 - \lambda)a(t, \xi, \eta) + ac^0,$$

$$Y_\lambda(t, \xi, \eta) = (1 - \lambda)Y(t, \xi, \eta) + \lambda Y^0, k_{2\lambda}(t, \xi, \eta) = (1 - \lambda)k_2(t, \xi, \eta) + \lambda k_2^0,$$

$$\frac{k_{1\lambda}(t, \xi, \eta)}{c_\lambda(t, \xi, \eta)} = (1 - \lambda)\frac{k_1(t, \xi, \eta)}{c(t, \xi, \eta)} + \lambda \frac{k_1^0}{c^0}.$$

Проверим, что эти функции при каждом значении $\lambda \in [0, 1]$ удовлетворяют условиям 1–4. Очевидно, условие 1 выполняется и условие 2 для функций $c_\lambda(t, \xi, \eta)$, $a_\lambda(t, \xi, \eta)$, $Y_\lambda(t, \xi, \eta)$, $k_2\lambda(t, \xi, \eta)$ выполнено. А для функции $k_{1\lambda}(t, \xi, \eta)$ имеем:

$$\begin{aligned} k_{1\lambda}(t, \xi, \eta) &= c_\lambda(t, \xi, \eta)(1 - \lambda)\frac{k_1(t, \xi, \eta)}{c(t, \xi, \eta)} + c_\lambda(t, \xi, \eta)\lambda \frac{k_1^0}{c^0} = \\ &= (1 - \lambda)^2 k_1(t, \xi, \eta) + \lambda c^0(1 - \lambda)\frac{k_1(t, \xi, \eta)}{c(t, \xi, \eta)} + (1 - \lambda)\lambda c(t, \xi, \eta)\frac{k_1^0}{c^0} + \lambda^2 k_1^0 > \\ &> k_{1,1}\left[(1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)\lambda\left(\frac{c(t, \xi, \eta)}{c^0} + \frac{c^0}{c(t, \xi, \eta)}\right) + \lambda^2\right] k_{1,1}, \end{aligned}$$

$$k_{1\lambda}(t, \xi, \eta) < k_{1,2}\left[(1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)\lambda\left(\frac{c(t, \xi, \eta)}{c^0} + \frac{c^0}{c(t, \xi, \eta)}\right) + \lambda^2\right] < 2k_{1,2}\left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right).$$

Условие 3 также выполняется:

$$\begin{aligned} Y_\lambda(t, \xi, \eta) - \frac{k_1\lambda(t, \xi, \eta)}{c_\lambda(t, \xi, \eta)} &= (1 - \lambda)Y(t, \xi, \eta) + \lambda Y^0 - (1 - \lambda)\frac{k_1(t, \xi, \eta)}{c(t, \xi, \eta)} - \lambda \frac{k_1^0}{c^0} = \\ &= (1 - \lambda)\left(Y(t, \xi, \eta) - \frac{k_1(t, \xi, \eta)}{c(t, \xi, \eta)}\right) + \lambda\left(Y^0 - \frac{k_1^0}{c^0}\right) > (1 - \lambda)m_0 + m_0\lambda = m_0. \end{aligned}$$

Выполнимость условия 4 проверяется непосредственно.

Доказательство теоремы 2. Сперва предположим, что функции $c(t, \xi, \eta), Y(t, \xi, \eta)$, $k_1(t, \xi, \eta)$, $a(t, \xi, \eta)$, $k_2(t, \xi, \eta)$ удовлетворяют условию Липшица по $(\xi, \eta) \in \Pi = (m_1, M_1) \times (m_2, M_2)$. Тогда для любой пары $(x_0, y_0) \in \overline{\Pi}$ существует единственное решение

$(\varphi(t,x_0,y_0),\psi(t,x_0,y_0))$ системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x_0$ и $y(0)=y_0$. Вектор-функция $(\varphi(t,x_0,y_0),\psi(t,x_0,y_0))$ непрерывна на множестве $[0,\omega]\times\overline{\Pi}$.

Заметим, что система уравнений (1) имеет положительное ω–периодическое решение тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений

$$\varphi(\omega,x_0,y_0)-x_0=0,\psi(\omega,x_0,y_0)-y_0=0,(x_0,y_0)\in\Pi. \tag{6}$$

Докажем разрешимость системы уравнений (7), применяя теорию вращения конечномерных векторных полей [5].

Рассмотрим семейство двумерных векторных полей

$$F_\lambda(x_0,y_0)\equiv(\varphi_\lambda(\omega,x_0,y_0),\psi_\lambda(\omega,x_0,y_0))-(x_0,y_0),\lambda\in[0,1],$$

где $(x_0,y_0)\in\overline{\Pi}$ и $(\varphi_\lambda(t,x_0,y_0),\psi_\lambda(t,x_0,y_0))$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x'(t)=c_\lambda(t,x(t),y(t))(Y_\lambda(t,x(t),y(t))-y(t))x(t)-k_{1,\lambda}(t,x(t),y(t))x(t),\\ y'(t)=a_\lambda(t,x(t),y(t))(Y_\lambda(t,x(t),y(t))-y(t))x(t)-k_{2,\lambda}(t,x(t),y(t))y(t).\end{cases} \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x_0$ и $y(0)=y_0$. Так как при каждом $\lambda\in[0,1]$ коэффициенты системы уравнений (8) удовлетворяют условиям 1–4, поэтому в силу теоремы 1 имеем:

$$F_\lambda(x_0,y_0)\neq0 \text{ при любых } (x_0,y_0)\in\partial\Pi,\lambda\in[0,1].$$

Отсюда следует, что, во-первых, при каждом $\lambda\in[0,1]$ определено вращение $\gamma(F_\lambda,\partial\Pi)$ векторного поля F_λ на границе $\partial\Pi$ прямоугольника Π, во-вторых, векторные поля F_0 и F_1 гомотопны на $\partial\Pi$, в третьих, их вращения на $\partial\Pi$ равны — $\gamma(F_0,\partial\Pi)=\gamma(F_1,\partial\Pi)$. Докажем, что

$$\gamma(F_1,\partial\Pi)=1. \tag{8}$$

Тогда отсюда, в силу принципа ненулевого вращения [5], следует, что система уравнений (7) имеет хотя бы одно решение. Этим самым теорема 2 будет доказана.

Перед доказательством равенства (9) рассмотрим общую автономную систему

$$x'=f(z),\ \ z\in R^n, \tag{9}$$

где вектор-функция $f(z)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в ограниченной области Ω. Предположим, что при любом $z_0\in\overline{\Omega}$ решение $p(t,z_0)$ автономной системы (10), удовлетворяющее начальному условию $z(0)=z_0$, определено на отрезке $[0,\omega]$. На замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω рассмотрим векторное поля $\Phi(z_0)=p(\omega,z_0)-z_0$. Справедлива следующая лемма [5].

Лемма 1. *Если $p(t,z_0)\neq z_0$ при любых $z_0\in\partial\Omega$ и $t\in(0,\omega]$, то имеет место равенство*

$$\gamma(\Phi,\partial\Omega)=\gamma(f,\partial\Omega) \tag{10}$$

Доказательство. Для $p(t,z_0)$ имеем:

$$p'(t,z_0)=f(p(t,z_0)) \text{ и } p(0,z_0)=z_0.$$

Отсюда, интегрируя от 0 до ω, получим:

$$p(\omega,z_0)-z_0=\int\limits_0^\omega f(p(s,z_0))\,ds,$$

$$\Phi(z_0) = \int\limits_0^\omega f(p(s, z_0))\,ds.$$

Рассмотрим семейство векторных полей

$$\Phi_\lambda(z_0) = \int\limits_0^\omega f(p(\lambda s, z_0))\,ds, \lambda \in [0,1].$$

Покажем, что

$$\Phi_\lambda(z_0) \neq 0 \text{ при любых } z_0 \in \partial\Omega, \lambda \in [0,1]. \tag{11}$$

Действительно, предположим, что $\Phi_\lambda(z_0) = 0$ при некоторых $z_0 \in \partial\Omega$ и $\lambda \in [0,1]$. Если $\lambda \in [0,1]$, то $\Phi_0(z_0) = f(z_0)\omega = 0$. Следовательно, $f(z_0) = 0$, а это противоречит условию лемму. Если $\lambda \neq 0$, то

$$\int\limits_0^\omega f(p(\lambda s, z_0))\,ds = 0,$$

отсюда,

$$\int\limits_0^{\lambda\omega} f(p(\tau, z_0))\,d\tau = 0,\ p(\lambda\omega, z_0) - z_0 = 0.$$

Последнее равенство противоречит условию лемму. Следовательно, наше предположение неверно и имеет место (12). Из (12), согласно свойству вращения векторных полей [5], вытекает равенство $\gamma(\Phi_0, \partial\Omega) = \gamma(\Phi_1, \partial\Omega)$. Отсюда выводим:

$$\gamma(\Phi, \partial\Omega) = \gamma(\omega f, \partial\Omega) = \gamma(f, \partial\Omega).$$

Лемма 1 доказана.

Лемму 1 применим к векторному полю

$$F_1(x_0, y_0) = (\varphi_1(\omega, x_0, y_0), \psi_1(\omega(x_0, y_0)) - (x_0, y_0),\ (x_0, y_0) \in \overline{\Pi},$$

порожденному автономной системой

$$\begin{cases} x'(t) = c^0(Y^0 - y(t))x(t) - k_1^0 x(t), \\ y'(t) = a^0(Y^0 - y(t))x(t) - k_2^0 y(t). \end{cases} \tag{12}$$

Из теоремы 1 вытекает, что для автономной системы (13) условие леммы 1 выполняется. Следовательно, в силу лемма 1 имеет место равенство

$$\gamma(F_1, \partial\Pi) = \gamma(f, \partial\Pi),$$

где

$$f(x, y) = (c^0(Y^0 - y)x - k_1^0 x, a^0(Y^0 - y)x - k_2^0 y).$$

Векторное поля $f(x, y)$ в области Π имеет только одну особую точку $O^*(x^*, y^*)$, где

$$x^* = \frac{k_2^0}{k_1^0 a^0}(c^0 Y^0 - k_1^0),\ y^* = Y^0 - \frac{k_1^0}{c^0}.$$

Поэтому вращение $\gamma(f, \partial\Pi)$ равно вращению векторного поля $f(x, y)$ в окрестности точка $O^*(x^*, y^*)$ [5]. В окрестности точки $O^*(x^*, y^*)$ векторное поле $f(x, y)$ представимо в следующем виде

$$f(x, y) = B \cdot \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} + o(|x - x^*| + |y - y^*|),$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_2^0 c^0}{k_1^0 a^0}(c^0 Y^0 - k_1^0) \\ a^0 \frac{k_1^0}{c^0} & -\frac{k_2^0}{k_1^0} c^0 Y^0 \end{pmatrix}, \quad \det B = k_2^0 (c^0 Y^0 - k_1^0) > 0.$$

Отсюда следует, что $\gamma(f, \partial\Pi) = \operatorname{sign}(\det B) = 1$ [5]. Следовательно $\gamma(F_1, \partial\Pi) = \gamma(f, \partial\Pi) = 1$, т. е. (9) верно.

Таким образом, теорема 2 доказана в предположении, что коэффициенты $c(t, \xi, \eta)$, $Y(t, \xi, \eta)$, $k_1(t, \xi, \eta) a(t, \xi, \eta)$, $k_2(t, \xi, \eta)$ системы уравнений (1) удовлетворяют условию Липшица по переменным ξ и η в прямоугольнике Π. В общем случае коэффициенты системы уравнений (1) в прямоугольнике Π можно равномерно приблизить последовательностью функции, гладких по ξ, η и ω–периодических по t (например, с помощью регуляризации Соболева [10]). Соответствующие регуляризованные системы уравнений, в силу выше доказанного, имеют положительные ω–периодические решения. Последовательность ω–периодических решений регуляризованных систем уравнений, в силу теореме 1, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Любая предельная точка данной последовательности будет положительным ω–периодическим решением системы уравнений (1).

Теорема 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горский, А. А. Математическая модель производства и продажи для управления и планирования производства / А. А. Горский, Б. Я. Локшин // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т. 8, № 2. — С. 39–45.

2. Горский, А. А. Режим обострения в одной системе нелинейных уравнений / А. А. Горский, Б. Я. Локшин, Х. Н. Розов // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 11. — С. 1571.

3. Мухамадиев, Э. Исследование положительных решений динамической модели производства и продажи товара / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, М. К. Собиров // Сб. тр. X междунар. конф. “ПМТУКТ-2017”. — Воронеж, 2017. — С. 268–271.

4. Плисс, В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний / В. А. Плисс. — М. : Наука, 1964.

5. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / А. М. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975.

6. Мухамадиев, Э. О построении правильной направляющей функции для системы дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев // Доклады АН СССР. — 1970. — Т. 190, № 4. — С. 777–779.

7. Звягин, В. Г. Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений / В. Г. Звягин, С. В. Корнев // Труды Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Часть 1. — 2015. — СМФН. — Т. 58. — С. 59–81.

8. Мухамадиев, Э. О положительных периодических решениях одной модельной системы нелинейных дифференциальных уравнений / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, М. К. Собиров // Материалы международной конференции “ВЗМШ-2018”. — Воронеж, 2018. — С. 282–285.

9. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. - М.: Мир, 1970.

10. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М. : Наука, 1984.

REFERENCES

1. Gorsky A.A., Lokshin B.Ya. A mathematical model of goods production and sale for production supervision and planning. [Gorskiyj A.A., Lokshin B.Ya. Matematicheskaya model’

proizvodstva i prodazhi dlya upravleniya i planirovaniya proizvodstva]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika — Journal of Mathematical Sciences*, 2002, vol. 8, no. 2, pp. 39–45.

2. Gorsky A.A., Lokshin B.J., Rozov H.N. The regime intensified in the same system of nonlinear equations. [Gorskiyj A.A., Lokshin B.Ya., Rozov X.N. Rezhim obostreniya v odnoyj sisteme nelineyjnyx uravneniyj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 11, pp. 1571.

3. Mukhamadiev E., Naimov A.N., Sobirov M.K. Research of positive decisions of dynamic model of production and sale of goods. [Muxamadiev E., Naimov A.N., Sobirov M.K. Issledovanie polozhitel'nyx resheniyj dinamicheskoyj modeli proizvodstva i prodazhi tovara]. Proceedings of the X international conference «PMTCT–2017», Voronezh, 2017, pp. 268–271.

4. Pliss V. A. Nonlocal problems of oscillation theory. [Pliss V.A. Nelokal'nye problemy teorii kolebaniyj]. Moscow, 1964.

5. Krasnoselsky M. A., , Zabreiko P. P. Geometric methods of nonlinear analysis. [Krasnosel'skiyj M.A., , Zabreyjko P.P. Geometricheskie metody nelineyjnogo analiza]. /.

6. Mukhamadiev E. On the construction of the correct guide function for a system of differential equations. [Muxamadiev E. O postroenii pravil'noyj napravlyayushheyj funkcii dlya sistemy differencial'nyx uravneniyj]. *Doklady akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1970, vol. 190, no. 4, pp. 777–779.

7. Zvyagin V. G., Kornev S. V. The method of guiding functions in the problem of existence of periodic solutions of differential equations. [Zvyagin V.G., Kornev S.V. Metod napravlyayushhix funkciyj v zadache o sushhestvovanii periodicheskix resheniyj differencial'nyx uravneniyj]. Proceedings of the Seventh international conference on differential and functional differential equations. Part 1, SMPN, 2015, vol. 58, pp. 59–81.

8. Mukhamadiev E., Naimov A. N., Sobirov M. K. On positive periodic solutions of a model system of nonlinear differential equations. [Muxamadiev E., Naimov A.N., Sobirov M.K. O polozhitel'nyx periodicheskix resheniyax odnoyj model'noyj sistemy nelineyjnyx differencial'nyx uravneniyj]. Proceedings of the international conference «VZMSH-2018», 2018, pp. 282–285.

9. Hartman F. Ordinary differential equations. [Xartman F. Obyknovennye differencial'nye uravneniya]. Moscow, 1970.

10. Mikhailov V. P. Partial differential equations. [Mixayjlov V.P. Differencial'nye uravneniya v chastnyx proizvodnyx]. Moscow, 1984.

Кобилзода Мирзоодили Мирзомалик, аспирант отдела математики научно-исследовательского института Таджикского национального университета, Душанбе, Таджикистан
E-mail: kobilzoda94@mail.ru

Kobilzoda Mirzoodili Mirzomalik, Postgraduate Student, Department of Mathematics, Research Institute, Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan
E-mail: kobilzoda94@mail.ru

Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий Вологодского государственного университета, Вологда, Россия
E-mail: nan67@rambler.ru

Naimov Alijon Nabidzhanovich, doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, Professor of Department of Information Systems and Technologies, Vologda State University, Vologda
E-mail: nan67@rambler.ru