УДК 517.927.2

О ФУНКЦИИ ГРИНА МНОГООПОРНОЙ БАЛКИ

М. Г. Завгородний[1], С. П. Майорова[2], Ю. А. Анучина[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 10.07.2017 г.

Аннотация. В работе изучается функция Грина краевой задачи для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка, заданного на объединении интервалов, полученных исключением из интервала $(0,l)$, $l>0$, вещественной оси конечного числа точек. В концевых точках $x=0$ и $x=l$ заданы краевые условия, а в исключенных точках заданы условия согласования решения. Получены рекуррентные формулы, выражающие функцию Грина рассматриваемой краевой задачи через функцию Грина краевой задачи в случае, когда из интервала $(0,l)$ исключено меньшее число точек.

Ключевые слова: краевая задача, функция Грина, рекуррентные соотношения.

ABOUT GREEN FUNCTION MULTISUPPORTING BEAMS

M. G. Zavgorodnij, S. P. Majorova, Y. A. Anuchina

Abstract. In this paper we study the Green function of the boundary value problem for linear differential equation of the fourth order defined on the union of intervals obtained by excluding from the interval $(0,l)$, $l>0$, of the real axis of a finite number of points. At the end points $x=0$ and $x=l$ are specified boundary conditions, and at the excluded points are specified conditions coordination of the solution. Received recurrent formulas expressing the Green function of the considered boundary value problem using the Green function of boundary value problem in the case where from the interval $(0,l)$ are excluded a smaller number of points.

Keywords: boundary value problem, Green function, recurrence relations.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на отрезке $[0,l]$, $l>0$, вещественной оси заданы два набора A_n и B_m, состоящие соответственно из n различных точек a_k, $k=\overline{1,n}$, и из m различных точек b_k, $k=\overline{1,m}$. Полагаем, что множества A_n и B_m не пересекаются и $0<a_1<a_2<\ldots<a_n<l$, $0<b_1<b_2<\ldots<b_m<l$. Исключим из интервала $(0,l)$ точки множеств A_n и B_m. Полученное объединение интервалов обозначим через $\Im$. Для неотрицательных на отрезке $[0,l]$ функций $p_j\in C^{2-j}[0,l]$, $j=\overline{0,2}$; $\inf\limits_{x\in[0,l]} p_0(x)>0$ и произвольной функции $f\in C[0,l]$ рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\big(p_0(x)u''(x)\big)''-\big(p_1(x)u'(x)\big)'+p_2(x)u(x)=f(x)(x\in\Im) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0)=u'(0)=u(l)=u'(l)=0 \tag{2}$$

и условиях согласования двух видов: в каждой точке a_k заданы условия

$$\begin{cases} u^{(j)}(a_k+0)=u^{(j)}(a_k-0), & j=\overline{0,2},\\ u'''(a_k+0)-u'''(a_k-0)=-\gamma_k u(a_k), & \end{cases} \tag{3}$$

где γ_k — неотрицательная константа, а в каждой точке b_k заданы условия

$$\begin{cases} u(b_k+0) = u(b_k-0) = 0, \\ u^{(j)}(b_k+0) = u^{(j)}(b_k-0), \quad j=1,2. \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что условия согласования обеспечивают непрерывность решения $u(x)$ на всем отрезке $[0,l]$, а так же непрерывность его первой и второй производных.

Краевая задача (1)–(4) моделирует малые упругие поперечные деформации балки с жестко закрепленными концами, соединенной в точках a_k, $k=\overline{1,n}$, с пружинами, закрепленными на неподвижной опоре, и имеющей шарнирные закрепления в точках b_k, $k=\overline{1,m}$. При этом жесткость k-ой пружины равна $p_0(a_k)\gamma_k$.

В силу результатов работы [1, с. 455–456] верно следующее утверждение.

Лемма 1. *При любых $n \geqslant 0$ и $m \geqslant 0$ краевая задача (1)–(4) является невырожденной и самосопряженной.*

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

При определении функции Грина краевой задачи (1)–(4) будем следовать подходу, предложенному Ю. В. Покорным (см. [2, глава 6]).

Функцию $G(x,s)$ двух переменных x и s, заданную и непрерывную на прямом произведении $\Im \times \Im$, будем называть ***функцией Грина*** краевой задачи (1)–(4), если функция $u(x) = \int\limits_0^l G(x,s)f(s)ds$ является решением этой краевой задачи при любой правой части $f \in C[0,l]$ дифференциального уравнения (1).

Так как краевая задача (1)–(4) невырождена, то в силу теоремы 12.3 учебника [3, с. 139] для нее существует единственная функция Грина. Она представима в виде

$$G(x,s) = H(x,s) - \sum_{i=1}^{r} \ell_i H(\cdot,s) v_i(x), \tag{5}$$

где $r = 4(n+m+1)$; $H(x,s)$ — фундаментальное решение дифференциального уравнения (1); ℓ_i, $i=\overline{1,r}$ – функционалы, порождающие условия (2)–(4); и $v_i(x)$, $i=\overline{1,r}$ — специальная фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения

$$\big(p_0(x)u''(x)\big)'' - \big(p_1(x)u'(x)\big)' + p_2(x)u(x) = 0 (x \in \Im), \tag{6}$$

согласованная с условиями (2)–(4). Функция Грина в силу постановки краевой задачи (1)–(4) зависит от наборов точек A_n и B_m. Поэтому в дальнейшем ее будем обозначать через $G(x,s,A_n,B_m)$.

В силу представления (5) функции Грина $G(x,s,A_n,B_m)$ верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Срезка функции Грина $g_s(x) = G(x,s,A_n,B_m)$ при фиксированном s обладает следующими свойствами:*

1) $g_s(x)$ принадлежит пересечению пространств $C^2[0,l]$ и $C^4(\Im_s)$, где $\Im_s$ — множество $\Im$ без точки s;

2) $g_s(x)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (6) на множестве $\Im_s$;

3) в точке $x=s$ третья производная срезки $g_s(x)$ имеет скачок, равный $\frac{1}{p_0(s)}$;

4) $g_s(x)$ удовлетворяет граничным условиям (2) и условиям согласования (3), (4).

Отметим, что так как краевая задача (1)–(4) является самосопряженной, то ее функция Грина $G(x,s,A_n,B_m)$ симметрична относительно переменных x и s: $G(x,s,A_n,B_m) =$

$G(s, x, A_n, B_m)$. Следовательно, срезка функции Грина $g_x(s) = G(x, s, A_n, B_m)$ при фиксированном x также обладает свойствами 1–4 теоремы 1.

В силу теоремы 3 работы [4, с. 63] верно следующее утверждение.

Лемма 2. *Функция Грина $G(x, s, A_n, B_m)$ при $x = s$ строго положительна: $G(s, s, A_n, B_m) > 0, s \in \Im$.*

Для произвольной точки $a \in \Im$ при некоторой константе γ зададим два функционала: $\varphi_1 u = u'''(a + 0) - u'''(a - 0) + \gamma u(a)$ и $\varphi_2 u = u(a)$.

Лемма 3. *Для функции Грина $G(x, s, A_n, B_m)$ при $s \neq a$ верны равенства $\varphi_1 G(\cdot, s, A_n, B_m) = \gamma G(a, s, A_n, B_m)$ и $\varphi_2 G(\cdot, s, A_n, B_m) = G(a, s, A_n, B_m)$.*

Доказательство. При $a \in \Im$ и $s \neq a$ в силу теоремы 1 функция Грина $G(x, s, A_n, B_m)$ по переменной x непрерывна в точке a вместе со своими производными до третьего порядка включительно. Отсюда в силу определения функционалов φ_k, $k = 1, 2$, верно утверждение леммы. **Лемма доказана.**

3. СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ

Обозначим через ℓ_i^a, $i = \overline{1, n}$, функционалы, имеющие следующий вид: $\ell_i^a u = u'''(a_i + 0) - u'''(a_i - 0) + \gamma_i u(a_i)$, $a_i \in A_n$. Эти функционалы соответствуют условиям согласования (3), задающим скачок третьей производной решения, пропорциональный значению решения в точке $a_i \in A_n$.

Выделим из специальной фундаментальной системы n решений $v_k^a(x)$, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условиям $\ell_i^a v_k^a = \delta_{ik}$, $i = \overline{1, r}$, где δ_{ik} — символ Кронекера.

Обозначим через $A_{n-1,k}$ множество A_n без точки a_k: $A_{n-1,k} = A_n \backslash \{a_k\}$.

Теорема 2. *Решение $v_k^a(x) (1 \leqslant k \leqslant n)$ специальной фундаментальной системы представимо в виде*

$$v_k^a(x) = \frac{G(x, a_k, A_{n-1,k}, B_m)}{p_0^{-1}(a_k) + \gamma_k G(a_k, a_k, A_{n-1,k}, B_m)}.$$

Доказательство. При любом фиксированном k: $1 \leqslant k \leqslant n$, точка a_k не принадлежит множествам $A_{n-1,k}$ и B_m. Поэтому в силу теоремы 1 функция $g(x) = G(x, a_k, A_{n-1,k}, B_m)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и условиям (2)–(4), кроме, быть может, условий согласования в исключённой точке a_k. В силу свойств функции Грина функция $g(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно в точке $x = a_k$ и удовлетворяет условию $p_0(a_k)\,(g'''(a_k + 0) - g'''(a_k - 0)) = 1$.

Решение $v_k^a(x)$ специальной фундаментальной системы в силу определения также удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и условиям (2)–(4), кроме, быть может, условий согласования в точке a_k. В точке $x = a_k$ оно непрерывно вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет условию $v_k^{a'''}(a_k + 0) - v_k^{a'''}(a_k - 0) = 1 - \gamma_k v_k(a_k)$. Следовательно, в силу (см. лемму 1) однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(4) решение $v_k^a(x)$ на множестве $\Im \cup \{a_k\}$ совпадает с функцией $p_0(a_k)\,(1 - \gamma_k v_k^a(a_k))\, g(x)$:

$$v_k^a(x) = p_0(a_k)\,(1 - \gamma_k v_k^a(a_k))\, g(x).$$

Положим в последнем равенстве $x = a_k$, и выразим из него $v_k^a(a_k)$:

$$v_k^a(a_k) = \frac{g(a_k)}{p_0^{-1}(a_k) + \gamma_k g(a_k)},$$

а затем подставим найденное выражение для $v_k^a(a_k)$ в это же равенство. Получим искомое представление решения $v_k^a(x)$ специальной фундаментальной системы. Остается заметить, что в силу леммы 2 знаменатель $p_0^{-1}(a_k)+\gamma_k g(a_k)$ полученного представления отличен нуля. **Теорема доказана.**

Обозначим через ℓ_i^b, $i=\overline{1,n}$, функционалы, имеющие следующий вид: $\ell_i^b u=u(b_i)$, $b_i\in B_m$. Эти функционалы соответствуют условиям согласования (4), гарантирующим обращение в нуль решения в точках $b_i\in B_m$.

Выделим из специальной фундаментальной системы еще один набор из m решений $v_k^b(x)$, $k=\overline{1,m}$, удовлетворяющих условиям $\ell_i^b v_k^b=\delta_{ik}$, $i=\overline{1,r}$, где δ_{ik} – символ Кронекера.

Обозначим через $B_{m-1,k}$ множество B_m без точки a_k: $B_{m-1,k}=B_m\backslash\{b_k\}$.

Теорема 3. *Решение* $v_k^b(x)(1\leqslant k\leqslant m)$ *специальной фундаментальной системы представимо в виде*

$$v_k^b(x)=\frac{G(x,b_k,A_n,B_{m-1,k})}{G(b_k,b_k,A_n,B_{m-1,k})}.$$

Доказательство. При любом фиксированном k: $1\leqslant k\leqslant m$, точка b_k не принадлежит ни множеству A_n, ни множеству $B_{m-1,k}$. Поэтому в силу теоремы 1 функция $h(x)=G(x,b_k,A_n,B_{m-1,k})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и условиям (2)–(4), кроме, быть может, условий согласования (4) в исключённой точке b_k. В силу свойств функции Грина функция $h(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно в точке $x=b_k$ и удовлетворяет условию $\ell_k^b h=G(b_k,b_k,A_n,B_{m-1,k})$, где $G(b_k,b_k,A_n,B_{m-1,k})>0$.

Решение $v_k^b(x)$ специальной фундаментальной системы в силу определения также удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и условиям (2)–(4), кроме, быть может, условий согласования в точке b_k. В точке $x=b_k$ оно непрерывно вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет условию $\ell_k^b v_k^b=1$. Следовательно, в силу однозначной разрешимости краевой задачи (1)-(4) решение $v_k^b(x)$ на множестве $\Im\cup\{b_k\}$ представимо в виде $v_k^b(x)=\frac{G(x,b_k,A_n,B_{m-1,k})}{G(b_k,b_k,A_n,B_{m-1,k})}$, что и требовалось доказать. **Теорема доказана.**

4. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Выразим функцию Грина $G(x,s,A_n,B_m)$ краевой задачи (1)–(4) через функцию Грина краевой задачи вида (1)–(4) с условиями согласования в $n+m-1$ точке.

Теорема 4. *При* $n\geqslant 1$ *и* $m\geqslant 0$ *функция Грина* $G(x,s,A_n,B_m)$ *краевой задачи (1)–(4) представима в виде*

$$G(x,s,A_n,B_m)=G(x,s,A_{n-1,k},B_m)-\gamma_k\frac{G(x,a_k,A_{n-1,k},B_m)G(a_k,s,A_{n-1,k},B_m)}{p_0^{-1}(a_k)+\gamma_k G(a_k,a_k,A_{n-1,k},B_m)},\qquad(7)$$

верном при любом фиксированном k $(1\leqslant k\leqslant n)$.

Доказательство. При любом фиксированном k $(1\leqslant k\leqslant n)$ функция Грина $G(x,s,A_{n-1,k},B_m)$ является фундаментальным решением дифференциального уравнения (1). И по переменной x она удовлетворяет всем условиям (2)–(4), кроме единственного условия $\ell_k^a u=0$. Поэтому в силу (5) верно представление

$$G(x,s,A_n,B_m)=G(x,s,A_{n-1,k},B_m)-\ell_k^a G(\cdot,s,A_{n-1,k},B_m)v_k^a(x).$$

Отсюда в силу леммы 3 и теоремы 2 приходим к искомому выражению функции Грина $G(x,s,A_n,B_m)$. **Теорема доказана.**

Отметим, что формула (7) при $n=1$ и $m=0$ была анонсирована в заметке [5].

Теорема 5. *При* $n\geqslant 0$ *и* $m\geqslant 1$ *функция Грина* $G(x,s,A_n,B_m)$ *краевой задачи (1)–(4) представима в виде*

$$G(x,s,A_n,B_m)=G(x,s,A_n,B_{m-1,k})-\frac{G(x,b_k,A_n,B_{m-1,k})G(b_k,s,A_n,B_{m-1,k})}{G(b_k,b_k,A_n,B_{m-1,k})},$$

верном при любом фиксированном k $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 с той лишь разницей, что вместо теоремы 2 применяется теорема 3.

Теорема 6. *При* $n \geqslant 1, m \geqslant 0$ *и любом фиксированном* k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *функция Грина* $G(x, s, A_n, B_m)$ *краевой задачи (1)–(4) представима в виде*

$$G(x, s, A_n, B_m) = \frac{G(x, s, A_{n-1,k}, B_m) + \gamma_k q_k G(x, s, A_{n-1,k}, B_{m+1})}{1 + \gamma_k q_k},$$

где $q_k = p_0(a_k)G(a_k, a_k, A_{n-1,k}, B_m)$ *и* $B_{m+1} = B_m \cup \{a_k\}$.

Доказательство. Приведем правую часть равенства (7) к общему знаменателю и запишем равенство в виде

$$G(x, s, A_n, B_m) = \frac{G(x, s, A_{n-1,k}, B_m)}{1 + \gamma_k q_k} +$$

$$+\gamma_k \frac{q_k G(x, s, A_{n-1,k}, B_m) - p_0(a_k)G(x, a_k, A_{n-1,k}, B_m)G(a_k, s, A_{n-1,k}, B_m)}{1 + \gamma_k q_k},$$

где $q_k = p_0(a_k)G(a_k, a_k, A_{n-1,k}, B_m)$. Числитель второй дроби правой части полученного равенства в силу теоремы 5 представим в виде $q_k G(x, s, A_{n-1,k}, B_m \cup \{a_k\})$. И мы получили искомый вид функции Грина $G(x, s, A_n, B_m)$. **Теорема доказана.**

Обозначим через $G(x, s)$ и $G(x, s, \{a\})$ функции Грина краевой задачи (1)–(4) соответственно при $n = m = 0$ и $n = 1$, $m = 0$. Первую краевую задачу мы получим, если множества A_n и B_m будут пустыми, что соответствует балке с жестко закрепленными концами без промежуточных шарнирных закреплений и соединений с пружинами. Вторую краевую задачу мы получим, если множество узлов соединений с пружинами содержит лишь одну точку, а множество шарнирных закреплений пусто.

Следствие. *Функция Грина* $G(x, s, \{a\})$ *представима в виде*

$$G(x, s, \{a\}) = \frac{G(x, s) + \gamma p_0(a)G(a, a)G(x, s, \varnothing, \{a\})}{1 + \gamma p_0(a)G(a, a)},$$

где $\gamma \geqslant 0$ *— константа из условий согласования (3) в точке* a, *и* $G(x, s, \varnothing, \{a\})$ *— функция Грина краевой задачи (1)-(4) при* $n = 0$ *и* $m = 1$.

Приведем еще одно представление функции Грина $G(x, s, A_n, B_m)$ краевой задачи (1)–(4) при любых $n \geqslant 0$ и $m \geqslant 0$ через функцию Грина $G(x, s)$.

Теорема 7. *Функция Грина* $G(x, s, A_n, B_m)$ *краевой задачи (1)-(4) представима в виде*

$$G(x, s, A_n, B_m) = G(x, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k p_0(a_k)G(x, a_k, A_{n-1,k}, B_m)G(a_k, s)}{1 + \gamma_k q_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{G(x, b_k, A_n, B_{m-1,k})G(b_k, s)}{G(b_k, b_k, A_n, B_{m-1,k})}.$$

Доказательство. В силу свойств функции Грина $G(x, s)$ и соотношения (5) имеем $G(x, s, A_n, B_m) = G(x, s) - \sum\limits_{k=1}^{n} \ell_k^a G(\cdot, s)v_k^a(x) - \sum\limits_{k=1}^{m} \ell_k^b G(\cdot, s)v_k^b(x)$. Отсюда в силу леммы 3 и теорем 2, 3 верно искомое представление функции Грина $G(x, s, A_n, B_m)$. **Теорема доказана.**

5. ОБЛАСТИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ ГРИНА В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Проиллюстрируем на частном примере одно из возможных применений полученных рекуррентных соотношений для функций Грина краевой задачи (1)-(4). Для этого опишем области знакопостоянства функции Грина $G(x, s, \{a\})$ краевой задачи (1)-(4) при $n = 1$ и $m = 0$.

Теорема 8. *При любом* $\gamma \geqslant 0$ *функция Грина* $G(x, s, \{a\})$ *краевой задачи (1)-(4) положительна на квадратах* $K_1 = (0, a] \times (0, a]$ *и* $K_2 = [a, l) \times [a, l)$. *При* $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0$, *где* $\gamma_0 = \inf\limits_{(x,s)\in\Pi_1} \frac{-G(x,s)}{p_0(a)G(a,a)G(x,s,\varnothing,\{a\})}$, *функция Грина* $G(x, s, \{a\})$ *положительна также внутри прямоугольников* $\Pi_1 = [0, a] \times [a, l]$ *и* $\Pi_2 = [a, l] \times [0, a]$, *а при* $\gamma > \gamma_0$ *каждый из указанных прямоугольников содержит открытую область, на которой функция Грина* $G(x, s, \{a\})$ *отрицательна.*

Доказательство. Так как функция $G(x, s)$ положительна внутри квадрата $[0, l] \times [0, l]$, а функция $G(x, s, \varnothing, \{a\})$ неотрицательна на квадратах K_1 и K_2, то в силу следствия теоремы 6 функция Грина $G(x, s, \{a\})$ краевой задачи (1)-(4) положительна на K_1 и K_2 при любом $\gamma \geqslant 0$.

Пусть существует точка (x_0, s_0) такая, что $G(x_0, s_0, \{a\}) < 0$. В силу симметричности функции Грина $G(x, s, \{a\})$ для точки (s_0, x_0) также выполняется неравенство $G(s_0, x_0, \{a\}) < 0$. При этом одна из этих точек лежит внутри прямоугольника Π_1, а вторая – внутри прямоугольника Π_2.

Пусть для определенности $(x_0, s_0) \in \Pi_1$. Так как $1 + \gamma p_0(a)G(a, a) > 0$, то в силу следствия теоремы 6 имеем $G(x_0, s_0) < -\gamma p_0(a)G(a, a)G(x_0, s_0, \varnothing, \{a\})$. Известно, что функция Грина $G(x, s, \varnothing, \{a\})$ отрицательна внутри прямоугольника Π_1. Следовательно, $\gamma > \frac{-G(x_0,s_0)}{p_0(a)G(a,a)G(x_0,s_0,\varnothing,\{a\})}$. Отсюда и следует второе утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

В заключение работы отметим, что используя известные результаты о распределении знаков функции Грина $G(x, s)$ и функций Грина $G(x, s, \varnothing, B_k)$, $k = \overline{1, m}$, можно аналогично выше доказанной теореме описать области знакопостоянства функций Грина $G(x, s, A_n, B_m)$ при любых n и m.

Кроме того, полученные в данной работе рекуррентные формулы позволяют по известной функции Грина, например, по функции Грина $G(x, s)$ - функции влияния балки лишь с жестко закрепленными концами, последовательно построить функцию Грина краевой задачи для балки, соединенной с любым конечным числом пружин и имеющей любое конечное число шарнирных закреплений; а также написать программу для численного расчета прогиба таких балок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завгородний, М. Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе / М. Г. Завгородний // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 446–456.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Завгородний, М. Г. Краевые задачи для дифференциальных уравнений на графе / М. Г. Завгородний, С. П. Майорова. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. — 147 с.

4. Завгородний, М. Г. Краевые задачи, описывающие процессы сетевых технических систем / М. Г. Завгородний, С. П. Майорова // Исследования по мат. анализу, дифференц. уравнениям и их приложениям. — 2010. — Т. 4. — С. 48–64.

5. Покорный, Ю. В. О дифференциальном неравенстве для консоли с промежуточной опорой / Ю. В. Покорный, М. Г. Завгородний, Ф. В. Голованева // Тез. докл. научн. школы-семинара «Разрывные динамические системы». — Киев, 1991. — С. 22–23.

REFERENCES

1. Zavgorodnij M.G. Adjoint and Self-Adjoint Boundary Value Problems on a Geometric Graph. [Zavgorodnij M.G. Sopryazhennye i samosopryazhennye kraevye zadachi na geometricheskom grafe]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 446–456.

2. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

3. Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Boundary Value Problems for Differential Equations on the Graph. [Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Kraevye zadachi dlya differencial'nyx uravnenij na grafe]. Voronezh: Publishing house of VSU, 2015, 147 p.

4. Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Boundary Value Problems Governing Processes in Network Technical Systems. [Zavgorodnij M.G., Majorova S.P. Kraevye zadachi opisyvaushie processy setevyx texnicheskix sistem]. *Issledovaniya po mat. analizu, differents. uravneniyam i ikh prilozheniyam — Investigations on Math. Analysis, Diff. Eqs., and Their Applications*, 2010, vol. 4, pp. 48–64.

5. Pokornyi Yu.V., Zavgorodnij M.G., Golovaneva F.V. On a differential inequality for the console with intermediate support. [Pokornyi Yu.V., Zavgorodnij M.G., Golovaneva F.V. O diffrencial'nom neravenstve dlya konsoli s promezhytochnoj oporoj]. Abstracts of scientific school-seminar «Discontinuous dynamical systems», Kiev, 1991, pp. 22–23.

Завгородний Михаил Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: zavgorodnijm@yandex.ru
Тел.: +7(473)247–57–65

Zavgorodnij Mikhail Grigorievich, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Functional Analysis and Operational Equations of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zavgorodnijm@yandex.ru
Tel.: +7(473)247–57–65

Майорова Светлана Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Россия
E-mail: spmajorova@yandex.ru

Majorova Svetlana Pavlovna, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Physical and Mathematical Modeling of Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: spmajorova@yandex.ru

Анучина Юлия Алексеевна, магистрант кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: anuchina95@mail.ru

Anuchina Yulia Alekseevna, undergraduate of the Department of Functional Analysis and Operational Equations of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: anuchina95@mail.ru