УДК 517.98

О ВОЗМУЩЕНИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Ю. Глазкова[1], А. И. Барсуков[1], И. В. Гриднева[2], Л. В. Акчурина[1], Е. Л. Ульянова[1]

[1] — *Воронежский государственный технический университет;*
[2] — *Воронежский государственный аграрный университет*

Поступила в редакцию 14.01.2017 г.

Аннотация. Статья посвящена возмущению самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H. Сформулировано условие существования сепарабельного подпространства $L \subset H$ такого, что $L \cap dom\, A = \{0\}$, являющееся важным вспомогательным фактом для доказательства ряда утверждений. Получены критерии существования самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ неограниченного самосопряженного оператора A в случаях: если оператор $A^{-1}B$ компактный, где $B:\ L \to L$ — ограниченный симметрический оператор и $\widetilde{A}|_L = B$, удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям; если оператор A — положительный, а B — неположительный, $\widetilde{A}|_L = B$. Сформулирован критерий существования самосопряженного расширения оператора A в случае, если H — сепарабельное гильбертово пространство, M — подпространство H и $A : H \to H$ — неограниченный самосопряженный оператор, $B : M \to M$ — самосопряженный оператор, $\sigma(B) \cap \sigma(A)$ есть пустое множество и оператор $\widetilde{A}|_{\widetilde{E}(\sigma B)H}$ изоморфически подобен оператору B, где $\widetilde{E}$ — спектральная функция оператора $\widetilde{A}$.

Ключевые слова: замкнутый оператор, самосопряженный оператор, расширение оператора, компактный оператор.

UNLIMITED ON THE PERTURBATION OF SELF-ADJOINT OPERATORS IN HILBERT SPACE

M. Yu. Glazkova, A. I. Barsoukov, I. V. Gridneva, L. V. Akchurina, E. L. Ulyanova

Abstract. The article is devoted to the perturbation of the self-adjoint operator A in Hilbert space$H$. A condition for the existence of a separable subspace $L \subset H$ such that, which $L \cap dom\, A = \{0\}$ is an important auxiliary fact for proving a number of statements, is formulated. The criteria for the existence of a self-adjoint expansion$\widetilde{A}$ are obtained unlimited self-adjoint operator A in cases: if the operator $A^{-1}B$ is compact, where $B\ :\ L\ \to\ L$ limited symmetric operator and $\widetilde{A}|_L = B$, satisfying some additional conditions; if the operator A is positive, and B — non − positive, $\widetilde{A}|_L = B$. A criterion for the existence of a self − adjoint operator A extension in the case H of a separable Hilbert space, Ma subspace H, and $A : H \to H$ an unbounded self − adjoint operator, a $B : M \to M$ self — adjoint operator, $\sigma(B) \cap \sigma(A)$ is formulated, the operator $\widetilde{A}|_{\widetilde{E}(\sigma B)H}$ is an empty set and the operator is is isomorphic to the operator B, where the $\widetilde{E}$ spectral function of the operator $\widetilde{A}$.

Keywords: closed-loop operator, self-adjoint operator, operator extension, compact operator.

ВВЕДЕНИЕ

Теория возмущений операторов занимает важное место в прикладных задачах. Большой вклад в развитие этого направления внес Т. Като [1]. Впервые вопрос о возмущении операторов возник при решении задачи о малых движениях вязкоупругой жидкости в полностью заполненном контейнере (например, модель Олдройта) [2]. Решению этой задачи посвящены работы Т. Я. Азизова, Н. Д. Копачевского, Л. Д. Орловой [3], а также [4], [5]. Другой подход к решению этой задачи предложен в [6]. В данной работе получены критерии существования самосопряженного расширения неограниченного самосопряженного оператора.

Теорема 1. Предположим H — гильбертово пространство, A — неограниченный, ограниченно обратимый оператор в H; L — подпространство в H и $B\ :\ L\ \to\ L$ — ограниченный симметрический оператор такой, что область значений $ran\,(I - PA^{-1}B)$ замкнута, где P — ортопроектор на L. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Найдется самосопряженный оператор $\widetilde{A}$, такой, что $L \subset dom\,\widetilde{A}$, $\widetilde{A}|_L = B$ и область определения оператора $A' := A \cap \widetilde{A}$ плотна в H;
2. Множество $D := \{f \in dom\,A\ :\ (Bx\,,f) = (x\,,Af)\,,\,x \in L\}$ плотно в H;
3. $\overline{ran\,(\,I - A^{-1}B\,)} \cap dom\,A\ \subset\ ran\,(\,I - A^{-1}B\,)$ и $Bx = Ax$ для $x \in L \cap dom\,A$.

Если выполнено (1)–(2), то каждое самосопряженное расширение оператора $\widetilde{A}$ *оператора* $\widetilde{A}_1$ с областью определения $dom\ \widetilde{A}_1 = L + D$, заданный равенством

$$\widetilde{A}_1(x+f) = Bx + Af,\, x \in L,\, f \in D$$

является искомым.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как $\widetilde{A}$ — самосопряженный оператор, то

$$\left(\widetilde{A}x,f\right) = \left(x,\widetilde{A}f\right) \quad \text{для } x, f \in dom\ \widetilde{A}.$$

В частности, это верно, если $x \in L$ и $f \in A'$. Так как

$$\widetilde{A}x = Bx, x \in L \quad \text{и} \quad \widetilde{A}f = A'f = Af, f \in dom\ A',$$

то

$$(Bx\,,f) = (x\,,Af).$$

Следовательно, *dom* A' $\subset$ D и из плотности *dom* A' следует плотность множества D.

(2) $\Rightarrow$(3). Если существует вектор $x \in L \cap dom$ A такой, что $Bx \neq Ax$, то

$$(Bx - Ax,f) = (Bx,f) - (Ax,f) = (Bx,f) - (x,Af) = (x,Af) - (x,Af) = 0.$$

То есть ненулевой вектор $Bx - Ax$ ортогонален множеству D. Это противоречит (2). Предположим, что существует вектор

$$g \in \overline{ran\,(\,I - A^{-1}B\,)} \cap dom\,A \backslash ran\,(\,I - A^{-1}B\,).$$

Тогда

$$(Ag,f) = (g,Af) = \lim_{n\to\infty}\left(\,(\,I - A^{-1}B\,)x_n,Af\right) = \lim_{n\to\infty}((x_n,Af) - (Bx_n,Af)) = 0.$$

Что противоречит плотности множества D.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть вектор x ортогонален множеству D. Тогда для всех $f \in D$

$$0 = (x,f) = \left(x,A^{-1}Af\right) = \left(A^{-1}x,Af\right).$$

По определению множества D ортогональное дополнение множества AD совпадает с замыканием $ran\,(\,I - A^{-1}B\,)$.

Возьмем

$$y \in ran\,(\,I - A^{-1}B\,) \quad \text{и} \quad g \in AD.$$

Тогда

$$(y,g) = \left(\,(\,I - A^{-1}B\,)y_1,Af\right) = (y_1,Af) - \left(A^{-1}By_1,Af\right) = 0.$$

Таким образом,

$$ran\,(\,I - A^{-1}B\,) \subset (AD)^{\perp}.$$

Обратив эти неравенства, получим обратное утверждение, то есть множество D плотно.

(3) $\Rightarrow$(1). Рассмотрим оператор $\widetilde{A}_1$ с областью определения $dom\ \widetilde{A}_1 = L + D$, заданный равенством

$$\widetilde{A}_1(x+f) = Bx + Af,\, x \in L,\, f \in D.$$

Имеем

$$\left(\widetilde{A}_1(x+f),x+f\right) = (Bx + Af,x+f) = (Bx,x) + 2Re\,(x,Af) + (Af,f) \in R,$$

то есть $\widetilde{A}_1$ — симметрический оператор. Покажем, что он допускает самосопряженное расширение. Подпространство L является $\widetilde{A}_1$ — инвариантным, а потому и $\widetilde{A}$ — инвариантным. Тогда относительно разложения

$$H = L \oplus L^{\perp}$$

допускает диагональное представление:

$$\widetilde{A}_1 = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

Достаточно лишь показать, что $ran\ A_1$ замкнута. Имеем

$$ran\,(\,I - A^{-1}B\,) = \left\{ \begin{array}{c} \left(I - PA^{-1}B\right)x \\ -QA^{-1}Bx \end{array} \right\},$$

$x \in L$ и $Q = I - P$ — ортопроектор на $L^{\perp}$. Тогда

$$(ran\,(\,I - A^{-1}B\,))^{\perp} = \left\{ \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) : u \in L,\, (\,I - PA^{-1}B\,)^{*}u = (\,QA^{-1}B\,)^{*}v \right\}.$$

Так как

$$AD = (ran\,(\,I - A^{-1}B\,))^{\perp},$$

то остается лишь показать, что в последнем выражении множество векторов v замкнуто. Пусть вектор $v_n \in L^{\perp}$ такой, что существует вектор

$$u_n \in L : (u_n,u_n)^t \in \left(ran\left(I - A^{-1}B\right)\right)^{\perp}.$$

Без ограничения общности предположим, что

$$u_n \in ran\left(I - PA^{-1}B\right).$$

Пусть $v_n \to v_0$. Тогда имеем

$$(I - PA^{-1}B)^* u_n = (QA^{-1}B)^* v_n \to (QA^{-1}B)^* v_0.$$

Из замкнутости $ran\left(I - PA^{-1}B\right)$ и специального выбора

$$u_n \in ran\left(I - PA^{-1}B\right)$$

следует, что

$$u_n \to u_0 \in ran\left(I - PA^{-1}B\right).$$

Тогда справедливо следующее равенство

$$(I - PA^{-1}B)^* u_0 = (QA^{-1}B)^* v_0,$$

то есть $ran\ A_1$ замкнута.

Заметим, что если

$$ran\left(I - PA^{-1}B\right) = L,$$

то из условия

$$ran\left(QA^{-1}B\right)^* \subset ran\left(I - PA^{-1}B\right)^*$$

следует, что

$$1 \in \rho\left(PA^{-1}B\right)$$

и $\widetilde{A}_1$ самосопряжен. Откуда $ran\ A_1 = L^{\perp}$.

Замечание. В условиях теоремы 1предположение $0 \in \rho\,(A)$ несущественно. Важно лишь, чтобы оператор A имел хотя бы одну вещественную регулярную точку λ. В этом случае вместо операторов A и B нужно рассмотреть операторы $A - \lambda$ и $B - \lambda$.

Следствие 1. Рассмотрим теперь компактный оператор $A^{-1}B$. В этом случае $\widetilde{A}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено условие

$(3)'$ $Bx = Ax,\ x \in L \cap dom\ A$.

В частности, если dim L $< \infty$, то $\widetilde{A}_1$ — самосопряженный оператор. Кроме того, в этом случае можно предположить, что оператор B действует из L на некоторое другое подпространство.

Доказательство. Если оператор $A^{-1}B$ компактный, то

$$ran\left(I - PA^{-1}B\right) = \overline{ran\,(I - PA^{-1}B)}$$

следовательно

$$\overline{ran\,(I - A^{-1}B\,)} \cap dom\,A\ \subset\ ran\,(I - A^{-1}B\,).$$

То есть предположение (3) будет эквивалентно предположению $(3)'$.

Пусть dim L $= m$. Исходя из определения оператора $A' = A \cap \widetilde{A}$, сужаем оператор A на подпространство размерности m (тогда индексы дефекта увеличиваются на m), а затем расширяем на подпространство той же размерности (индексы дефекта соответственно уменьшаются на m). Таким образом, получаем оператор с индексами дефекта (0,0), то есть самосопряженный оператор.

Следствие 2. Пусть оператор A — положительный, а B — неположительный, то $\widetilde{A}$ существует тогда и только тогда, когда $L \cap dom\ A = \{0\}$ и $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1^*$.

Доказательство. Если $\widetilde{A}$ существует, то

$$Bx = Ax, \quad x \in L \cap dom\ A.$$

Если $x \neq 0$, то

$$0 \geqslant (Bx,x) = (Ax,x) > 0.$$

Получили противоречие.

Пусть $L \cap dom\ A = \{0\}$. Покажем, что

$$1 \in \rho\left(PA^{-1}B\right): \quad PA^{-1}B = PA^{-1}PB$$

и

$$\sigma\left(PA^{-1}PB\right) \setminus \{0\} = \sigma\left(\left(PA^{-1}P\right)^{1/2} B \left(PA^{-1}P\right)^{1/2}\right) \setminus \{0\} \subset (-\infty; 0)\,.$$

Видим, что выполнены все предположения теоремы 1. Так как $ran\left(I - PA^{-1}B\right) = L$, то $\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1^*$.

Результат ниже сформулированной леммы является достаточно важным вспомогательным фактом при доказательстве ряда утверждений.

Лемма. Если H — гильбертово пространство, A — неограниченный плотно определенный замкнутый оператор на H, то существует сепарабельное подпространство $L \subset H$ такое, что $L \cap dom\, A = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $A = U\,|A|$ — полярное разложение оператора A. Так как оператор $|A| + I$ равномерно положительный, то он ограниченно обратим. Так области определения операторов A и $|A| + I$ совпадают, то без ограничения общности можно считать, что оператор A положительный самосопряженный ограниченно обратимый. Рассмотрим

$$H_1 = \text{з.л.о.}\left\{A^{-n}e\right\}_{n=0}^{\infty},$$

где $e \neq domA$.

Подпространство H_1 сепарабельное и инвариантно относительно A^{-1}. Тогда справедливо разложение $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$.

Так как

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \left(A^{-1}\right)_{11} & 0 \\ 0 & \left(A^{-1}\right)_{22} \end{bmatrix},$$

то

$$A = \begin{bmatrix} \left[\left(A^{-1}\right)_{11}\right]^{-1} & 0 \\ 0 & \left[\left(A^{-1}\right)_{22}\right]^{-1} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим $A|_{H_1}$, то есть $H = H_1$ и

$$domA = ((domA) \cap H_1) \oplus ((domA) \cap H_2)\,.$$

Обозначим $\Delta_n = [n,n+1)$, $n \in N$. Предположим, что $\Delta_n \cap \sigma(A)$ не пусто для всех $n \in N$. Пусть E — спектральная функция оператора A. Тогда справедливо

$$H = \underset{n \in N}{\oplus} H_n, \quad \text{где} \quad H_n = E\left(\Delta_n\right) H.$$

Подпространства H_n являются A — инвариантными:

$$A = \underset{n \in N}{\oplus} A_n, \quad A_n = A|_{H_n}$$

Рассмотрим оператор

$$G = \underset{n \in N}{\oplus} \frac{1}{n} A_n, \quad \text{где} \quad A_n = A|_{H_n}.$$

Оператор G ограничен и ограниченно обратим:

$$n \leqslant \|A_n\| \leqslant n + 1,$$

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \left\|A_n^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Отсюда $\|G\| \leqslant 2$, $\left\|G^{-1}\right\| = 1$.

Следовательно,

$$domC = domA, \quad \text{где} \quad C = G^{-1}A:$$

$$C = G^{-1}A = \underset{n\in N}{\oplus} nI_n, \quad I_n = I|_{H_n}.$$

Предположим без ограничения общности, что

1. C^{-1} — компактный оператор,
2. каждому Δ_n принадлежит лишь одно собственное значение оператора C с кратностью равной единице:

$$\ker(C-\lambda_n) = \text{л.о.}\left\{e_n\right\}, \quad (e_n,e_m) = \delta_{nm}, \quad n,m \in N.$$

Пусть Ω_j — счетное подпространство собственных векторов оператора C:

$$\Omega_j = \left\{e_{kj}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\Omega_j \cap \Omega_k \quad \text{— пусто},$$

$$\underset{j\in N}{\cup} \Omega_j = \left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Положим

$$G_j = \text{з.л.о.}\left\{e_{kj}\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad j \in N.$$

Тогда

$$H = \underset{j\in N}{\oplus} G_j, \quad C = \underset{j\in N}{\oplus} C_j, \quad C_j = C|_{G_j}.$$

Так как

$$domC = \underset{j\in N}{\oplus} domC_j \cap G_j,$$

операторы C_j , $j \in N$ неограниченные и плотно определены

$$domC_j = domC \cap G_j \quad \text{на} \quad G_j, j \in N.$$

Пусть

$$g_j \in G_j \backslash domC_j, \quad j \in N$$

тогда

$$L = \text{з.л.о.}\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\infty}$$

является искомым подпространством.

Следствие 3. Если H — гильбертово пространство, A — неограниченный положительный оператор и $0 \in \rho(A)$, B_1 — ограниченный неотрицательный оператор на H, то существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$ такой, что оператор $A' = A \cap \widetilde{A}$ плотно определен и сужение оператора $\widetilde{A}|_{E_-H}$, где $E\_$ — спектральный проектор, связанный с неотрицательным спектром оператора $\widetilde{A}$, изоморфически подобен оператору B_1.

Доказательство. По доказанной выше лемме можно выбрать подпространство L так, чтобы существовала изометрия

$$V: \mathrm{H} \to \mathrm{L}, \quad VH = L \quad \text{и} \quad L \cap dom\,A = \{0\}.$$

Обозначим $B = VB_1V^{-1}$. Тогда B — неположительный оператор на L. Применяя следствие 2, получаем доказываемое.

Приведем пример операторов $\{A,B\}$ таких, что $L \cap dom\, A = \{0\}$, но множество D неплотно.

Пример. Пусть L и $L^{\perp}$ — бесконечномерные подпространства пространства H. Пусть $Bx = x$ для $x \in L$. Определим оператор A как обратный к оператору

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} I - Z_{12}Z_{12}^* & Z_{12} \\ Z_{12}^* & Z_2 \end{array} \right],$$

где

$$\ker Z_{12} = \{0\}, \quad \ker Z_{12}^* = \{0\}, \ker Z_2 = \{0\}, \quad ranZ_{12}^* \cap ranZ_2 = \{0\}.$$

Отсюда следует, что

$$\ker A^{-1} = \{0\} \quad \text{и} \quad L \cap dom\, A = \{0\}.$$

Так как

$$ran\left(I - A^{-1}B\right) = \left\{ \left(\begin{array}{c} Z_{12}Z_{12}^*x \\ -Z_{12}^*x \end{array} \right) : x \in L \right\},$$

то верно равенство

$$\overline{ran\,(\,I - A^{-1}B\,)} = \Gamma_{\_Z_{12}}.$$

Для $0 \neq u \in L^{\perp}$ вектор

$$v = \left(\begin{array}{c} Z_{12}\left(Z_{12}^*Z_{12}\left(I + Z_2\right) - Z_2\right)u \\ \left(Z_{12}^*Z_{12}\left(I + Z_2\right) - Z_2\right)u \end{array} \right),$$

принадлежит пространству $\overline{ran\,(\,I - A^{-1}B\,)}$. Заметим, что

$$v \neq 0 \quad \text{и} \quad ranZ_{12}^* \cap ranZ_2 = \{0\}.$$

Из равенства

$$v = A^{-1} \left(\begin{array}{c} -Z_{12}\left(I + Z_2\right)u \\ u \end{array} \right)$$

Следует, что вектор $\left(-Z_{12}\left(I + Z_2\right)u,u\right)^t$ ортогонален множеству D. Следовательно, D неплотно.

Теорема 2. Если H — сепарабельное гильбертово пространство, M — подпространство H. Если $A : H \to H$ — неограниченный самосопряженный оператор, $B_1 : M \to M$ — самосопряженный оператор и $\sigma\left(B_1\right) \cap \sigma\left(A\right)$ есть пустое множество, то существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$ такой, что оператор $A' = A \cap \widetilde{A}$ плотно определен и сужение оператора $\widetilde{A}|_{\widetilde{E}(\sigma B_1)H}$ изоморфически подобно оператору B_1, где $\widetilde{E}$ — спектральная функция оператора $\widetilde{A}$.

Доказательство. Предположим, что оператор B_1 — ограниченный и

$$\sigma\left(B_1\right) \subset [\lambda,\mu] \subset \rho\left(A\right).$$

Рассмотрим разложение H:

$$H = E\left((-\infty,\mu)\right)H \oplus E\left((\mu,\infty)\right)H.$$

Пусть без ограничения общности $A|_{E((\mu,\infty))H}$ — неограниченный оператор. Тогда найдется подпространство M и если

1. $M \cap dom\, A = \{0\}$, то по теореме 1 получаем доказываемое.

2. $M \cap dom\,A \neq \{0\}$, то по лемме 1 существует сепарабельное подпространство $M_1 \subset H$, такое что $M_1 \cap dom\,A = \{0\}$. По следствию 3 получаем доказываемое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М., 1972. — 740 с.

2. Милославский, А. И. Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде / А. И. Милославский // УМН. — 1989. — Т. 44, № 4.

3. Азизов, Т. Я. Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости / Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова // Труды Санкт-Петербургского математического общества. — 1998. — № 6. — С. 5–33.

4. Langer, H. Spectral decomposition of block operator matrices / H. Langer, Chr. Tretter // J. Operator Theory. — 1998. — V. 39. — P. 339–359.

5. On the closedness of operator pencils / T. Ya. Azizov, A. Dijksma, K.-H. Forster, M. Yu. Glazkova // Indiana University Mathematics Journal. — 2000. — V. 49, № 1. — P. 3–59.

6. Глазкова, М. Ю. О замкнутости операторных матриц, возникающих при исследовании гидродинамических моделей / М. Ю. Глазкова, С. А. Телкова // Вестник Воронежского института МВД России. — 2005. — № 1. — С. 271–276.

REFERENCES

1. Kato T. Perturbation theory of linear operators. [Kato T. Perturbation theory of linear operators]. Moscow, 1972, 740 c.

2. Miloslavskiy A.I. Spectrum of small oscillations of viscoelastic fluid in an open vessel. [Miloslavskiy A.I. Spectrum of small oscillations of viscoelastic fluid in an open vessel]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1989, vol. 44, no. 4.

3. Azizov T.Ya., Kopachevski N.D., Orlova L.D. Evolutionary and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid. [Azizov T.Ya., Kopachevski N.D., Orlova L.D. Evolutionary and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid]. *Trudy Sankt-Peterburgskogo matematicheskogo obshhestva — Proceedings of the St. Petersburg mathematical society*, 1998, no. 6, pp. 5–33.

4. Langer, H. Spectral decomposition of block operator matrices. J. Operator Theory, 1998, vol. 39, pp. 339–359.

5. Azizov T.Ya., Dijksma A., Forster K.-H., Glazkova M.Yu. On the closedness of operator pencils. Indiana University Mathematics Journal, 2000, vol. 49, no. 1, pp. 3–59.

6. Glazkova M.Yu., Telkova S.A. On the closure of operator matrices arising in the study of hydrodynamic models. [Glazkova M.Yu., Telkova S.A. On the closure of operator matrices arising in the study of hydrodynamic models]. *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii — Bulletin of Voronezh Institute of the Russian interior Ministry*, 2005, no. 1, pp. 271–276.

Глазкова М. Ю., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный технический университет, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронеж, Россия
E-mail: glazkovam@yandex.ru

Glazkova M. Yu., Department of applied mathematics and mechanics, Voronezh State Technical University, Russia
E-mail: glazkovam@yandex.ru

Барсуков А. И., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный технический университет, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронеж, Россия
E-mail: a.barsoukov@mail.ru

Barsoukov A. I., Department of applied mathematics and mechanics, Voronezh State Technical University, Russia
E-mail: a.barsoukov@mail.ru

Гриднева И. В., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный аграрный университет, доцент кафедры математики и механики, Воронеж, Россия
E-mail: gridneva_irina@bk.ru

Gridneva I. V., Department of mathematics and mechanics Voronezh State Agrarian University, Russia
E-mail: gridneva_irina@bk.ru

Акчурина Л. В., кандидат технических наук, Воронежский государственный технический университет, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронеж, Россия
E-mail: ac.mila@yandex.ru

Akchurina L. V., Department of applied mathematics and mechanics, Voronezh State Technical University, Russia
E-mail: ac.mila@yandex.ru

Ульянова Е. Л., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный технический университет, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронеж, Россия
E-mail: ulhelen@yandex.ru

Ulyanova E. L., Department of applied mathematics and mechanics, Voronezh State Technical University, Russia
E-mail: ulhelen@yandex.ru