УДК 517.95; 517.984

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ С ИНВОЛЮЦИЕЙ*

М. Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.01.2017 г.

Аннотация. В работе устанавливаются новые свойства функционально-дифференциальных операторов и уравнений с инволюцией, характеризующие тесную связь с системой Дирака и уравнением Штурма-Лиувилля. Установлено, что произвольная система Дирака является эквивалентной, а уравнение Штурма-Лиувилля является частным случаем простейшего уравнения с инволюцией, рассматриваемого в классе разрывных решений. Исследуется связь между смешанными задачами для волнового уравнения, для системы уравнений в частных производных, связанной с системой Дирака, и смешанными задачами для уравнений с инволюцией, рассматриваемых в классе разрывных решений. Дается трактовка полученных краевых задач для уравнения с инволюцией как задач на геометрическом графе.

Ключевые слова: инволюция, функционально-дифференциальный оператор, система Дирака, смешанная задача, волновое уравнение, геометрический граф.

ON SOME PROPERTIES OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MIXED PROBLEMS WITH AN INVOLUTION

M. S. Burlutskaya

Abstract. We study the new properties of functional differential operators and equations with involution, which characterize the close connection with the Dirac system and the Sturm-Liouville equation. It is established that an arbitrary Dirac system is equivalent, and the Sturm-Liouville equation is a special case of the simplest equation with involution considered in the class of discontinuous solutions. We study the relationship between mixed problems for the wave equation, for a system of partial differential equations related to the Dirac system, and mixed problems for equations with involution considered in the class of discontinuous solutions. The obtained boundary value problems for an equation with involution are considered as problems on a geometric graph.

Keywords: involution, functional differential operator, Dirac system, mixed problem, wave equation, geometric graph.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается уравнение

$$y'(x) + p(x)y(1-x) = \lambda y(x), \quad x \in [0;1], \tag{1}$$

являющееся простейшим из класса функционально-дифференциальных уравнений с инволюцией (инволюцией, или инволютивным отклонением, называется отображение $\nu(x)$ такое, что $\nu^2(x) = \nu(\nu(x)) = x$) вида

$$\alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) = \lambda y(x). \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16–11–10125, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

© Бурлуцкая М. Ш., 2019

Исследование уравнений с различными видами инволюций имеет достаточно давнюю историю (отдельные уравнения рассматривались, например, в работе Ch. Babbage [1] 1816 года). Современные же исследования таких уравнений, стимулированные работами Т. Карлемана [2], И.Г. Петровского [3], Ч. Данкля [4], привели к большому количеству результатов: изучены вопросы корректности постановок задач, качественные свойства решений, разрешимость как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных, спектральные задачи. Отметим здесь только некоторые близкие нам работы [5]–[12].

К операторам, заданным дифференциальным выражением из (2), привели исследования А.П. Хромова по вопросам сходимости разложений интегральных операторов, ядра которых или их производные имеют разрывы на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$ [13], [14]. Спектральные вопросы для таких операторов и связанных с ними операторов Дирака изучались в работах [15]–[20], в [21]–[23] исследовались смешанные задачи с инволюцией.

Предложенная в указанных работах техника исследования спектральных задач для уравнения (2) связана с переходом к краевым задачам в пространстве вектор-функций и преобразовании полученных систем, называемом L-диагонализацией (см. например [15]), что, в свою очередь, приводит к изучению хорошо известной системы Дирака (переход к системам уравнений или уравнениям более высокого порядка также используется, например, в [6], [10]). Выделение из уравнения (2) простейших уравнений вида (1) или $y'(1-x)+p(x)y(x) = \lambda y(x)$, позволило обнаружить новые свойства таких уравнений и дать их приложения в исследовании систем Дирака [20], а также в решении смешанных задач [21].

Приведем результат из [20] для неоднородного уравнения, соответствующего (1), рассматриваемого в классе непрерывно-дифференцируемых функций, где $p(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначна.

Теорема (см. [20, Лемма 1]). *Уравнение*

$$y'(x) + p(x)y(1-x) = \lambda y(x) + f(x), \quad x \in [0,1] \tag{3}$$

эквивалентно системе

$$Bz'(x) + Q(x)z(x) = \lambda z(x) + F(x), \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

$$z_1(1/2) = z_2(1/2), \tag{5}$$

где $z(x) = (y(x), y(1-x))^T$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & p(x) \\ p(1-x) & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, требование непрерывности $y(x)$ необходимо накладывает условия и на $z(x)$ в точке $x = 1/2$, и уравнение (1) оказывается эквивалентным уравнению Дирака с потенциалом симметричного вида и дополнительным условием (5). При этом на отрезке $[0,1/2]$ уравнение Дирака (4) имеет уже произвольный потенциал, но условие склейки остается.

В данной работе мы рассмотрим (1) в классе решений, разрывных в точке $x = 1/2$ (неподвижной точке инволюции $\nu(x) = 1-x$). Полученные результаты позволяют показать, что система Дирака и уравнение Штурма-Лиувилля содержатся в уравнении (1). Также в работе устанавливается связь между смешанными задачами для уравнения в частных производных первого порядка с инволюцией, для системы Дирака и для волнового уравнения.

1. УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть $p(x) \in C([0,1/2] \cup [1/2,1])$ — комплекснозначная функция, а в точке $x = 1/2$ она может иметь разрыв первого рода. Решением уравнения (1) будем называть функцию $y(x)$, непрерывно дифференцируемую на [0,1/2] и [1/2,1], имеющую в точке $x = 1/2$, вообще говоря, разрыв первого рода, и удовлетворяющую уравнению (1) всюду, кроме точки $x = 1/2$.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *с разрывным решением* $y(x)$ *в точке* $x = 1/2$ *эквивалентно системе Дирака*

$$Bz'(x) + Q(x)z(x) = \lambda z(x), \quad x \in [0,1/2], \tag{6}$$

где $z(x) = (z_1(x),z_2(x))^T$, $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_1(x) \\ q_2(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_1(x) = p(x)$, $q_2(x) = p(1-x)$.

Доказательство. Рассматривая уравнение (1) в совокупности с уравнением, полученным из него заменой x на $1-x$, и полагая $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, при $x \in [0,1/2]$ придем к уравнению (6).

Обратно, пусть $z(x) = (z_1(x),z_2(x))^T$ удовлетворяет (6), где $Q(x)$ — матрица с произвольными непрерывными компонентами. Положим
$y(x) = z_1(x)$, при $x \in [0,1/2]$, $y(x) = z_2(1-x)$, при $x \in [1/2,1]$.
Тогда из первого уравнения в (6) имеем (1) на $x \in [0,1/2]$ с $p(x) = q_1(x)$. Из второго уравнения в (6), переходя в нем к переменной $1-x$ при $x \in [1/2,1]$, получим (1) на отрезке [1/2,1] с $p(x) = q_2(1-x)$. $\square$

Теорема 2. *Уравнение Штурма-Лиувилля*

$$v''(x) - q(x)v(x) = \lambda^2 v(x), \quad x \in [0,1/2], \tag{7}$$

эквивалентно уравнению (1) *с разрывным решением* $y(x)$ *в точке* $x = 1/2$, *когда* $p(x) = -1$ *при* $x \in [0,1/2]$, *и* $p(x) = q(1-x)$ *при* $x \in [1/2,1]$, *а* $v(x) = y(x)$.

Доказетельство. Представим (7) в виде

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) v = q(x)v(x).$$

Положим $z_1(x) = v(x)$, $z_2(x) = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) v$. Тогда для $z = (z_1,z_2)^T$ получим систему

$$z_1'(x) - z_2(x) = \lambda z_1(x), \quad -z_2'(x) + q(x)z_1(x) = \lambda z_2(x),$$

т.е. уравнение (6) с матрицей $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}$. Отсюда, по теореме 1 придем к уравнению (1).

Обратно, пусть $y(x)$ — решение уравнения (1), где при $x \in [0,1/2]$ $p(x) = -1$. Тогда по теореме 1 придем к системе, которую можно представить в виде

$$z_1'(x) - \lambda z_1(x) = z_2(x),, \quad z_2'(x) + \lambda z_2(x) = q(x)z_1(x).$$

Из первого уравнения в силу $z_1(x), z_2(x) \in C^1[0,1/2]$ следует, что $z_1'(x) \in C^1[0,1/2]$. Поэтому в получаемом из системы уравнении

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) z_1(x) = q(x)z_1(x)$$

левая часть определена, и оно приводится к уравнению (7), где $v(x) = z_1(x) = y(x)$. $\square$

Таким образом, установлено, что рассматриваемое на отрезке [0,1/2] уравнение Дирака с произвольным непрерывным потенциалом эквивалентно простейшему уравнению с инволюцией (1), рассматриваемому на отрезке [0,1] в классе разрывных решений, а уравнение

Штурма-Лиувилля с произвольным непрерывным потенциалом является его частным случаем.

Дадим геометрическую трактовку краевых условий для уравнений (1) и (6), рассматривая соответствующие задачи как задачи на геометрическом графе (см. [17]).

Замечание 1. *Уравнение* (1) *при* $p(x) \in C[0,1]$ *и* $y(x) \in C^1[0,1]$ *с условием* $y(0) = y(1)$ *есть задача на графе из одного цикла, равносильная системе Дирака* (6) *с условиями Дирихле* $z_1(0) = z_2(0)$, $z_1(1/2) = z_2(1/2)$.

Здесь условия на $y(x)$ и $p(x)$, как уже отмечалось, приводят к дополнительному условию склейки $z_1(1/2) = z_2(1/2)$. Условие $z_1(0) = z_2(0)$ следует из $y(0) = y(1)$ по определению функций $z_k(x)$.

Замечание 2. *Периодическая задача для произвольной системы Дирака на отрезке* $[0,1/2]$ *эквивалентна уравнению* (1)*, рассматриваемому на графе, состоящем из двух циклов* Γ_1 *и* Γ_2 *(параметризованных соответственно отрезками* $[0,1/2]$ *и* $[1/2,1]$*), с условиями* $y(0) = y(1/2-0)$ *на* Γ_1*, и* $y(1/2+0) = y(1)$ *на* Γ_2*, где* $y(x) = z_1(x)$ *при* $x \in [0,1/2]$*,* $y(x) = z_2(1-x)$ *при* $x \in [1/2,1]$*,* $p(x) = q_1(x)$ *при* $x \in [0,1/2]$*, и* $p(x) = q_2(1-x)$ *при* $x \in [1/2,1]$ *(*$p(x)$ *может иметь разрыв первого рода в точке* $x = 1/2$*).*

Действительно, в периодической задаче $z(x)$ удовлетворяет условиям $z_1(0) = z_1(1/2)$, $z_2(0) = z_2(1/2)$. Отсюда, так как $z_1(0) = y(0)$, $z_1(1/2) = y(1/2-0)$, $z_2(0) = y(1)$, $z_2(1/2) = y(1/2+0)$, получаем условия на $y(x)$, которые определяют указанный граф. Таким образом, периодическая задача для произвольной системы Дирака на отрезке $[0,1/2]$ эквивалентна уравнению (1) на несвязном графе из двух колец. При этом само уравнение оказывается связным (связывает производную функцию и потенциал на разных ребрах).

2. О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, РАССМАТРИВАЕМОГО В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ

Теперь устанавим связь между решениями смешанных задач для соответствующих уравнений.

Рассмотрим сначала смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1/2],\ t \in [0,+\infty),\\ u(0,t) = u(1/2,t) = 0,\\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1/2],\end{gathered} \tag{8}$$

где $q(x)$, $\varphi(x)$ комплекснозначные, $q(x) \in C[0,1]$. В соответствии с [24] формальное решение по методу Фурье задачи (8) является классическим решением при минимальных условиях $\varphi(x) \in C^2[0,1/2]$, $\varphi(0) = \varphi(1/2) = \varphi''(0) = \varphi''(1/2) = 0$. При этом, аналогично доказательству дважды дифференцируемости решения по x и t (см. [24, Леммы 9, 10]), устанавливается существование и непрерывность и смешанных частных производных $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}$. Поэтому уравнение в (8) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = -q(x)u(x,t). \tag{9}$$

Отсюда сразу придем к утверждению.

Теорема 3. *Если* $u(x,t)$ *есть решение задачи* (8)*, то* $w(x,t) = (w_1(x,t), w_2(x,t))^T$ *такая, что*

$$w_1(x,t) = u(x,t), \quad w_2(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t),$$

является решением задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = B\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + Q(x)w(x,t), \quad x \in [0,1/2],\ t \in [0,+\infty),\\ w_1(0,t) = w_1(1/2,t) = 0,\\ w_1(x,0) = \varphi(x), \quad w_2(x,0) = -\varphi'(x), \quad x \in [0,1/2],\end{gathered} \tag{10}$$

где $B = \operatorname{diag}(1,-1)$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}$.

«Скаляризуем» теперь эту задачу. Полагая $v(x,t) = w_1(x,t)$, при $x \in [0,1/2]$, $v(x,t) = w_2(1-x,t)$, при $x \in (1/2,1]$, получим

Теорема 4. *Если* $u(x,t)$ *есть решение задачи* (8), *то* $v(x,t)$ *такая, что* $v(x,t) = u(x,t)$, *при* $x \in [0,1/2]$, $v(x,t) = u'_t(1-x,t) + u'_x(1-x,t)$, *при* $x \in (1/2,1]$, *является разрывным в точке* $x = 1/2$ *решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + p(x)v(1-x,t), \quad x \in [0,1],\ t \in [0,+\infty),\\ v(0,t) = v(1/2,t) = 0,\\ v(x,0) = \varphi_1(x), \quad x \in [0,1],\end{gathered} \tag{11}$$

где $p(x) = 1$, *при* $x \in [0,1/2]$, $p(x) = -q(1-x)$, *при* $x \in (1/2,1]$, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, *при* $x \in [0,1/2]$, $\varphi_1(x) = -\varphi'(1-x)$ *при* $x \in (1/2,1]$.

Аналогично, меняя в (9) местами множители, и переходя сначала к векторному уравнению относительно $w_1(x,t) = u(x,t)$, $w_2(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$, а затем снова "скаляризуя" его, получим

Теорема 5. *Если* $u(x,t)$ *есть решение задачи* (8), *то* $\widetilde{v}(x,t)$ *такая, что* $\widetilde{v}(x,t) = u(x,t)$, *при* $x \in [0,1/2]$, $\widetilde{v}(x,t) = u'_t(1-x,t) - u'_x(1-x,t)$, *при* $x \in (1/2,1]$, *является разрывным в точке* $x = 1/2$ *решением задачи*

$$\begin{gathered}\frac{\partial \widetilde{v}(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial \widetilde{v}(x,t)}{\partial x} + p(x)\widetilde{v}(1-x,t), \quad x \in [0,1],\ t \in [0,+\infty),\\ \widetilde{v}(0,t) = \widetilde{v}(1/2,t) = 0,\\ \widetilde{v}(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in [0,1],\end{gathered} \tag{12}$$

где $p(x)$ *из теоремы 4, а* $\varphi_2(x) = \varphi(x)$, *при* $x \in [0,1/2]$, $\varphi_2(x) = \varphi'(1-x)$ *при* $x \in (1/2,1]$.

Таким образом, смешанная задача для классического волнового уравнения с произвольным потенциалом оказывается частным случаем смешанной задачи для уравнения с инволюцией в классе разрывных решений.

Теперь исследуем обратный переход от решений задач (11) и (12) к решению (8).

Лемма 1. *Если* $v(x,t)$ *есть решение задачи* (11), *то* $v(x,t)$ *и* $(\partial/\partial t - \partial/\partial x)v(x,t)$ *непрерывно дифференцируемы по всем* $x \in [0,1/2]$ *и всем* t, *и имеют место соотношения:*

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,t) = -q(x)v(x,t), \qquad x \in [0,1/2],\\ v(0,t) = v(1/2,t) = 0,\\ v(x,0) = \varphi(x), \quad v'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1/2].\end{gathered}$$

Доказательство. Действительно, переводя уравнение в (11) с отрезка $[1/2, 1]$ на отрезок [0,1/2] заменой x на $1-x$, получим уравнение

$$\frac{\partial v(1-x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial v(1-x,t)}{\partial x} - q(x)v(x,t), \quad x \in [0,1/2],$$

откуда для $w_1(x,t) = v(x,t)$, $w_2(x,t) = v(1-x,t)$, $x \in [0,1/2]$ имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) w_1(x,t) = w_2(x,t),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) w_2(x,t) = -q(x)w_1(x,t),$$

а значит дифференцируемость $(\partial/\partial t - \partial/\partial x)w_1(x,t)$ и справедливость уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) w_1(x,t) = -q(x)w_1(x,t), \qquad x \in [0,1/2].$$

Из краевых и начальных условий в (11) следуют указанные в лемме условия для $w_1(x,t) = v(x,t)$. □

Аналогичный результат имеет место для решения задачи (12).

Лемма 2. *Если* $\widetilde{v}(x,t)$ *есть решение задачи* (12)*, то* $\widetilde{v}(x,t)$ *и* $(\partial/\partial t + \partial/\partial x)\widetilde{v}(x,t)$ *непрерывно дифференцируемы по всем* $x \in [0,1/2]$ *и всем* t*, и имеют место соотношения:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \widetilde{v}(x,t) = -q(x)\widetilde{v}(x,t), \qquad x \in [0,1/2],$$
$$\widetilde{v}(0,t) = \widetilde{v}(1/2,t) = 0,$$
$$\widetilde{v}(x,0) = \varphi(x), \quad \widetilde{v}'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1/2].$$

Теорема 6. *Пусть* $v(x,t)$ *есть решение задачи* (11)*,* $\widetilde{v}(x,t)$ *есть решение задачи* (12)*, причем* $v(x,t) = \widetilde{v}(x,t)$ *при* $x \in [0,1/2]$*. Тогда* $v(x,t)$*,* $\widetilde{v}(x,t)$ *дважды непрерывно дифференцируемы по* $x \in [0,1/2]$ *и всем* t*, и функция* $u(x,t) = v(x,t)$*, при* $x \in [0,1/2]$*, является классическим решением задачи* (8).

Доказательство. Из лемм 1, 2 следует непрерывная дифференцируемость по x и t функций

$$(\partial/\partial t + \partial/\partial x)u(x,t) \quad \text{и} \quad (\partial/\partial t - \partial/\partial x)u(x,t),$$

откуда следует непрерывная дифференцируемость функций $\partial u/\partial t$ и $\partial u/\partial x$, а соответственно равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

что и доказывает теорему. □

Система Дирака, в том числе и в случае недифференцируемого потенциала, исследовалась в [25], [26], соответствующая смешанная задача в случае непрерывного потенциала изучалась в [27] (более полную библиографию и ссылки на работы других авторов см. в [25], [27]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babbage, Ch. An essay towards the calculus of functions / Ch. Babbage // Philosophical transactions of the Royal Society of London. — 1816. — V. 11. — P. 179–226.

2. Carleman, T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications / T. Carleman // Verhandl. des Internat. Mathem. Kongress. Zurich. — 1932. — P. 138–151.

3. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. — М. : Наука, 1970. — 280 с.

4. Dankl, Ch. G. Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups / Ch. G. Dankl // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 311, № 1. — P. 167–183.

5. Wiener, J. Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument / J. Wiener A.R. Aftabizadeh // Internat. J. Math. Math. Sci. — 1985. — V. 8, № 1. — P. 151–163.

6. Wiener, J. Generalized solutions of functional-differential equations / J. Wiener. — World Scientific, 1993. — 410 p.

7. Андреев, А. А. О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом / А. А. Андреев // Диффер. уравнения и их приложения : тр. 2-го межд. семинара. — Самара, 1998. — С. 5–18.

8. Платонов, С. С. Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов / С. С. Платонов // Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. мат. — 2004. — Вып. 11. — С. 15–35.

9. Watkins, W. T. Asymptotic properties of differential equations with involutions / W. T. Watkins // Int. J. Math. Math. Sci. — 2008. — V. 44(4). — P. 485.

10. Tojo, F. A. F. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions / F. A. F. Tojo, A. Cabada // J. Math. Anal. Appl. — 2014. — № 412. — P. 529–546.

11. Романова, Е. Ю. Спектральный анализ дифференциального оператора с инволюцией / Е. Ю. Романова // Вестн. НГУ. Сер. : Матем., мех., информ. — 2014. — Т. 14, № 4. — С. 64–78.

12. Kritskov, L. V. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution / L. V. Kritskov, A. M. Sarsenbi // Differential Equations. — 2015. — V. 51, № 8. — P. 984–990.

13. Хромов, А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях / А. П. Хромов // Мат. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. — С. 932–949.

14. Корнев, В. В. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 33–50.

15. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. С. Луконина, А. П. Хромов // Докл. РАН. — 2007. — Т. 414, № 4. — С. 443–446.

16. Курдюмов, В. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения / В. П. Курдюмов, А. П. Хромов // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 196–204.

17. Бурлуцкая, М. Ш. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций одного класса функционально-дифференциальных операторов на графе / М. Ш. Бурлуцкая // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 763–771.

18. Бурлуцкая, М. Ш. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, вып. 4. — С. 3–10.

19. Бурлуцкая, М. Ш. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 64–72.

20. Бурлуцкая, М. Ш. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 15–17.

21. Бурлуцкая, М. Ш. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 151–154.

22. Бурлуцкая, М. Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 12. — С. 2233–2246.

23. Бурлуцкая, М. Ш. Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом / М. Ш. Бурлуцкая // Докл. РАН. — 2012. — Т. 447, № 5. — С. 479—482.

24. Бурлуцкая, М. Ш. Резольвентный подход для волнового уравнения / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 2. — С. 51–63.

25. Бурлуцкая, М. Ш. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака / М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. П. Хромов // Доклады Академии наук. — 2012. — Т. 443, № 4. — С. 414–417.

26. Бурлуцкая, М. Ш. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая, В. В. Корнев, А. П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 9. — С. 1621–1632.

27. Бурлуцкая, М. Ш. Смешанная задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом / М. Ш. Бурлуцкая // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, вып. 2. — С. 145–151.

REFERENCES

1. Babbage Ch. An essay towards the calculus of functions. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1816, vol. 11, pp. 179–226.

2. Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications. Verhandl. des Internat. Mathem. Kongress. Zurich, 1932, pp. 138–151.

3. Petrovsky I.G. Lectures on ordinary differential equations. [Petrovskii I.G. Lektsii po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam]. Moscow, Nauka, 1970, 280 p.

4. Dankl Ch.G. Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1989, vol. 311, no. 1, pp. 167–183.

5. Wiener J., Aftabizadeh A.R. Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument. Internat. J. Math. Math. Sci., 1985, vol. 8, no. 1, pp. 151–163.

6. Wiener J. Generalized solutions of functional-differential equations. World Scientific, 1993, 410 p.

7. Andreev A.A. About the correctness of boundary problems for some equations with calimanesti shift. [Andreev A.A. O korrektnosti krayevykh zadach dlya nekotorykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s karle-manovskim sdvigom]. Differential equations and their applications: proceedings of the 2nd international workshop, Samara, 1998, pp. 5—18.

8. Platonov S.S. The eigenfunction expansion for some functional-differential operators. [Platonov S.S. Razlozheniye po sobstvennym funktsiyam dlya nekotorykh funktsional'no-differentsial'nykh operatorov]. *Trudy Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. matematicheskaia — Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser. Math*, 2004, iss. 11, pp. 15—35.

9. Watkins W.T. Asymptotic properties of differential equations with involutions. Int. J. Math. Math. Sci., 2008, vol. 44(4), pp. 485.

10. Tojo F.A.F., Cabada A. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions. J. Math. Anal. Appl., 2014, no. 412, pp. 529–546.

11. Romanova E.Yu. Spectral analysis of a differential operator with involution. [Romanova E.Yu. Spektral'nyy analiz differentsial'nogo operatora s involyutsiyey]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: matematika, mekhanika, informatika —*

Proceedings of Novosibirsk State University. Ser.: Mathematics, Mechanics, Informatics, 2015, vol. 14, iss. 4, pp. 64–78.

12. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution. Differential Equations, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 984–990.

13. Khromov A.P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. [Khromov A.P. Ob obrashchenii integral'nykh operatorov s yadrami, razryvnymi na diagonalyakh]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1998, vol. 64, no. 6, pp. 932–949.

14. Kornev V.V., Khromov A.P. Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. [Kornev V.V., Khromov A.P. O ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam integral'nykh operatorov s yadrami, dopuskayushchimi razryvy proizvodnykh na diagonalyakh]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 33–50.

15. Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Lukonina A.S., Khromov A.P. A functional-differential operator with involution. [Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Lukonina A.S., Khromov A.P. Funktsional'no-differentsial'nyy operator s involyutsiyey]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2007, vol. 414, no. 4, pp. 443–446.

16. Kurdyumov V.P. , Khromov A.P. On Riesz bases of eigenfunctions and associated functions of a functional differential equation with a reflection operator. [Kurdyumov V.P. , Khromov A.P. O bazisakh Rissa iz sobstvennykh i prisoyedinennykh funktsiy funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s operatorom otrazheniya]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 196–204.

17. Burlutskaya M.Sh. On Riesz bases of eigenfunctions and associated functions of a class of functional differential operators on a graph. [Burlutskaya M.Sh. O bazisakh Rissa iz sobstvennykh i prisoyedinennykh funktsiy odnogo klassa funktsional'no-differentsial'nykh operatorov na grafe]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 6, pp. 763–771.

18. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. On a theorem of equiconvergence on the whole interval for functional differential operators. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Ob odnoy teoreme ravnoskhodimosti na vsem otrezke dlya funktsional'no-differentsial'nykh operatorov]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika — Proceedings of the Saratov University. New episode. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*, 2009, vol. 9, iss. 4, pp. 3–10.

19. Burlutskaya M.Sh. Asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a functional differential operator with involution. [Burlutskaya M.Sh. Asimptoticheskiye formuly dlya sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy funktsional'no-differentsial'nogo operatora s involyutsiyey]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 64–72.

20. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Functional differential operators with involution and Dirac operators with periodic boundary conditions. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Funktsional'no-differentsial'nyye operatory s involyutsiyey i operatory Diraka s periodicheskimi krayevymi usloviyami]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 15–17.

21. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Classical solution of a mixed problem with involution. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Klassicheskoye resheniye dlya smeshannoy zadachi s involyutsiyey]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2010, vol. 435, no. 2, pp. 151–154.

22. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Metod Fur'ye v smeshannoy zadache dlya uravneniya pervogo poryadka s involyutsiyey]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and*

Mathematical Physics, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2233–2246.

23. Burlutskaya M.Sh. A mixed problem with an involution on a graph of two edges with a cycle. [Burlutskaya M.Sh. Smeshannaya zadacha s involyuciej na grafe iz dvuh reber s ciklom]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2012, vol. 447, no. 5, pp. 479–482.

24. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Resolvent Approach for Wave Equation. [Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Rezol'ventnyy podkhod dlya volnovogo uravneniya]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 51–63.

25. Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Khromov A.P. Refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the Dirac system. [Burlutskaya M.Sh., Kurdyumov V.P., Khromov A.P. Utochnennyye asimptoticheskiye formuly dlya sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy sistemy Diraka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2012, vol. 443, no. 4, pp. 414–417.

26. Burlutskaya M.Sh., Kornev V.V., Khromov A.P. Dirac system with nondifferentiable potential and periodic boundary conditions. [Burlutskaya M.Sh., Kornev V.V., Khromov A.P. Sistema Diraka s nedifferentsiruyemym potentsialom i periodicheskimi krayevymi usloviyami]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 9, pp. 1621–1632.

27. Burlutskaya M.Sh. A mixed problem for a system of first order differential equations with continuous potential. [Burlutskaya M.Sh. Smeshannaya zadacha dlya sistemy differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka s nepreryvnym potentsialom]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika — Proceedings of the Saratov University. New episode. Series: Math. Mech. Computer science*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 145–151.

Бурлуцкая Мария Шаукатовна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Burlutskaya Maria Shaukatovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: bmsh2001@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90