

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА С ЗАТУХАНИЕМ

Е. Г. Беломытцева, А. Ф. Курин, Е. Б. Туленко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.01.2017 г.

Аннотация. Во втором приближении асимптотического метода усреднения при произвольных начальных условиях построены решения задачи Коши для уравнения Хилла с постоянным затуханием в четырех областях параметрического резонанса с неограниченным решением, в примыкающих к ним областях устойчивости с экспоненциально затухающей амплитудой быстрых колебаний, а также в областях устойчивости с затухающей медленно колеблющейся амплитудой. Получены критерии этих режимов в виде неравенств, выраженных через коэффициент затухания, постоянную составляющую, амплитуды и частоты гармоник спектра периодического коэффициента уравнения Хилла.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение Хилла, параметрический резонанс, метод усреднения.

STABILITY SPECTRAL CRITERIUM AND CAUCHY PROBLEM FOR HILL'S EQUATION WITH DAMPING

E. G. Belomytseva, A. F. Kurin, E. B. Tulenko

Abstract. Using the second approximation of the asymptotic averaging method Cauchy problem solutions for Hill's equation with constant damping are found for arbitrary initial conditions, in four domains of parametric resonance with unbounded solution, in neighboring stability domains with exponentially damping amplitude of fast oscillations, and also in stability domains with damping slowly oscillating amplitude. Criteria for existence of these regimes are obtained in a form of inequalities depending on damping coefficient, constant term, amplitudes and frequencies of harmonics of spectrum of a periodic coefficient of Hill's equation.

Keywords: Cauchy problem, Hill equation, parametric resonance, averaging method.

ВВЕДЕНИЕ

Этой работой продолжается цикл статей [1], [2], [3], [4], в которых решается задача Коши для уравнений Матье и Хилла с произвольными начальными условиями. Полученные формулы полезны для приложений. В частности, показана высокая эффективность фазовой группировки предварительно нефазированных осцилляторов при параметрическом резонансе [5].

В настоящей работе решается задача Коши для уравнения Хилла с постоянным затуханием. Периодический коэффициент в уравнении — ряд Фурье по синусам и косинусам. Используется второе приближение асимптотического метода усреднения [6],[7]. Получены формулы для нулевой, первой, второй и третьей областей параметрического резонанса, а также для узких областей, граничащих с областями резонанса, в которых существуют ограниченные колебания с экспоненциально затухающей амплитудой. С этими областями, в свою очередь,

граничат области колебаний с медленно колеблющейся затухающей амплитудой, для которых получены решения, справедливые вблизи границ областей параметрического резонанса.

Границы всех указанных областей определяются из полученных алгебраических уравнений, связывающих коэффициенты ряда Фурье, частоты гармоник и коэффициент затухания. Неравенства, зависящие от этих параметров, указывают на перечисленные режимы колебаний в решении уравнения Хилла. В частности, одно из неравенств, названное в [3] спектральным критерием устойчивости, указывает на отсутствие в решении резонансных колебаний.

Приводятся примеры, в которых коэффициенты ряда Фурье вычисляются аналитически. Заметим, что полученными в работе формулами можно пользоваться, если коэффициенты определены численными методами.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

Будем решать уравнение Хилла с затуханием

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + p(t)z = 0 \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad (1.2)$$

В уравнении точки означают дифференцирование по вещественному t , а переменный коэффициент является рядом Фурье

$$p(t) = p_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [p_m^c \cos(mt) + p_m^s \sin(mt)]. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.1) перепишем в виде

$$\ddot{z} + p_0 z = -z \sum_{m=1}^{\infty} [p_m^c \cos(mt) + p_m^s \sin(mt)] - \alpha \dot{z} = f(t, z, \dot{z}). \quad (1.4)$$

Для анализа известных резонансов в уравнении Хилла [3]

$$\omega_0 = \sqrt{p_0} \approx \frac{k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

будем использовать асимптотический метод усреднения [6],[7],[1] (см. п. 2–п. 5). Поэтому будем считать

$$p_m^c = \varepsilon c_m^c, \quad p_m^s = \varepsilon c_m^s, \quad \alpha = \varepsilon \alpha_1,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Для постоянной составляющей $p_0 = \omega_0^2$ ряда (1.3) потребуются условия:

$$p_0 \sim 1, \quad (1.6)$$

в этом случае уравнение (1.4) приводится к известной в методе усреднения системе уравнений, содержащей быстро вращающиеся фазы, [7] и

$$p_0 \approx 0, \quad (1.7)$$

когда из уравнения (1.4) получаем систему в стандартной форме [8].

При условии (1.6) и $f(t, z, \dot{z}) = 0$ уравнение (1.4) имеет общее решение $z = b \cos(\omega_0 t + \zeta)$, в котором b, ζ — произвольные постоянные. Следуя идее Лагранжа в его методе вариации произвольных постоянных, решение уравнения (1.1) при $f(t, z, \dot{z}) \neq 0$ будем искать в виде

$$z = b(t) \cos \psi(t), \quad \dot{z} = -\omega_0 b(t) \sin \psi(t) \quad (1.8)$$

После преобразований для переменных ван дер Поля $b(t)$ (амплитуда) и $\psi(t)$ (фаза) получаем систему

$$\dot{b} = -\frac{f \sin \psi}{\omega_0}, \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{f \cos \psi}{b \omega_0},$$

эквивалентную уравнению (1.1).

Используя (1.3),(1,8), с помощью формул тригонометрии систему приводим к виду

$$\begin{aligned} \dot{b} = \varepsilon b \left\{ \frac{1}{4\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^c [\sin(2\psi + mt) + \sin(2\psi - mt)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^s [\cos(2\psi - mt) - \cos(2\psi + mt)] - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_1}{2} \cos(2\psi) \right\}, \\ \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \left\{ \frac{1}{4\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^c [\cos(2\psi + mt) + \cos(2\psi - mt)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^s [\sin(2\psi + mt) - \sin(2\psi - mt)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} [c_m^c \cos(mt) + c_m^s \sin(mt)] - \frac{\alpha_1}{2} \sin(2\psi) \right\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Введем фазы

$$\varphi_m^- = 2\psi - mt, \quad \varphi_m^+ = 2\psi + mt, \quad \Psi = 2\psi, \quad \chi_m = mt \quad (1.10)$$

и запишем окончательно систему уравнений для амплитуды b и фаз

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \varepsilon M(b, \varphi_m^-, \varphi_m^+, \Psi, \chi_m), \\ \dot{\varphi}_k^- &= 2\omega_0 - k + \varepsilon N(\varphi_m^-, \varphi_m^+, \Psi, \chi_m), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \dot{\varphi}_k^+ &= 2\omega_0 + k + \varepsilon N(\varphi_m^-, \varphi_m^+, \Psi, \chi_m), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \dot{\Psi} &= 2\omega_0 + \varepsilon N(\varphi_m^-, \varphi_m^+, \Psi, \chi_m), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \dot{\chi}_k &= k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} M &= b \left\{ \frac{1}{4\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} [c_m^c (\sin \varphi_m^- + \sin \varphi_m^+) + c_m^s (\cos \varphi_m^- - \cos \varphi_m^+)] - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_1}{2} \cos \Psi \right\}, \\ N &= \frac{1}{2\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} [c_m^c (\cos \varphi_m^- + \cos \varphi_m^+) - c_m^s (\sin \varphi_m^- - \sin \varphi_m^+)] + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} (c_m^c \cos \chi_m + c_m^s \sin \chi_m) - \alpha_1 \sin \Psi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Начальные значения (1.2) для уравнения (1.1) с помощью формул (1.8) преобразуются в начальные (при $t = 0$) условия для системы (1.9)

$$b(0) = b_0 = \sqrt{z_0^2 + (\dot{z}_0/\omega_0)^2}, \quad \text{tg } \psi_0 = -\dot{z}_0/(\omega_0 z_0). \quad (1.13)$$

При резонансе $2\omega_0 \approx k$ в системе (1.11) медленной фазой является φ_k^- . Остальные фазы быстрые. Система представляет собой известную в методе усреднения систему с быстро вращающимися фазами (см. [7])

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y), \quad \dot{y} = \omega + \varepsilon Y(x, y). \quad (1.14)$$

Делается замена переменных

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad (1.15)$$

где новые переменные определяются из системы уравнений

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots, \quad \dot{\bar{y}} = \omega + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots. \quad (1.16)$$

Если подставить разложения (1.15), (1.16) в (1.14), получим систему дифференциальных уравнений для вычисления функций u, v, A, B , которая во втором приближении метода усреднения при $\omega \neq \omega(x)$ имеет вид [7], [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} \omega &= X - A_1, & \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} \omega &= Y - B_1. \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}} \omega &= \frac{\partial X}{\partial \bar{x}} u_1 + \frac{\partial X}{\partial \bar{y}} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} A_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} B_1 - A_2, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}} \omega &= \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}} u_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}} v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}} A_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} B_1 - B_2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Интегрирование системы см. в п.п. 2-4.

При условии (1.7) уравнение (1.1) приводится к системе уравнений в стандартной форме [8], как это сделано в [1], [3]. Используется замена переменных, которая является обобщением известной замены Боголюбова в задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса (см. [8]) на случай, когда коэффициент $p(t)$ содержит более одного периодического колебания. Формулы замены имеют вид

$$z = (1 + \varepsilon S)\varphi, \quad v = \dot{z} = \varepsilon \Omega + \varepsilon \dot{S}\varphi, \quad (1.18)$$

где φ, Ω — новые переменные. Функция S определяется выражением

$$S = \sum_m \left[\frac{c_m^c \cos(mt)}{m^2} + \frac{c_m^s \sin(mt)}{m^2} \right].$$

Малое значение p_0 в (1.3) возьмем в виде $p_0 = \varepsilon^2 c_0$. Тогда коэффициент $p(t)$ в уравнении (1.1) записывается как

$$p(t) = \varepsilon^2 c_0 - \varepsilon \dot{S}. \quad (1.19)$$

Представляя уравнение (1.1) системой

$$\dot{z} = v, \quad \dot{v} + \alpha v + p(t)z = 0,$$

используя формулы (1.18), (1.19), после преобразований получаем систему дифференциальных уравнений для новых переменных

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \varepsilon \Omega - \varepsilon^2 S \Omega + \dots, \\ \dot{\Omega} &= \varepsilon [(S\ddot{S} - \alpha_1 \dot{S} - c_0)\varphi - (\dot{S} + \alpha_1)\Omega] + \varepsilon^2 (S\dot{S}\Omega - c_0 S\varphi) + \dots. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В асимптотическом методе усреднения эта система в стандартной форме [8]

$$\dot{x} = \varepsilon X_1(x, t) + \varepsilon^2 X_2(x, t) + \dots. \quad (1.21)$$

Решение имеет вид

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, t) + \dots, \quad (1.22)$$

где новая переменная \bar{x} определяется из уравнения

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots. \quad (1.23)$$

Подставляем (1.22) с учетом (1.23) в уравнение (1.21), приравниваем выражения с ε и ε^2 в левой и правой частях уравнения. В результате получаем уравнения для определения $A_1, u_1, A_2, u_2, \dots$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1 - A_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial X_1}{\partial \bar{x}} u_1 + X_2 - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} A_1 - A_2, \dots \quad (1.24)$$

2. РЕЗОНАНС $p_0 \approx \frac{1}{4}$

При $p_0 \approx 1/4$ ($\omega_0 \approx 1/2$) в системе уравнений (1.11) медленными переменными являются амплитуда b и фаза φ_1^- . Остальные фазы — быстрые. Поэтому в системе (1.14) имеем векторы

$$x = (x^1, x^2) = (b, \varphi_1^-), \quad y = (\varphi_k^-, k \neq 1; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \chi_k, k = 1, 2, \dots; \Psi), \\ \omega = (2\omega_0 - k, k \neq 1; 2\omega_0 + k, k = 1, 2, \dots; k, k = 1, 2, \dots; 2\omega_0).$$

Правые части уравнений системы (1.14) согласно формулам (1.11) имеют вид

$$X^1 = M, \quad X^2 = \frac{2\omega_0 - 1}{\varepsilon} + N, \quad (2.1)$$

а также

$$Y = N \quad (2.2)$$

в уравнениях для фаз $\varphi_k^-, k \neq 1; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \Psi$ и

$$Y = 0 \quad (2.3)$$

в уравнениях для фаз $\chi_k, k = 1, 2, \dots$. Функции M, N определяются выражениями (1.12).

Решение системы (1.11) в первом приближении метода усреднения находим интегрированием уравнений (1.17) для u_1, v_1 . Функции A_1, B_1 вычисляем усреднением правых частей этих уравнений по фазам быстрых колебаний с использованием формул (1.12)

$$A_1^1 = \bar{X}^1 = \bar{M} = \bar{b} \left[\frac{1}{4\omega_0} (c_1^c \sin \varphi_1^- + c_1^s \cos \varphi_1^-) - \frac{\alpha_1}{2} \right], \\ A_1^2 = \bar{X}^2 = \frac{2\omega_0 - 1}{\varepsilon} + \bar{N} = \frac{2\omega_0 - 1}{\varepsilon} + \frac{1}{2\omega_0} (c_1^c \cos \varphi_1^- - c_1^s \sin \varphi_1^-). \quad (2.4)$$

Для фаз $\varphi_k^-, k \neq 1; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \Psi$ получаем

$$B_1 = \frac{1}{2\omega_0} (c_1^c \cos \varphi_1^- - c_1^s \sin \varphi_1^-). \quad (2.5)$$

Для фаз $\chi_k, k = 1, 2, \dots$ находим

$$B_1 = 0. \quad (2.6)$$

С учетом выражений (2.4)–(2.6) интегрируем уравнения (1.17) для u_1, v_1 . Возникающие произвольные функции медленных переменных \bar{b}, φ_1^- , от выбора которых не зависит точность решения во втором приближении [7], полагаем равными нулю. Тогда в решении (1.15) слагаемые с u_1, v_1 будут описывать только быстрые колебания. После интегрирования получаем

$$u_1^1 = \frac{\bar{b}}{4\omega_0} \left(\sum_{m, m \neq 1} \frac{c_m^s \sin \varphi_m^- - c_m^c \cos \varphi_m^-}{2\omega_0 - m} - \sum_m \frac{c_m^s \sin \varphi_m^+ + c_m^c \cos \varphi_m^+}{2\omega_0 + m} + \alpha_1 \sin \bar{\Psi} \right), \\ u_1^2 = \frac{1}{2\omega_0} \left(\sum_{m, m \neq 1} \frac{c_m^c \sin \varphi_m^- + c_m^s \cos \varphi_m^-}{2\omega_0 - m} + \sum_m \frac{c_m^c \sin \varphi_m^+ - c_m^s \cos \varphi_m^+}{2\omega_0 + m} + \right. \\ \left. + 2 \sum_m \frac{c_m^c \sin \chi_m - c_m^s \cos \chi_m}{m} + \alpha_1 \cos \bar{\Psi} \right). \quad (2.7)$$

Функция v_1 для фаз $\varphi_k^-, k \neq 1$; $\varphi_k^+, k = 1, 2, \dots$; Ψ равна

$$v_1 = u_1^2, \tag{2.8}$$

для χ_k —

$$v_1 = 0. \tag{2.9}$$

Во втором приближении метода усреднения используем уравнения (1.17) для u_2, v_2 с учетом выражений (2.1)–(2.9). В пределах точности второго приближения интегрирование уравнений не требуется. Необходимо вычислить только A_2, B_2 усреднением правых частей по фазам быстрых колебаний. При усреднении удерживаем постоянные составляющие и слабые, описывающие колебания с медленной фазой φ_1^- . Они появляются при умножении тригонометрических функций. Заметим, что при этом возникает составляющая с фазой $2\varphi_1^-$. Однако оценки показывают, что при резонансе $\omega_0 \approx 1/2$ эта составляющая мала ($\sim \varepsilon$). В правых частях системы уравнений (1.16) она дает вклад $\sim \varepsilon^3$, что не соответствует точности второго приближения. Этой составляющей можно пренебречь. В результате приходим к выражениям

$$\begin{aligned} A_2^1 &= \frac{\bar{b}}{8\omega_0^2} \left\{ \left[\sum_m \frac{c_m^c c_{m+1}^c + c_m^s c_{m+1}^s}{m(m+1)} + 2\alpha_1 \omega_0 c_1^s \right] \sin \varphi_1^- + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_m \frac{c_m^c c_{m+1}^s - c_m^s c_{m+1}^c}{m(m+1)} - 2\alpha_1 \omega_0 c_1^c \right] \cos \varphi_1^- \right\}, \\ A_2^2 &= -\frac{1}{8\omega_0^2} \left[\sum_{m,m \neq 1} \frac{(c_m^c)^2 + (c_m^s)^2}{2\omega_0 - m} + \sum_m \frac{(c_m^c)^2 + (c_m^s)^2}{2\omega_0 + m} + 2\alpha_1^2 \omega_0 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4\omega_0^2} \left\{ \left[\sum_m \frac{c_m^s c_{m+1}^c - c_m^c c_{m+1}^s}{m(m+1)} + 2\alpha_1 \omega_0 c_1^c \right] \sin \varphi_1^- + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_m \frac{c_m^c c_{m+1}^c + c_m^s c_{m+1}^s}{m(m+1)} + 2\alpha_1 \omega_0 c_1^s \right] \cos \varphi_1^- \right\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

По первой формуле в (1.16) с использованием (2.4), (2.10) записываем систему уравнений для средних значений медленных переменных \bar{b} и φ_1^-

$$\dot{\bar{b}} = 0.5(r \sin \varphi_1^- + \beta \cos \varphi_1^- - \alpha), \quad \dot{\varphi}_1^- = s + r \cos \varphi_1^- - \beta \sin \varphi_1^-, \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned} r &= \frac{p_1^c}{2\sqrt{p_0}} + \frac{1}{4p_0} \sum_m \frac{p_m^c p_{m+1}^c + p_m^s p_{m+1}^s}{m(m+1)} + \frac{\alpha p_1^s}{2\sqrt{p_0}}, \\ \beta &= \frac{p_1^s}{2\sqrt{p_0}} + \frac{1}{4p_0} \sum_m \frac{p_m^c p_{m+1}^s - p_m^s p_{m+1}^c}{m(m+1)} - \frac{\alpha p_1^c}{2\sqrt{p_0}}, \\ s &= 2\sqrt{p_0} - 1 - \frac{1}{8p_0} \left[\sum_{m,m \neq 1} \frac{(p_m^c)^2 + (p_m^s)^2}{2\sqrt{p_0} - m} + \sum_m \frac{(p_m^c)^2 + (p_m^s)^2}{2\sqrt{p_0} + m} \right] - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{p_0}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Преобразование [8]

$$P = \bar{b} \sin \frac{\varphi_1^-}{2}, \quad R = \bar{b} \cos \frac{\varphi_1^-}{2}$$

приводит к системе линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{P} = -\frac{\alpha + \beta}{2} P + \frac{r + s}{2} R, \quad \dot{R} = -\frac{\alpha - \beta}{2} R + \frac{r - s}{2} P, \tag{2.13}$$

из которой следует уравнение осциллятора

$$\ddot{P} + \alpha\dot{P} + \frac{\lambda}{4}P = 0, \quad (2.14)$$

где

$$\lambda = s^2 - r^2 + \alpha^2 - \beta^2. \quad (2.15)$$

Среди корней характеристического уравнения

$$k_{1,2} = 0.5(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \lambda}) \quad (2.16)$$

имеется положительный корень (параметрический резонанс) при условии $\lambda < 0$. Уравнение

$$\lambda = 0 \quad (2.17)$$

определяет границу резонанса.

При $0 < \lambda < \alpha^2$ в общем решении уравнения (2.14) имеются две затухающие экспоненты, колебания отсутствуют. Если $\lambda > \alpha^2$, корни $k_{1,2}$ комплексно-сопряженные, и получаем затухающие колебания. Условие $\lambda = \alpha^2$ определяет границу затухающего решения $P(t)$ без колебаний и с колебаниями.

Параметр λ выражается через постоянную составляющую p_0 , амплитуды гармоник $p_m^{c,s}$ ряда (1.3), а также коэффициент затухания α в уравнении (1.1).

Функция $P(t)$ вычисляется интегрированием уравнения (2.14). Функция $R(t)$ выражается через $P(t)$ как

$$R(t) = \frac{2}{r+s} \left(\dot{P} + \frac{\alpha+\beta}{2}P \right). \quad (2.18)$$

Эта формула следует из первого уравнения системы (2.13).

3. РЕЗОНАНС $p_0 \approx 1$

При $k = 2$ в (1.5) имеем резонанс $p_0 \approx 1$ ($\omega_0 \approx 1$). В системе уравнений (1.11) медленными переменными являются амплитуда b и фаза φ_2^- . Остальные фазы — быстрые. В системе (1.14) участвуют векторы

$$x = (x^1, x^2) = (b, \varphi_2^-), \quad y = (\varphi_k^-, k \neq 2; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \chi_k, k = 1, 2, \dots; \Psi), \\ \omega = (2\omega_0 - k, k \neq 2; 2\omega_0 + k, k = 1, 2, \dots; k, k = 1, 2, \dots; 2\omega_0).$$

Правые части уравнений системы (1.14) согласно формулам (1.11) имеют вид

$$X^1 = M, \quad X^2 = \frac{2\omega_0 - 2}{\varepsilon} + N,$$

а также

$$Y = N$$

в уравнениях для фаз $\varphi_k^-, k \neq 2; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \Psi$ и

$$Y = 0$$

в уравнениях для фаз $\chi_k, k = 1, 2, \dots$. Функции M, N определяются выражениями (1.12).

Формулы первого приближения метода усреднения следуют из уравнений (1.17) для u_1, v_1 . Функции A_1, B_1 вычисляем усреднением правых частей этих уравнений по фазам быстрых колебаний с использованием формул (1.12)

$$A_1^1 = \bar{X}^1 = \bar{M} = \bar{b} \left[\frac{1}{4\omega_0} (c_2^c \sin \varphi_2^- + c_2^s \cos \varphi_2^-) - \frac{\alpha_1}{2} \right], \quad (3.1) \\ A_1^2 = \bar{X}^2 = \frac{2\omega_0 - 2}{\varepsilon} + \bar{N} = \frac{2\omega_0 - 2}{\varepsilon} + \frac{1}{2\omega_0} (c_2^c \cos \varphi_2^- - c_2^s \sin \varphi_2^-).$$

Аналогичным образом из уравнения (1.17) для v_1 находим

$$B_1 = \frac{1}{2\omega_0}(c_2^c \cos \varphi_2^- - c_2^s \sin \varphi_2^-)$$

для фаз $\varphi_k^-, k \neq 2$; $\varphi_k^+, k = 1, 2, \dots$; Ψ и $B_1 = 0$ для $\chi_k, k = 1, 2, \dots$.

Интегрирование уравнений (1.17) для u_1 дает функции

$$\begin{aligned} u_1^1 &= \frac{\bar{b}}{4\omega_0} \left(\sum_{m,m \neq 2} \frac{c_m^s \sin \varphi_m^- - c_m^c \cos \varphi_m^-}{2\omega_0 - m} - \sum_m \frac{c_m^s \sin \varphi_m^+ + c_m^c \cos \varphi_m^+}{2\omega_0 + m} + \alpha_1 \sin \bar{\Psi} \right), \\ u_1^2 &= \frac{1}{2\omega_0} \left(\sum_{m,m \neq 2} \frac{c_m^c \sin \varphi_m^- + c_m^s \cos \varphi_m^-}{2\omega_0 - m} + \sum_m \frac{c_m^c \sin \varphi_m^+ - c_m^s \cos \varphi_m^+}{2\omega_0 + m} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_m \frac{c_m^c \sin \chi_m - c_m^s \cos \chi_m}{m} + \alpha_1 \cos \bar{\Psi} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

После интегрирования уравнений (1.17) для v_1 получаем $v_1 = u_1^2$ для фаз $\varphi_k^-, k \neq 2$; $\varphi_k^+, k = 1, 2, \dots$; Ψ и $v_1 = 0$ для $\chi_k, k = 1, 2, \dots$.

Формулы второго приближения метода усреднения следуют из уравнений (1.17) для u_2, v_2 . Здесь, как в п. 2, в пределах точности второго приближения достаточно вычислить функции A_2, B_2 усреднением правых частей указанных уравнений по комбинационным фазам быстрых колебаний, возникающих при умножении тригонометрических функций. Как в п. 2, слагаемое с фазой $2\varphi_2^-$ оказывается $\sim \varepsilon$ и им пренебрегаем. В результате получаем

$$\begin{aligned} A_2^1 &= \frac{\bar{b}}{8\omega_0^2} \left\{ \left[(c_1^s)^2 - (c_1^c)^2 + 2 \sum_m \frac{c_m^c c_{m+2}^c + c_m^s c_{m+2}^s}{m(m+2)} + \alpha_1 \omega_0 c_2^s \right] \sin \varphi_2^- + \right. \\ &\quad \left. + \left[-2c_1^c c_1^s + 2 \sum_m \frac{c_m^c c_{m+2}^s - c_m^s c_{m+2}^c}{m(m+2)} - \alpha_1 \omega_0 c_2^c \right] \cos \varphi_2^- \right\}, \\ A_2^2 &= -\frac{1}{8\omega_0^2} \left[\sum_{m,m \neq 2} \frac{(c_m^c)^2 + (c_m^s)^2}{2\omega_0 - m} + \sum_m \frac{(c_m^c)^2 + (c_m^s)^2}{2\omega_0 + m} + 2\alpha_1^2 \omega_0 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{4\omega_0^2} \left\{ \left[(c_1^s)^2 - (c_1^c)^2 + 2 \sum_m \frac{c_m^c c_{m+2}^c + c_m^s c_{m+2}^s}{m(m+2)} + \alpha_1 \omega_0 c_2^s \right] \cos \varphi_2^- + \right. \\ &\quad \left. + \left[2c_1^c c_1^s - 2 \sum_m \frac{c_m^c c_{m+2}^s - c_m^s c_{m+2}^c}{m(m+2)} + \alpha_1 \omega_0 c_2^c \right] \sin \varphi_2^- \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Систему уравнений для средних \bar{b}, φ_2^- получаем по первой формуле в (1.16) с использованием выражений (3.1), (3.3)

$$\dot{\bar{b}} = 0.5(r \sin \varphi_2^- + \beta \cos \varphi_2^- - \alpha), \quad \dot{\varphi}_2^- = s + r \cos \varphi_2^- - \beta \sin \varphi_2^-, \quad (3.4)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} r &= \frac{p_2^c}{2\sqrt{p_0}} + \frac{1}{4p_0} \left[(p_1^s)^2 - (p_1^c)^2 + 2 \sum_m \frac{p_m^c p_{m+2}^c + p_m^s p_{m+2}^s}{m(m+2)} + \alpha p_2^s \sqrt{p_0} \right], \\ \beta &= \frac{p_2^s}{2\sqrt{p_0}} + \frac{1}{4p_0} \left[-2p_1^c p_1^s + 2 \sum_m \frac{p_m^c p_{m+2}^s - p_m^s p_{m+2}^c}{m(m+2)} - \alpha p_2^c \sqrt{p_0} \right], \\ s &= 2\sqrt{p_0} - 2 - \frac{1}{8p_0} \left[\sum_{m,m \neq 2} \frac{(p_m^c)^2 + (p_m^s)^2}{2\sqrt{p_0} - m} + \sum_m \frac{(p_m^c)^2 + (p_m^s)^2}{2\sqrt{p_0} + m} \right] - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{p_0}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как в п. 2, формулы [8]

$$P = \bar{b} \sin \frac{\bar{\varphi}_2^-}{2}, \quad R = \bar{b} \cos \frac{\bar{\varphi}_2^-}{2}$$

позволяют преобразовать систему (3.4) в уравнение линейного осциллятора (2.14) с коэффициентом λ (2.15), в котором r, β, s описываются теперь выражениями (3.5). Уравнение (2.17) определяет границу области резонанса $p_0 \approx 1$.

4. РЕЗОНАНС $p_0 \approx \frac{9}{4}$

При $k = 3$ в (1.5) имеем условие резонанса $\omega_0 \approx 3/2$ ($p_0 \approx 9/4$). Теперь в системе уравнений (1.11) медленными переменными являются амплитуда b и фаза φ_3^- . В системе (1.14) участвуют векторы

$$x = (x^1, x^2) = (b, \varphi_3^-), \quad y = (\varphi_k^-, k \neq 3; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \chi_k, k = 1, 2, \dots; \Psi), \\ \omega = (2\omega_0 - k, k \neq 3; 2\omega_0 + k, k = 1, 2, \dots; k, k = 1, 2, \dots; 2\omega_0).$$

Правые части уравнений системы (1.14) согласно формулам (1.11), (1.12) имеют вид

$$X^1 = M, \quad X^2 = \frac{2\omega_0 - 3}{\varepsilon} + N,$$

а также

$$Y = N$$

в уравнениях для фаз $\varphi_k^-, k \neq 3; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \Psi$ и

$$Y = 0$$

в уравнениях для фаз $\chi_k, k = 1, 2, \dots$. Функции M, N определяются выражениями (1.12).

Усредняя правые части уравнения (1.17) для u_1 по фазам быстрых колебаний, находим

$$A_1^1 = \bar{X}^1 = \bar{M} = \bar{b} \left[\frac{1}{4\omega_0} (c_3^c \sin \bar{\varphi}_3^- + c_3^s \cos \bar{\varphi}_3^-) - \frac{\alpha_1}{2} \right], \\ A_1^2 = \bar{X}^2 = \frac{2\omega_0 - 3}{\varepsilon} + \bar{N} = \frac{2\omega_0 - 3}{\varepsilon} + \frac{1}{2\omega_0} (c_3^c \cos \bar{\varphi}_3^- - c_3^s \sin \bar{\varphi}_3^-). \quad (4.1)$$

Из уравнения (1.17) для v_1 в результате усреднения получаем

$$B_1 = \frac{1}{2\omega_0} (c_3^c \cos \bar{\varphi}_3^- - c_3^s \sin \bar{\varphi}_3^-)$$

для фаз $\varphi_k^-, k \neq 3; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \Psi$ и $B_1 = 0$ для $\chi_k, k = 1, 2, \dots$.

Интегрирование уравнений (1.17) для u_1 дает функции

$$u_1^1 = \frac{\bar{b}}{4\omega_0} \left(\sum_{m, m \neq 3} \frac{c_m^s \sin \bar{\varphi}_m^- - c_m^c \cos \bar{\varphi}_m^-}{2\omega_0 - m} - \sum_m \frac{c_m^s \sin \bar{\varphi}_m^+ + c_m^c \cos \bar{\varphi}_m^+}{2\omega_0 + m} + \alpha_1 \sin \bar{\Psi} \right), \\ u_1^2 = \frac{1}{2\omega_0} \left(\sum_{m, m \neq 3} \frac{c_m^c \sin \bar{\varphi}_m^- + c_m^s \cos \bar{\varphi}_m^-}{2\omega_0 - m} + \sum_m \frac{c_m^c \sin \bar{\varphi}_m^+ - c_m^s \cos \bar{\varphi}_m^+}{2\omega_0 + m} + \right. \\ \left. + 2 \sum_m \frac{c_m^c \sin \bar{\chi}_m - c_m^s \cos \bar{\chi}_m}{m} + \alpha_1 \cos \bar{\Psi} \right), \quad (4.2)$$

После интегрирования уравнений (1.17) для v_1 получаем $v_1 = u_1^2$ для фаз $\varphi_k^-, k \neq 3; \varphi_k^+, k = 1, 2, \dots; \Psi$ и $v_1 = 0$ для $\chi_k, k = 1, 2, \dots$.

Функции A_2 следуют из уравнений (1.17) для u_2

$$\begin{aligned}
 A_2^1 &= \frac{\bar{b}}{16\omega_0^2} \left\{ \left[3(c_1^s c_2^s - c_1^c c_2^c) + 6 \sum_m \frac{c_m^c c_{m+3}^c + c_m^s c_{m+3}^s}{m(m+3)} + \frac{4}{3} \alpha_1 \omega_0 c_3^s \right] \sin \bar{\varphi}_3^- + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-3(c_1^s c_2^c + c_1^c c_2^s) + 6 \sum_m \frac{c_m^c c_{m+3}^s - c_m^s c_{m+3}^c}{m(m+3)} - \frac{4}{3} \alpha_1 \omega_0 c_3^c \right] \cos \bar{\varphi}_3^- \right\}, \\
 A_2^2 &= -\frac{1}{8\omega_0^2} \left[\sum_{m, m \neq 3} \frac{(c_m^c)^2 + (c_m^s)^2}{2\omega_0 - m} + \sum_m \frac{(c_m^c)^2 + (c_m^s)^2}{2\omega_0 + m} + 2\alpha_1^2 \omega_0 \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{8\omega_0^2} \left\{ \left[3(c_1^c c_2^s + c_1^s c_2^c) + 6 \sum_m \frac{c_m^s c_{m+3}^c - c_m^c c_{m+3}^s}{m(m+3)} + \frac{4}{3} \alpha_1 \omega_0 c_3^c \right] \sin \bar{\varphi}_3^- + \right. \\
 &\quad \left. + \left[3(c_1^s c_2^s - c_1^c c_2^c) + 6 \sum_m \frac{c_m^c c_{m+3}^c + c_m^s c_{m+3}^s}{m(m+3)} + \frac{4}{3} \alpha_1 \omega_0 c_3^s \right] \cos \bar{\varphi}_3^- \right\}.
 \end{aligned}$$

Эти выражения, а также (4.1) позволяют записать систему (1.16) для $\bar{x} = (\bar{b}, \bar{\varphi}_3^-)$

$$\dot{\bar{b}} = 0.5(r \sin \bar{\varphi}_3^- + \beta \cos \bar{\varphi}_3^- - \alpha), \quad \dot{\bar{\varphi}}_3^- = s + r \cos \bar{\varphi}_3^- - \beta \sin \bar{\varphi}_3^-.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{p_3^c}{2\sqrt{p_0}} + \frac{3}{8p_0} \left[p_1^s p_2^s - p_1^c p_2^c + 2 \sum_m \frac{p_m^c p_{m+3}^c + p_m^s p_{m+3}^s}{m(m+2)} + \frac{4}{9} \alpha p_3^s \sqrt{p_0} \right], \\
 \beta &= \frac{p_3^s}{2\sqrt{p_0}} + \frac{3}{8p_0} \left[-p_1^s p_2^c - p_1^c p_2^s + 2 \sum_m \frac{p_m^c p_{m+3}^s - p_m^s p_{m+3}^c}{m(m+3)} - \frac{4}{9} \alpha p_3^c \sqrt{p_0} \right], \\
 s &= 2\sqrt{p_0} - 3 - \frac{1}{8p_0} \left[\sum_{m, m \neq 3} \frac{(p_m^c)^2 + (p_m^s)^2}{2\sqrt{p_0} - m} + \sum_m \frac{(p_m^c)^2 + (p_m^s)^2}{2\sqrt{p_0} + m} \right] - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{p_0}}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Как в п. 2 и п. 3, используя преобразование

$$P = \bar{b} \sin \frac{\bar{\varphi}_3^-}{2}, \quad R = \bar{b} \cos \frac{\bar{\varphi}_3^-}{2},$$

записываем уравнение осциллятора (2.14) с λ (2.15). Граница области резонанса определяется уравнением (2.17).

5. РЕЗОНАНС $p_0 \approx 0$

Согласно (1.20) в системе (1.21) имеем векторы

$$\begin{aligned}
 x &= (\varphi, \Omega), \quad X_1 = (X_1^1, X_1^2) = (\Omega, (S\ddot{S} - c_0 - \alpha_1 \dot{S})\varphi - (\dot{S} + \alpha_1)\Omega), \\
 X_2 &= (X_2^1, X_2^2) = (-S\Omega, S\dot{S}\Omega - c_0 S\varphi).
 \end{aligned}$$

Из уравнения (1.24) для u_1 находим A_1 усреднением правых частей по фазам быстрых колебаний

$$A_1^1 = \bar{\Omega}, \quad A_1^2 = - \left(c_0 + \sum_m \frac{(c_m^c)^2 + (c_m^s)^2}{2m^2} \right) \bar{\varphi} - \alpha_1 \bar{\Omega}. \tag{5.1}$$

Интегрирование уравнения (1.24) для u_1 с учетом этих выражений дает функции

$$\begin{aligned}
 & u_1^1 = 0, \quad u_1^2 = \\
 & = \left[\sum_{m, m_1, m \neq m_1} \frac{(c_m^s c_{m_1}^c - c_m^c c_{m_1}^s) \cos(m - m_1)t - (c_m^c c_{m_1}^c + c_m^s c_{m_1}^s) \sin(m - m_1)t}{2m^2(m - m_1)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{m, m_1} \frac{(c_m^s c_{m_1}^c + c_m^c c_{m_1}^s) \cos(m + m_1)t - (c_m^c c_{m_1}^c - c_m^s c_{m_1}^s) \sin(m + m_1)t}{2m^2(m + m_1)} - \right. \\
 & \quad \left. - \alpha_1 S \right] \bar{\varphi} - S \bar{\Omega}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Соблюдая точность второго приближения метода усреднения, из уравнения (1.24) для u_2 достаточно вычислить $A_2 = (A_2^1, A_2^2)$ усреднением правых частей этого уравнения по фазам быстрых колебаний. В результате получаем

$$\begin{aligned}
 & A_2^1 = 0, \\
 & A_2^2 = - \left[\sum_{m, m_1, m_1 < m} \frac{(c_m^c c_{m_1}^c + c_m^s c_{m_1}^s) c_{m-m_1}^c + (c_m^s c_{m_1}^c - c_m^c c_{m_1}^s) c_{m-m_1}^s}{4m^2(m - m_1)^2} + \right. \\
 & \quad + \sum_{m, m_1, m_1 > m} \frac{(c_m^c c_{m_1}^c + c_m^s c_{m_1}^s) c_{m_1-m}^c - (c_m^s c_{m_1}^c - c_m^c c_{m_1}^s) c_{m_1-m}^s}{4m^2(m - m_1)^2} + \\
 & \quad \left. + \sum_{m, m_1} \frac{(c_m^c c_{m_1}^c - c_m^s c_{m_1}^s) c_{m+m_1}^c + (c_m^s c_{m_1}^c + c_m^c c_{m_1}^s) c_{m+m_1}^s}{4m^2(m + m_1)^2} \right] \bar{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Эти выражения, а также (5.1) с учетом формулы $p_0 = \varepsilon^2 c_0$ позволяют записать систему уравнений (1.23) для $\bar{x} = (\bar{\varphi}, \bar{\Omega})$ во втором приближении метода усреднения

$$\dot{\bar{\varphi}} = \varepsilon \bar{\Omega}, \quad \dot{\bar{\Omega}} = \varepsilon A_1^2 + \varepsilon^2 A_2^2.$$

После исключения $\bar{\Omega}$ приходим к уравнению линейного осциллятора

$$\ddot{\bar{\varphi}} + \alpha \dot{\bar{\varphi}} + \frac{\lambda}{4} \bar{\varphi} = 0, \tag{5.3}$$

в котором

$$\lambda = 4p_0 + Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3. \tag{5.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 & Q_0 = 2 \sum \frac{(p_m^c)^2 + (p_m^s)^2}{m^2}, \\
 & Q_1 = \sum_{m, m_1, m_1 < m} \frac{(p_m^c p_{m_1}^c + p_m^s p_{m_1}^s) p_{m-m_1}^c + (p_m^s p_{m_1}^c - p_m^c p_{m_1}^s) p_{m-m_1}^s}{m^2(m - m_1)^2}, \\
 & Q_2 = \sum_{m, m_1, m_1 > m} \frac{(p_m^c p_{m_1}^c + p_m^s p_{m_1}^s) p_{m_1-m}^c + (p_m^c p_{m_1}^s - p_m^s p_{m_1}^c) p_{m_1-m}^s}{m^2(m - m_1)^2}, \\
 & Q_3 = \sum_{m, m_1} \frac{(p_m^c p_{m_1}^c - p_m^s p_{m_1}^s) p_{m+m_1}^c + (p_m^s p_{m_1}^c + p_m^c p_{m_1}^s) p_{m+m_1}^s}{m^2(m + m_1)^2}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из выражения для корней характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{D}}{2}, \quad D = \alpha^2 - \lambda \tag{5.6}$$

следует условие параметрического резонанса: $\lambda < 0$, (при этом $k_1 > 0$, $k_2 < 0$). Если $\lambda > \alpha^2$, решение уравнения (5.3) описывает затухающие колебания ($k_{1,2}$ — комплексные числа). При

$0 < \lambda < \alpha^2$ колебания отсутствуют, и в общем решении имеются две убывающие экспоненты ($k_{1,2} < 0$).

6. РЕШЕНИЕ $z(t)$

Во втором приближении метода усреднения, используя разложения (1.15), решение $z(t)$ уравнения (1.1) находим по формуле

$$z = b \cos \psi = (\bar{b} + \varepsilon u_1^1 + \dots) \cos(\bar{\psi} + 0.5v_1 + \dots) = (\bar{b} + \varepsilon u_1^1 + \dots) \cos(\bar{\psi} + 0.5u_1^2 + \dots) = \bar{b} \cos \bar{\psi} + \varepsilon(u_1^1 \cos \bar{\psi} - 0.5\bar{b}u_1^2 \sin \bar{\psi}) + \dots$$

Функции u_1^1, u_1^2 для резонансов $p_0 \approx 1/4, 1, 9/4$ определяются формулами (2.7), (3.2), (4.2) соответственно. Учитывая равенство

$$\bar{\psi} = \frac{\bar{\varphi}_k^- + kt}{2}, \quad k = 1, 2, 3,$$

которое следует из первой формулы в (1.10), в результате тригонометрических преобразований получаем формулы для $z(t)$ при указанных резонансах. Окончательно запишем $z(t)$ в виде одного выражения

$$z(t) = R \cos\left(\frac{kt}{2}\right) - P \sin\left(\frac{kt}{2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{p_0}} \left\{ \frac{(p_k^s P - p_k^c R) \cos(0.5kt) - (p_k^s R + p_k^c P) \sin(0.5kt)}{k} + \sum_{m, m \neq k} \frac{2\sqrt{p_0} [(p_m^s P - p_m^c R) \cos(0.5k - m)t + (p_m^s R + p_m^c P) \sin(0.5k - m)t]}{m(2\sqrt{p_0} - m)} + \sum_m \frac{2\sqrt{p_0} [(p_m^s P + p_m^c R) \cos(0.5k + m)t + (p_m^s R - p_m^c P) \sin(0.5k + m)t]}{m(2\sqrt{p_0} + m)} + \alpha \left[P \cos\left(\frac{kt}{2}\right) + R \sin\left(\frac{kt}{2}\right) \right] \right\}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

Здесь используются медленно меняющиеся функции $P(t), R(t)$ вместо $\bar{b}(t), \bar{\varphi}_k^-(t)$. Как было показано (см. п. п. 2–4), они связаны формулами

$$P = \bar{b} \sin \frac{\bar{\varphi}_k^-}{2}, \quad R = \bar{b} \cos \frac{\bar{\varphi}_k^-}{2}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.2)$$

Функция $P(t)$ следует из уравнения (2.14). В случае $\lambda < 0$ (параметрический резонанс) имеем общее решение

$$P(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (6.3)$$

с $k_{1,2}$ (2.16). Если использовать начальные (при $t = 0$) значения $P(0)$ и $R(0)$, с помощью формулы (2.18) получаем

$$C_1 = \frac{(r+s)R(0) + (\sqrt{D} - \beta)P(0)}{2\sqrt{D}}, \quad C_2 = \frac{(\sqrt{D} + \beta)P(0) - (r+s)R(0)}{2\sqrt{D}}, \quad (6.4)$$

где $D = \alpha^2 - \lambda > 0$. Функцию $R(t)$ (2.18) вычисляем с использованием (6.3)

$$R(t) = \frac{1}{r+s} \left[C_1 (\sqrt{D} + \beta) e^{k_1 t} - C_2 (\sqrt{D} - \beta) e^{k_2 t} \right]. \quad (6.5)$$

Если $\lambda = 0$ (граница области параметрического резонанса), имеем $k_1 = 0, k_2 = -\alpha, \sqrt{D} = \alpha$. Из формул (6.3)–(6.5) следует

$$\begin{aligned} P(t) &= C_1 + C_2 e^{-\alpha t}, & R(t) &= \frac{1}{r+s} [C_1(\alpha + \beta) - C_2(\alpha - \beta)e^{-\alpha t}], \\ C_1 &= \frac{(r+s)R(0) + (\alpha - \beta)P(0)}{2\alpha}, & C_2 &= \frac{(\alpha + \beta)P(0) - (r+s)R(0)}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Если $0 < \lambda < \alpha^2$ (область экспоненциально затухающего решения уравнения (2.14), поскольку $k_{1,2} < 0$), справедливы формулы (6.3)–(6.5).

В случае $\lambda = \alpha^2$ (граница областей экспоненциально затухающего решения без колебаний и затухающих колебаний) имеем кратный корень (2.16) $k_{1,2} = -\alpha/2$ и решение системы (2.13)

$$\begin{aligned} P(t) &= (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\alpha t}{2}}, & R(t) &= \frac{1}{r+s} (\beta C_1 + 2C_2 + \beta C_2 t) e^{-\frac{\alpha t}{2}}, \\ C_1 &= P(0), & C_2 &= \frac{(r+s)R(0) - \beta P(0)}{2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Наконец, когда $\lambda > \alpha^2$, получаем корни характеристического уравнения для уравнения (2.14)

$$k_{1,2} = 0.5\alpha \pm i\nu, \quad \nu = 0.5\sqrt{\lambda - \alpha^2} \quad (6.8)$$

и функции

$$\begin{aligned} P(t) &= [C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t)] e^{-\frac{\alpha t}{2}}, & R(t) &= \frac{1}{r+s} [(\beta C_1 + 2\nu C_2) \cos(\nu t) + \\ &+ (-2\nu C_1 + \beta C_2) \sin(\nu t)] e^{-\frac{\alpha t}{2}}, & C_1 &= P(0), & C_2 &= \frac{(r+s)R(0) - \beta P(0)}{2\nu}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

В полученных формулах параметры r, s, β для резонансов $p_0 \approx 1/4, 1, 9/4$ определяются выражениями (2.12), (3.5), (4.3) соответственно, параметр λ — формулой (2.15).

Начальные значения $P(0), R(0)$ следуют из (6.2) при $t = 0$

$$P(0) = \bar{b}(0) \sin \frac{\bar{\varphi}_k^-(0)}{2}, \quad R(0) = \bar{b}(0) \cos \frac{\bar{\varphi}_k^-(0)}{2}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.10)$$

В свою очередь, начальные значения средних $\bar{b}(0), \bar{\varphi}_k^-(0)$ во втором приближении метода усреднения вычисляются по формуле [1]

$$\bar{x}(0) = x_0 - \varepsilon u_1(x_0, y_0),$$

где имеем векторы $\bar{x}(0) = (\bar{b}(0), \bar{\varphi}_k^-(0), k = 1, 2, 3)$, $x_0 = (b_0, \varphi_k^-(0), k = 1, 2, 3) = (b_0, 2\psi_0, k = 1, 2, 3)$. Значение $\varphi_k^-(0) = 2\psi_0$ получено по первой формуле из (1.10). Вектор $u_1 = (u_1^1, u_1^2)$ имеет составляющие, которые описываются формулами (2.7), (3.2), (4.2) для резонансов $p_0 \approx 1/4, 1, 9/4$ соответственно. При этом вектор y_0 согласно (1.10) состоит из начальных значений фаз: $\varphi_m^-(0) = \varphi_m^+(0) = 2\psi_0, \chi_m(0) = 0, \Psi(0) = 2\psi_0$. Таким образом, выражения для $\bar{b}(0), \bar{\varphi}_k^-(0)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{b}(0) &= b_0 \left[1 - \frac{1}{4\sqrt{p_0}} \left(\sum_{m, m \neq k} \frac{p_m^s \sin 2\psi_0 - p_m^c \cos 2\psi_0}{2\sqrt{p_0} - m} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_m \frac{p_m^s \sin 2\psi_0 + p_m^c \cos 2\psi_0}{2\sqrt{p_0} + m} + \alpha \sin 2\psi_0 \right) \right], \\ \bar{\varphi}_k^-(0) &= 2\psi_0 - \frac{1}{2\sqrt{p_0}} \left(\sum_{m, m \neq k} \frac{p_m^c \sin 2\psi_0 + p_m^s \cos 2\psi_0}{2\sqrt{p_0} - m} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_m \frac{p_m^c \sin 2\psi_0 - p_m^s \cos 2\psi_0}{2\sqrt{p_0} + m} + \alpha \cos 2\psi_0 \right), \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь начальные значения b_0, ψ_0 определяются формулами (1.13).

При резонансе $p_0 \approx 0$ решение $z(t)$ уравнения (1.1) определяется первой формулой из (1.18), в которой согласно (1.22)

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varepsilon u_1^1 + \dots$$

Учитывая равенство $u_1^1 = 0$ (5.2) и формулу для S (см. п. 1), во втором приближении метода усреднения имеем

$$z(t) = \left[1 + \sum_m \frac{p_m^c \cos(mt) + p_m^s \sin(mt)}{m^2} \right] \bar{\varphi}(t). \quad (6.12)$$

Здесь функция $\bar{\varphi}(t)$ определяется интегрированием уравнения осциллятора (5.3) с параметром λ (5.4).

Если $\lambda < 0$, имеется корень $k_1 > 0$ (5.6), и получаем

$$\bar{\varphi}(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}, \quad (6.13)$$

а также

$$\bar{\Omega}(t) = \frac{1}{\varepsilon} \dot{\bar{\varphi}} = \frac{k_1}{\varepsilon} C_1 e^{k_1 t} + \frac{k_2}{\varepsilon} C_2 e^{k_2 t}. \quad (6.14)$$

В качестве начальных возьмем произвольные значения $\bar{\varphi}(0), \bar{\Omega}(0)$, при которых

$$C_1 = -\frac{k_2}{\sqrt{D}} \bar{\varphi}(0) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \bar{\Omega}(0), \quad C_2 = \frac{k_1}{\sqrt{D}} \bar{\varphi}(0) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}} \bar{\Omega}(0), \quad (6.15)$$

где $D > 0$ определяется выражением из (5.6).

При $\lambda = 0$ имеем $k_1 = 0, k_2 = -\alpha$ и

$$\bar{\varphi}(t) = C_1 + C_2 e^{-\alpha t}, \quad \bar{\Omega}(t) = -\frac{\alpha}{\varepsilon} C_2 e^{-\alpha t}, \quad C_1 = \bar{\varphi}(0) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \bar{\Omega}(0), \quad C_2 = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \bar{\Omega}(0).$$

Если $0 < \lambda < \alpha^2$, справедливы формулы (6.13)–(6.15).

При $\lambda = \alpha^2$ получаем

$$\bar{\varphi}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-0.5\alpha t}, \quad \bar{\Omega}(t) = (C_2 - 0.5\alpha C_1 - 0.5\alpha C_2 t) \frac{e^{-0.5\alpha t}}{\varepsilon}, \\ C_1 = \bar{\varphi}(0), \quad C_2 = \varepsilon \bar{\Omega}(0) + 0.5\alpha \bar{\varphi}(0).$$

Наконец, в случае $\lambda > \alpha^2$ имеем корни характеристического уравнения $k_{1,2} = -0.5\alpha \pm i\nu$, где $\nu = 0.5\sqrt{\lambda - \alpha^2}$ и решение задачи Коши

$$\bar{\varphi}(t) = (C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t) e^{-0.5\alpha t}, \quad \bar{\Omega}(t) = [(-0.5\alpha C_1 + \nu C_2) \cos \nu t - \\ -(\nu C_1 + 0.5\alpha C_2) \sin \nu t] \frac{e^{-0.5\alpha t}}{\varepsilon}, \quad C_1 = \bar{\varphi}(0), \quad C_2 = \frac{\alpha}{2\nu} \bar{\varphi}(0) + \frac{\varepsilon}{\nu} \bar{\Omega}(0).$$

Выразим начальные значения $\bar{\varphi}(0), \bar{\Omega}(0)$ через начальные значения (1.2) для уравнения (1.1). Для этого запишем систему (1.18) при $t = 0$

$$z_0 = [1 + \varepsilon S(0)] \varphi(0), \quad \dot{z}_0 = \varepsilon \Omega(0) + \varepsilon \dot{S}(0) \varphi(0). \quad (6.16)$$

Здесь в первом выражении согласно (1.22) имеем $\varphi(0) = \bar{\varphi}(0)$, поскольку $u_1^1 = 0$ (см. (5.2)). Значит,

$$\bar{\varphi}(0) = \varphi(0) = \frac{z_0}{1 + \varepsilon S(0)}. \quad (6.17)$$

Во втором выражении (6.16) согласно (1.22)

$$\Omega(0) = \bar{\Omega}(0) + \varepsilon u_1^2(0, \bar{\varphi}(0), \bar{\Omega}(0)) + \dots$$

Используя формулу для u_1^2 (5.2) при $t = 0$, а также формулу (6.17), $S(0)$ и $\dot{S}(0)$ (см. п. 1), с соблюдением точности второго приближения метода усреднения найдем $\bar{\Omega}(0)$ из второго выражения (6.16)

$$\varepsilon \bar{\Omega}(0) = \left(1 + \sum_m \frac{p_m^c}{m^2} \right) \dot{z}_0 - \left[\sum_m \frac{p_m^s}{m} + \sum_{m, m_1, m \neq m_1} \frac{p_m^s p_{m_1}^c - p_m^c p_{m_1}^s}{2m^2(m - m_1)} + \sum_{m, m_1} \frac{p_m^s p_{m_1}^c + p_m^c p_{m_1}^s}{2m^2(m + m_1)} - \alpha \sum_m \frac{p_m^c}{m^2} \right] z_0.$$

7. ПРИМЕРЫ

1. Возьмем в уравнении (1.1) функцию $p(t)$ в виде периодической последовательности импульсов, показанной на рис. 1.

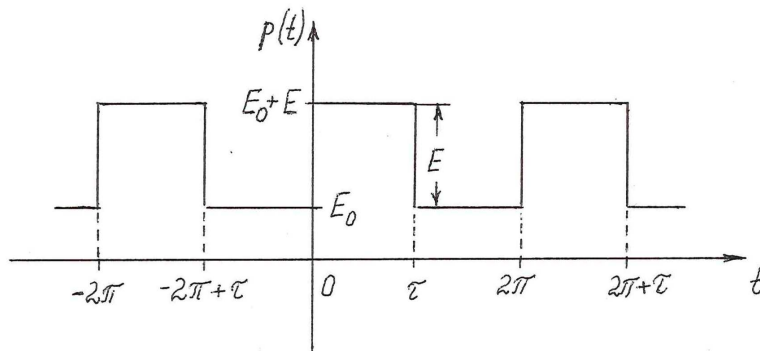


Рис. 1.

Для этой функции получаем ряд Фурье (1.3) с коэффициентами

$$p_0 = E_0 + \frac{E\tau}{2\pi}, \quad p_m^c = \frac{E}{\pi} \frac{\sin(m\tau)}{m}, \quad p_m^s = \frac{E}{\pi} \frac{1 - \cos(m\tau)}{m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Далее будем считать $\tau = \pi$, что дает

$$p_0 = E_0 + \frac{E}{2}, \quad p_m^c = 0, \quad p_m^s = \frac{E}{\pi} \frac{1 - \cos(m\pi)}{m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

При резонансе $p_0 \approx 1/4$ с учетом (7.1) по формулам (2.12) получаем

$$r = \frac{\alpha E}{\pi \sqrt{p_0}}, \quad \beta = \frac{E}{\pi \sqrt{p_0}}, \quad s = 2\sqrt{p_0} - 1 - \frac{E^2}{2\pi^2 p_0} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{p_0} + 1} + 4\sqrt{p_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[4p_0 - (2k+1)^2](2k+1)^2} \right\} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{p_0}}. \quad (7.2)$$

В первом приближении метода усреднения имеем

$$r = 0, \quad \beta = \frac{E}{\pi \sqrt{p_0}}, \quad s = 2\sqrt{p_0} - 1. \quad (7.3)$$

Граница первой области резонанса на плоскости (E_0, E) следует из уравнения (2.17), где λ определяется формулой (2.15). На рис. 2 эта граница построена при $\alpha = 0,2$ во втором приближении метода усреднения (кривая 2) и в первом приближении (кривая 3) с использованием

выражений (7.2) и (7.3) соответственно. Кривая 1 получена численным решением уравнения (1.1) с $p(t)$ (1.3), где коэффициенты определяются как (7.1). Граница области затухающей амплитуды $b(t)$ в (1.8) без колебаний и с колебаниями, как указывалось в п. 2, определяется из уравнения $\lambda = \alpha^2$. На рис. 2 — это пунктирная кривая 4. Узкая область затухающей амплитуды без колебаний находится между кривыми 2 и 4.

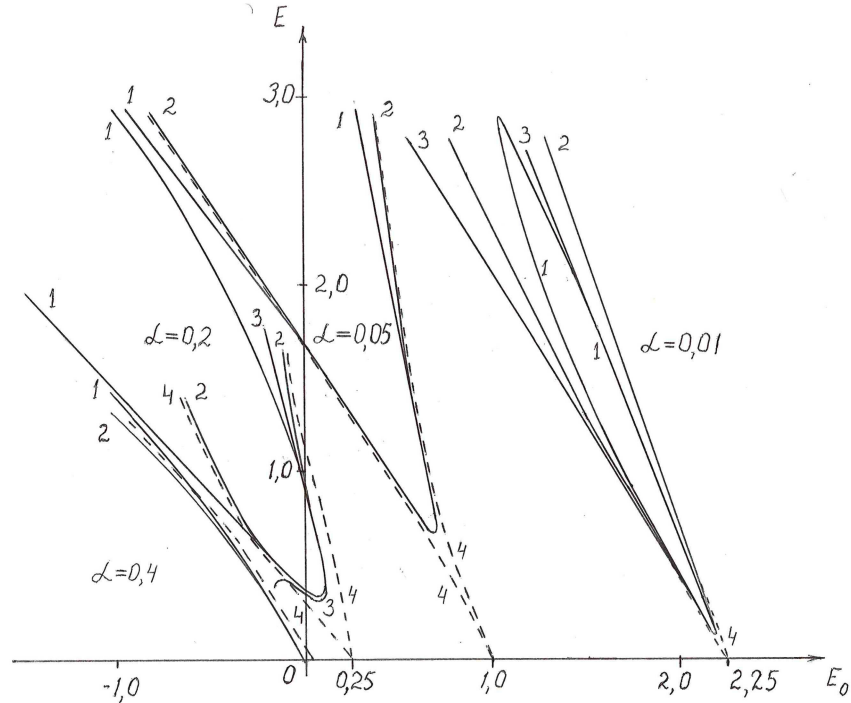


Рис. 2.

При резонансе $p_0 \approx 1$ по формулам (3.5) вычисляем

$$r = \frac{E^2}{\pi^2 p_0} \left[1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} \right], \quad \beta = 0, \quad (7.4)$$

$$s = 2\sqrt{p_0} - 2 - \frac{2E^2}{\pi^2 \sqrt{p_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[4p_0 - (2k+1)^2](2k+1)^2} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{p_0}}.$$

В первом приближении метода усреднения имеем

$$r = 0, \quad \beta = 0, \quad s = 2\sqrt{p_0} - 2,$$

и резонанс из уравнения $\lambda = s^2 + \alpha^2 = 0$ (2.15) не обнаруживается.

На рис. 2 показана граница второй области параметрического резонанса ($p_0 \approx 1$), построенная с использованием формул (7.4) (кривая 2). И здесь кривая 1 — граница области резонанса, полученная численным решением уравнения (1.1). Пунктирная линия 4 — граница областей экспоненциально затухающей амплитуды $b(t)$ без колебаний и с колебаниями.

В случае резонанса $p_0 \approx 9/4$ формулы (4.3) с учетом (7.1) дают

$$r = \frac{\alpha E}{9\pi\sqrt{p_0}}, \quad \beta = \frac{E}{3\pi\sqrt{p_0}}, \quad s = 2\sqrt{p_0} - 3 - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{p_0}} - \frac{E^2}{2\pi^2 p_0} \left\{ \frac{1}{9(2\sqrt{p_0} + 3)} + \frac{4\sqrt{p_0}}{4p_0 - 1} + 4\sqrt{p_0} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{[4p_0 - (2m+1)^2](2m+1)^2} \right\}. \quad (7.5)$$

В первом приближении метода усреднения

$$r = 0, \quad \beta = \frac{E}{3\pi\sqrt{p_0}}, \quad s = 2\sqrt{p_0} - 3. \quad (7.6)$$

На рис. 2 кривые 2,3 построены при $\alpha = 0,01$ из уравнения (2.17) с использованием формул (7.5),(7.6) соответственно. Кривая 1 - результат численного решения уравнения Хилла (1.1). И здесь кривая 4 - граница областей экспоненциально затухающей амплитуды $b(t)$ без колебаний и с колебаниями.

При $p_0 \approx 0$, учитывая формулы (7.1), получаем значения $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ (5.5) и выражение λ (5.4)

$$\lambda = 4 \left(E_0 + \frac{E}{2} \right) + \frac{8E^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots \right) = 4 \left(E_0 + \frac{E}{2} \right) + \frac{8E^2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^4}{96}.$$

Из условия $\lambda = 0$ (2.17) следует уравнение

$$E_0 = -\frac{E}{2} - \frac{\pi^2}{48}E^2,$$

описывающее границу нулевой области параметрического резонанса (кривая 2 на рис. 2). Кривая 1 — та же граница, полученная численным решением уравнения (1.1). Пунктирная кривая 4 построена при $\alpha = 0,4$ из уравнения $\lambda = \alpha^2$. Она является границей областей экспоненциально затухающей амплитуды $b(t)$ без колебаний и с колебаниями.

Заметим, что, поскольку, как указывалось, все члены второго приближения метода усреднения $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, граница нулевой области резонанса в данном примере определяется первым приближением. Во втором приближении она не уточняется.

2. Во втором примере в уравнении (1.1) возьмем переменный коэффициент в виде

$$p(t) = A \frac{1 + g \sin t - g^2}{1 - 2g \cos t + g^2} = A \frac{1 - g^2}{1 - 2g \cos t + g^2} + A \frac{g \sin t}{1 - 2g \cos t + g^2} = p_1(t) + p_2(t). \quad (7.7)$$

Здесь $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — четная и нечетная составляющие функции $p(t)$ соответственно. Далее в вычислениях будем считать $g \geq 0$. При $g < 0$ замена $t = t_1 + \pi$ в (1.1) восстанавливает знаки коэффициентов при $\sin t$ и $\cos t$ в (7.7). На рис. 3 показан вид $p(t)$ при $A = 1$ и $g = 0,3; 0,5; 0,7$ (кривые 1,2,3 соответственно).

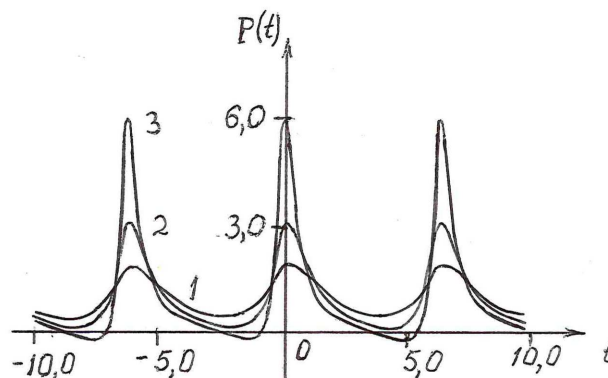


Рис. 3.

Ряды Фурье $p_1(t)$ и $p_2(t)$ имеются в сборнике задач [10]. Коэффициенты p_m^c, p_m^s можно вычислить также с использованием интегралов в [9]. Коэффициенты равны

$$p_0 = A, \quad p_m^c = 2Ag^m, \quad p_m^s = Ag^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

При резонансе $p_0 \approx 1/4$ с использованием ряда [9]

$$x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = -\ln(1-x), \quad -1 < x < 1 \quad (7.9)$$

и выражений (7.8) по первой формуле из (2.12) вычислим r

$$r = \sqrt{A}g + \frac{5Ag}{4} \left[1 + \frac{(1-g^2)\ln(1-g^2)}{g^2} \right] + \frac{\sqrt{A}g\alpha}{2}. \quad (7.10)$$

По второй формуле из (2.12) получаем

$$\beta = \frac{\sqrt{A}g}{2} - \sqrt{A}g\alpha. \quad (7.11)$$

Выражение s из (2.12) приводится к виду

$$s = 2\sqrt{A} - 1 - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{A}} - \frac{5A}{8} \left(\frac{g^2}{2\sqrt{A} + 1} + 4\sqrt{A} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{g^{2m}}{4A - m^2} \right). \quad (7.12)$$

Если ограничиться первым приближением метода усреднения, то

$$r = \sqrt{A}g, \quad \beta = \frac{\sqrt{A}g}{2}, \quad s = 2\sqrt{A} - 1. \quad (7.13)$$

Остальные слагаемые в (7.10)–(7.12) появились во втором приближении. Поскольку $p_0 = A \approx 1/4$, в членах второго приближения будем считать $A = 1/4$. В этом случае с помощью разложения (7.9) вычисляется сумма по m в (7.12), и получаем

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A}g + \frac{5g}{16} \left[1 + \frac{(1-g^2)\ln(1-g^2)}{g^2} \right] + \frac{g\alpha}{4}, & \beta &= \frac{\sqrt{A}g}{2} - \frac{g\alpha}{2}, \\ s &= 2\sqrt{A} - 1 + \frac{5}{32} \left[1 + \frac{(1-g^4)\ln(1-g^2)}{g^2} \right] - \frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

На рис. 4 на плоскости (A, g) при $\alpha = 0,1$ показана граница первой области параметрического резонанса, которая следует из уравнения (2.17) с λ (2.15). Здесь кривые 2,3 построены с использованием формул, полученных во втором приближении метода усреднения (7.14) и в первом приближении — (7.13) соответственно. Граница 1 — результат численного интегрирования уравнения (1.1). Пунктирная кривая 4 следует из уравнения $\lambda = \alpha^2$ и является границей областей экспоненциально затухающей амплитуды $b(t)$ без колебаний и с колебаниями.

При резонансе $p_0 \approx 1$ с использованием формул (7.8) и ряда (7.9) вычислим r, β, s из (3.5)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A}g^2 + \frac{A}{4} \left[5 - \frac{g^2}{2} + \frac{5(1-g^4)\ln(1-g^2)}{g^2} \right] + \frac{\sqrt{A}g^2\alpha}{4}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{A}g^2}{2} - Ag^2 - \frac{\sqrt{A}g^2\alpha}{2}, \\ s &= 2\sqrt{A} - 2 - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{A}} - \frac{5A}{8} \left(\frac{g^4}{2\sqrt{A} + 2} + 4\sqrt{A} \sum_{m, m \neq 2} \frac{g^{2m}}{4A - m^2} \right). \end{aligned} \quad (7.15)$$

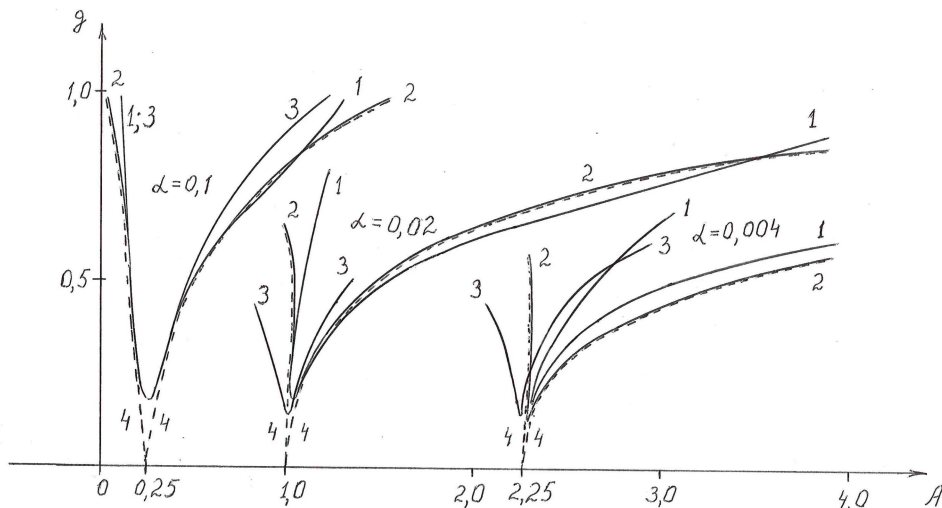


Рис. 4.

В первом приближении метода усреднения имеем

$$r = \sqrt{A}g^2, \quad \beta = \frac{\sqrt{A}g^2}{2}, \quad s = 2\sqrt{A} - 2. \tag{7.16}$$

Если в (7.15) в членах второго приближения положить $A = 1$, получаем

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A}g^2 + \frac{1}{4} \left[5 - \frac{g^2}{2} + \frac{5(1-g^4)\ln(1-g^2)}{g^2} \right] + \frac{g^2\alpha}{4}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{A}g^2}{2} - g^2 - \frac{g^2\alpha}{2}, \\ s &= 2\sqrt{A} - 2 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{5}{8} \left[\frac{1}{g^2} + \frac{1}{2} - g^2 + \frac{(1-g^8)\ln(1-g^2)}{g^4} \right]. \end{aligned} \tag{7.17}$$

На рис. 4 показана граница второй области параметрического резонанса при $\alpha = 0,02$, которая следует из уравнения $\lambda = 0$ (2.17), где λ определяется выражением (2.15). Кривые 2,3 построены с использованием формул (7.17),(7.16) соответственно. Кривая 1 получена численным решением уравнения (1.1). И здесь пунктирная кривая 4 следует из уравнения $\lambda = \alpha^2$. Она является границей областей затухающей амплитуды $b(t)$ без колебаний и с колебаниями.

В случае третьей области параметрического резонанса $p_0 \approx 9/4$ с помощью ряда (7.9) вычисляем выражения (4.3)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A}g^3 + \frac{A}{4} \left[\frac{5}{g} + \frac{5g}{2} - \frac{17g^3}{6} + \frac{5(1-g^6)\ln(1-g^2)}{g^3} \right] + \frac{\sqrt{A}g^3\alpha}{6}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{A}g^3}{2} - \frac{3Ag^3}{2} - \frac{\sqrt{A}g^3\alpha}{3}, \\ s &= 2\sqrt{A} - 3 - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{A}} - \frac{5A}{8} \left(\frac{g^6}{2\sqrt{A}+3} + 4\sqrt{A} \sum_{m,m \neq 3} \frac{g^{2m}}{4A-m^2} \right). \end{aligned} \tag{7.18}$$

В первом приближении метода усреднения

$$r = \sqrt{A}g^3, \quad \beta = \frac{\sqrt{A}g^3}{3}, \quad s = 2\sqrt{A} - 3. \tag{7.19}$$

Если в членах второго приближения выражений (7.18) положить $A = 9/4$, получаем

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A} g^3 + \frac{9}{16} \left[\frac{5}{g} + \frac{5g}{2} - \frac{17g^3}{6} + \frac{5(1-g^6) \ln(1-g^2)}{g^3} \right] + \frac{g^3 \alpha}{4}, \\ \beta &= \frac{\sqrt{A} g^3}{2} - \frac{27g^3}{8} - \frac{g^3 \alpha}{2}, \\ s &= 2\sqrt{A} - 3 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{45}{32} \left[\frac{1}{g^4} + \frac{1}{2g^2} + \frac{1}{3} - \frac{g^2}{2} - g^4 + \frac{(1-g^{12}) \ln(1-g^2)}{g^6} \right]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Кривые 1,2,3 на рис. 4 являются границей третьей области резонанса при $\alpha = 0,004$. Линия 1 построена численным решением уравнения (1.1). Линии 2,3 следуют из уравнения $\lambda = 0$ (2.17) с использованием формул (7.20), (7.19) соответственно. Кривая 4 (пунктир) — граница областей затухающей амплитуды $b(t)$ без колебаний и с колебаниями.

Наконец, остановимся на резонансе $p_0 \approx 0$ (см. п. 5). Используя коэффициенты (7.8) ряда Фурье, вычислим функции Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , составляющие параметр λ (5.4). В результате преобразований получаем

$$Q_0 = 10A^2 G_0(g), \quad Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10A^3 G_1(g),$$

где

$$G_0(g) = \sum_m \frac{g^{2m}}{m^2}, \quad G_1(g) = \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m g^{2m}.$$

Коэффициенты α_m вычисляются по формуле

$$\alpha_m = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{2}{k^2 m^2} + \frac{1}{k^2 (m-k)^2} \right]. \quad (7.21)$$

Выражение λ (5.4) принимает вид

$$\lambda = 2A(5G_1 A^2 + 5G_0 A + 2), \quad (7.22)$$

где квадратный трёхчлен имеет корни

$$A_{1,2} = \frac{-5G_0 \pm 2\sqrt{10(5G_0^2/8 - G_1)}}{10G_1}.$$

Ряд

$$G_0^2 = \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m g^{2m}$$

имеет коэффициенты

$$\beta_m = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2 (m-k)^2}.$$

Определим знак разности

$$\frac{5}{8} G_0^2 - G_1 = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{5}{8} \beta_m - \alpha_m \right) g^{2m} = - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{3}{8k^2 (m-k)^2} + \frac{2}{k^2 m^2} \right] g^{2m} < 0,$$

откуда следует, что квадратный трёхчлен в (7.22) принимает только положительные значения, и условие резонанса $\lambda < 0$ выполняется при всех $A < 0$ и $g < 1$ на рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курин, А. Ф. Задача Коши для уравнения Маттье при параметрическом резонансе / А. Ф. Курин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48, № 4. — С. 633–650.
2. Курин, А. Ф. Задача Коши для уравнения Маттье вдали от параметрического резонанса / А. Ф. Курин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1419–1433.
3. Курин, А. Ф. Спектральный критерий устойчивости и задача Коши для уравнения Хилла при параметрическом резонансе / А. Ф. Курин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 3. — С. 498–511.
4. Беломытцева, Е. Г. Задача Коши для уравнения Маттье с затуханием при параметрическом резонансе / Е. Г. Беломытцева, А. Ф. Курин, Е. Б. Туленко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 105–125.
5. Курин, А. Ф. Фазовая группировка осцилляторов при параметрическом резонансе / А. Ф. Курин // Ж. техн. физ. — 2008. — Т. 78, № 10. — С. 1–12.
6. Гребеников, Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е. А. Гребеников. — М. : Наука, 1986.
7. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. — М. : Наука, 1981.
8. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974.
9. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. — М. : Наука, 1977.
10. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1990.

REFERENCES

1. Kurin A.F. The Cauchy problem for the Mathieu equation at the parametric resonance. [Kurin A.F. Zadacha Koshi dlya uravneniya Mat'e pri parametricheskom rezonanse]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 4, pp. 633–650.
2. Kurin A.F. The Cauchy problem for the Mathieu equation away parametric resonance. [Kurin A.F. Zadacha Koshi dlya uravneniya Mat'e vdali ot parametricheskogo rezonansa]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 8, pp. 1419–1433.
3. Kurin A.F. Spectral stability criterion and the Cauchy problem for the Hill equation at parametric resonance. [Kurin A.F. Spektral'nyy kriteriyj ustojchivosti i zadacha Koshi dlya uravneniya Xilla pri parametricheskom rezonanse]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 3, pp. 498–511.
4. Belomytseva E.G., Kurin A.F., Tulenko E.B. The Cauchy problem for the Mathieu equation with damping at parametric resonance. [Belomytseva E.G., Kurin A.F., Tulenko E.B. Zadacha Koshi dlya uravneniya Mat'e s zatuxaniem pri parametricheskom rezonanse]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 105–125.
5. Kurin A.F. Phase Bunching of Oscillators in parametric resonance. [Kurin A.F. Fazovaya gruppировка oscillyatorov pri parametricheskom rezonanse]. *Zhurnal texnicheskoyj fiziki — Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 78, no. 10, pp. 1–12.
6. Grebenikov E.A. Averaging method in applied problems. [Grebenikov E.A. Metod usredneniya v prikladnyx zadachax]. Moscow, 1986.

7. Moiseev N.N. Asymptotic methods of nonlinear mechanics. [Moiseev N.N. Asimptoticheskie metody nelineynoyj mehaniki]. Moscow, 1981.

8. Bogolyubov N.N., Mitropolskii Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. [Bogolyubov N.N., Mitropol'skiyj Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineynyx kolebaniyj]. Moscow, 1974.

9. Dwight H.B. Tables of integrals and other mathematical data. [Dvayjt G.B. Tablicy integralov i drugie matematicheskie formuly]. Moscow, 1977. 10. Demidovich B.P. Problems in mathematical analysis. [Demidovich B.P. Sbornik zadach i uprazhneniyj po matematicheskomu analizu]. Moscow, 1990.

Беломытцева Е. Г., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия

E-mail: bell-lenochk@mail.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Belomytseva E. G., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: bell-lenochk@mail.ru

Tel.: +7(473)220-87-48

Курин А. Ф., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия

E-mail: afkurin@mail.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Kurin A. F., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: afkurin@mail.ru

Tel.: +7(473)220-87-48

Туленко Е. Б., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия

E-mail: tulenko@mail.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Tulenko E. B., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: tulenko@mail.ru

Tel.: +7(473)220-87-48