УДК 517.956

# О НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

**А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, Ф. О. Найдюк, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко, И. Ф. Леженина, О. К. Плетнева**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 30.01.2017 г.

**Аннотация**. В работе устанавливаются коэрцитивные априорные оценки решений начально–краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка. Рассматривается случай, когда коэффициенты уравнения являются функциями от пространственной переменной $y$, при этом вырождение происходит также по этой переменной. В работе содержатся также теоремы о существовании и единственности решений начально–краевой задачи для параболического уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами, вырождающегося по пространственной переменной.

**Ключевые слова**: вырождающееся параболическое уравнение, начально–краевая задача, априорная оценка, существование и единственность решений.

# ABOUT SOME INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR DEGRADING PARABOLIC EQUATIONS

**A. D. Baev, R. A. Kovalevsky, Ph. O. Naydyuk, A. A. Babaytsev, V. D. Kharchenko, I. F. Lezhenina, O. K. Pletneva**

**Abstract**. The paper establishes coercive a priori estimates of solutions to the initial boundary value problem for a degenerate parabolic high-order equation. We consider the case when the coefficients of the equation are functions of a spatial variable , and degeneration also occurs in this variable. The paper also contains theorems on the existence and uniqueness of solutions to the initial – boundary value problem for a high-order parabolic equation with variable coefficients degenerating over a spatial variable.

**Keywords**: degenerate parabolic equation, initial-boundary value problem, a priori estimation, existence and uniqueness of solutions.

Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок.

Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

© Баев А. Д., Ковалевский Р. А., Найдюк Ф. О., Бабайцев А. А., Харченко В. Д., Леженина И. Ф., Плетнева О. К., 2019

неоднородной анизотропной пористой среде, процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала.

Параболические задачи с вырождением по пространственной переменной возникают в связи с исследованием ряда марковских процессов. Библиография этих работ содержится, например, в [1]. Укажем также работы Брезиса, Розенкранца, Зингера [2], В. Г. Булавина, В. П. Глушко [3]. Начально–краевая задача для вырождающегося параболического уравнения с постоянными по $y$ коэффициентами была исследована В. П. Богатовой, В. П. Глушко [4].

Работа посвящена доказательству априорных оценок решений и теорем о существовании и единственности решений начально–краевых задач для параболических уравнений с вырождением по пространственной переменной, коэффициенты которых зависят от $y$.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование $F_\alpha$, введенное в [5]. Это преобразование используется при исследовании граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений (см. [8]–[10]).

Рассмотрим функцию $\alpha(y)$, $y \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(\mathrm{y}) > 0$ при $y > 0$, $\alpha(\mathrm{y}) = \mathrm{const}$ для $y \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(y)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(y) \exp(i\eta \int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dy}{\sqrt{\alpha(y)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(y) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит $R^1_+$. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau$, $\eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(y)}u(y)\Big|_{y=\varphi^{-1}(\tau)}$, $y = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(y) = \int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования $F_\alpha$ справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\, \|u\|_{L_2(R^1_+)}\,. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование $F_\alpha$ на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования $F_\alpha$ сохраним старое обозначение. Обозначим через $F_\alpha^{-1}$ обратное к $F_\alpha$ преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](y) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(y)}.$$

Можно показать, что для функции $u(y) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D_{\alpha,y}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,...,\text{ где } D_{\alpha,y} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(y)}\partial_y\sqrt{\alpha(y)},\ \ \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R_+^n)$; $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ следующим образом.

**Определение 1.** Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$($s$ — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha}^2 = \int\limits_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]\right|^2 d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$.

**Определение 2.** Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s \geqslant 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_y^l v]]\right\|_{L_2(R_+^n)}^2\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

**Условие 1.** Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(y)\alpha^{-\nu}(y)| \leqslant c < \infty$ при всех $y \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \dfrac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \dfrac{l}{2}\}$, $l = 1, 2, \ldots, \sigma$ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число $\nu$ существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v(x,y) = F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,y,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,y)]]. \tag{6}$$

**Определение 3.** Будем говорить, что символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,p}^\sigma(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}_+^1$, $\sigma \in \mathrm{R}^1$,$p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $y \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$ . Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2,...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2,...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(y)\partial_y)^j\partial_\eta^l\lambda(p,y,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $y \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь $\sigma$ — действительное число.

В $R_+^n$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v(x,y) = F(p,x,y), \tag{8}$$

где

$$A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v = \sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3\leqslant 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)p^{j_3}D_x^\tau D_{\alpha,y}^{j_1}\partial_y^{j_2}v. \tag{9}$$

Здесь $m,k,l$ натуральные числа $q = \frac{2m}{k} > 1$, $r = \frac{2m}{l} > 1$, $a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)$ — некоторые ограниченные на $\bar{R}_+^1$ функции, $a_{00k0}(y) \neq 0$ при всех $y \in \bar{R}_+^1$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(y) = 1$ при всех $y \in \bar{R}_+^1$.

На границе $y = 0$ полупространства $R_+^n$ задаются граничные условия вида

$$B_j(p,D_x,\partial_y)\, v|_{y=0} = \sum_{|\tau|+rj_3+qj_2\leqslant m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} D_x^\tau \partial_y^l\, v|_{y=0} = G_j(p,x), j = 1,2,...,\mu. \tag{10}$$

Пусть выполнены следующие условия.
**Условие 3.** Уравнение

$$\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3=2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)\xi^\tau \eta^{j_1} z^{j_2} p^{j_3} = 0. \tag{11}$$

не имеет $z$–корней, лежащих на мнимой оси при всех $y \geqslant 0$ $(\xi,\eta) \in R^n$ ,$p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $|p| + |\eta| + |\xi| > 0$.

Пусть $z_1(p,y,\xi,\eta),...,z_{r_3}(p,y,\xi,\eta)$ $(1 \leqslant r_3 \leqslant k)$ — корни, лежащие в левой полуплоскости, а $z_{r_3+1}(p,y,\xi,\eta),...,z_k(p,y,\xi,\eta)$ лежат в правой полуплоскости.

**Условие 4.** Функции $z_j(p,y,\xi,\eta)$, $j = 1,2,...,k$, при всех $\xi \in R^{n-1}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по переменным $y \in \Omega \subset \bar{R}_+^1$ и $\eta \in R^1$. Причем, при всех $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $j_1 = 0, 1, 2, ...,l = 0, 1, 2, ...,\xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}_+^1$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$$\left|(\alpha(y)\partial_y)^{j_1}\partial_\eta^{j_2} z_j(y,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{j_1,l}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{q-j_2}, \quad |p| + |\xi| + |\eta| > 0, \tag{12}$$

с константами $c_{j_1,l} > 0$, не зависящими от $p,y$, $\xi$, $\eta$.

Из условия 3 следует, что при всех $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}_+^1$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$$Re z_j(p,y,\xi,\eta) \leqslant -c_1(|p| + |\xi| + |\eta|)^q,\ j = 1,...,r_3; \tag{13}$$

$$Re z_j(p,y,\xi,\eta) \geqslant c_2(|p| + |\xi| + |\eta|)^q,\ j = r_3 + 1,...,k, \tag{14}$$

с некоторыми константами $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, не зависящими от $p, y, \xi, \eta$.

**Условие 5.** Число граничных условий (10) равно числу $z$–корней уравнения (11), лежащих в левой полуплоскости, и при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| > 0$ многочлены $B_j^0(\xi,z) = \sum\limits_{|\tau|+qj_2+rj_3=m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3}\xi^\tau z^{j_2}$ линейно независимы по модулю многочлена $P(\xi,z) = \prod\limits_{j_1=1}^{r_3}(z - z_{j_1}(0,\xi,0))$.

В работе [6] были доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r_1} m_j + q\}$ — действительное число и выполнены условия $1'$, 3–5. Тогда для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (8), (10) справедлива априорная оценка

$$\|v, |p|\|_{s,\alpha,q} \leqslant c(\|F, |p|\|_{s-2m,\alpha,q} + \|v, |p|\|_{s-1,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3}\|G_j, |p|\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}) \tag{15}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $p$, $v$, $F$, $G_j$, $j = 1,2,...,r_3$.

**Теорема 2.** Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} m_j + q\}$, выполнены условия $1'$, 3, 4, 5 при $p \in Q_{p_0} = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| \geqslant p_0 > 0\}$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что при всех $p \in Q_{p_0}$ для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (8), (10) справедлива априорная оценка

$$\|v, |p|\|_{s,\alpha,q} \leqslant c(\|F, |p|\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3}\|G_j, |p|\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}) \tag{16}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $p$, $v$, $F$, $G_j$, $j = 1,2,...,r_3$.

В работе [7] построен регуляризатор и доказаны теоремы о существовании и единственности решений общей краевой задачи в полупространстве для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, коэффициенты которого зависят от переменной y и от комплексного параметра $p$.

**Теорема 3.** Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} m_j + q\}$ — действительное число и выполнены условия $1'$, 3–5. Тогда существует правый регуляризатор задачи (19), (21), то есть такой оператор $R : H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod\limits_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \to H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$, что

$$\widetilde{A}R(F,\bar{G}) = (F,\bar{G}) + \widetilde{T}(F,\bar{G}), \tag{17}$$

где $\widetilde{A}$ — оператор, порожденный задачей (19). (21),

$$\widetilde{A} : H_{s,\alpha,q}(R^n_+) \to H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}),$$

а оператор $\widetilde{T}$ является ограниченным оператором из

$$H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \text{ в } \quad H_{s-2m+1,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q+1-m_j2}(R^{n-1})$$

$$\bar{G} = (G_1,\, G_2,\, ...G_{r_3}).$$

При выполнении априорной оценки (15) правый регуляризатор задачи является одновременно и левым регуляризатором.

**Теорема 4.** Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r_3} m_j + q\}$, выполнены условия $1'$, 3–5 при $p \in Q_{p_0} = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| \geqslant p_0 > 0\}$. Пусть $F(p,x,y) \in H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+)$,$G_j(p,x) \in H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$, $j = 1,2,...r_3$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что при всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (8), (10).

В настоящей работе исследуется начально–краевая задача для параболического уравнения высокого порядка с вырождением по пространственной переменной.

А именно, в $R^{n+1}_{++} = \{(x,t,y) : x \in R^{n-1},\ 0 < t < +\infty,\ 0 < y < +\infty\}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(y,\partial_t,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v(t,x,y) = F(t,x,y), \tag{18}$$

где

$$A(y,\partial_t,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v = \sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3\leqslant 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y) D_x^{\tau} D_{\alpha,y}^{j_1} \partial_y^{j_2} \partial_t^{j_3} v. \tag{19}$$

Здесь $m,k,l$ натуральные числа $q = \frac{2m}{k} > 1$, $r = \frac{2m}{l} > 1$, $a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)$ - некоторые ограниченные на $\bar{R}^1_+$ функции, $a_{00k0}(y) \neq 0$, $a_{000l}(y) \neq 0$ при всех $y \in \bar{R}^1_+$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(y) = 1$ при всех $t \in \bar{R}^1_+$.

На границе $y = 0$ множества $R^{n+1}_{++}$ задаются граничные условия вида

$$B_j(\partial_t,D_x,\partial_y)\, v|_{y=0} = \sum_{|\tau|+rj_3+qj_2\leqslant m_j} b_{\tau j_2 j_3} \partial_t^{j_3} D_x^{\tau} \partial_y^{j_2}\, v|_{y=0} = G_j(t,x), j = 1,2,...,\mu. \tag{20}$$

На границе $t = 0$ множества $R^{n+1}_{++}$ задаются начальные условия вида

$$\partial_t^j\, v|_{t=0} = \Phi_j(x,y),\ j = 1,2,...,l-1. \tag{21}$$

Основой использованного в работе метода служит известная схема, связывающая параболические задачи с эллиптическими задачами, содержащими комплексный параметр $p$.

Вначале из результатов теорем 1–4 выводится однозначная разрешимость задачи (8), (10) в пространстве аналитических функций. Отсюда, в силу изоморфизма, устанавливаемого преобразованием Лапласа, доказывается разрешимость однородной параболической задачи в изоморфном пространстве $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_2)$.

Наконец, при выполнении условий согласования начальных и граничных условий, выводится теорема о разрешимости задачи (18), (21), (21) в пространствах $\widehat{W}_{2,\gamma}(Y_1,Y_2)$.

Рассмотрим абстрактную функцию $u(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве $Y_1$, такую, что $u(t)=0$ при $t<0$. Предположим, что существует преобразование Фурье функции $e^{-\gamma t}u(t)$ $(\gamma\geqslant 0)$, принадлежащее гильбертову пространству $Y_0\supset Y_1$. Будем говорить, что функция $V(p)$ принадлежит пространству $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$, $a\geqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$ если конечна норма

$$\|u\|_{W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)}=\{\int\limits_{R^1}\left\|e^{-\gamma t}u(t)\right\|^2_{Y_1}dy+\int\limits_{R^1}|\gamma+i\tau|^{2a}\left\|F_{y\to\tau}[e^{-\gamma t}u(t)]\right\|^2_{Y_0}d\tau\}^{\frac12}.$$

Обозначим через $E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ множество функций $V(p)$, где $p$ — комплексное число, для которого $Rep>\gamma$, таких что функции $V(p)$ принимают значения в гильбертовом пространстве $Y_1\subset Y_0$, являются аналитическими функциями в полуплоскости $Rep>\gamma$ и для них конечна норма

$$\|u\|_{E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)}=\sup_{\rho>\gamma}\{\int\limits_{Rep=\rho}(\|V(p)\|^2_{Y_1}+|p|^{2a}\|V(p)\|^2_{Y_0})dp\}^{\frac12}.$$

Преобразование Лапласа устанавливает взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между пространствами $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ и $E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ .

Если начальные условия (21) однородны, то есть

$$\partial_t^j\, v|_{t=0}=0,\ j=1,2,...,l-1, \tag{22}$$

то задача (18), (21), (22) с помощью преобразования Лапласа может быть сведена к эквивалентной задаче

$$A(p_1^r,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v(x,y)=f(p,x,y), \tag{23}$$

$$B_j(p_1^r,D_x,\partial_y)\, v|_{y=0}=g_j(t,x),\ j=1,2,...,r_3. \tag{24}$$

Задача (23), (24) является задачей в полупространстве $y\geqslant 0$ для вырождающегося эллиптического уравнения с комплексным параметром $p=p_1^r$. Такие задачи были исследованы в работах [6], [7]. Используя результаты этих работ, получаем следующее утверждение.

**Теорема 5.** Пусть $s\geqslant\max\{2m,\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r_1}m_j+\frac12\max\{q,r\}$, $s$- кратно $2m$. Пусть выполнены условия $1',$ 3 – 5. Тогда существует такое число $\gamma_0>0$, что при всех $\gamma>\gamma_0$ и любых $F(t,x,y)\in H^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++})\equiv W^{\frac{s-2m}{r}}_{2,\gamma}(H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+),L_2(R^n_+))$ и $G_j(x,y)\in H^{\sigma_j}_{r,\gamma}(R^n_+)\equiv W^{\frac{s-2m}{r}}_{2,\gamma}(H_{\sigma_j}(R^{n-1}),L_2(R^{n-1})$, $\sigma_j=s-m_j-\frac12 q$, $j=1,2,...,r_3$ задача (18), (21), (22) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $H^s_{r,\gamma,\alpha.q}$, причем справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{H^s_{r,\gamma,\alpha,q}}\leqslant c(\|F\|_{H^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha,q}}+\sum_{j=1}^{r_3}\langle\langle G_j\rangle\rangle_{H^{\sigma_j}_{r,\gamma,}})\quad .$$

Рассмотрим теперь задачу (18), (21), (21). Введем наряду с пространствами $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ пространства $\widehat{W}^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ абстрактных функций $t\to u(t), t\in R^1_+$ со значениями в $Y_1\subset Y_0$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\widehat{W}^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)} = \{\int\limits_{R^1_+} \left\|e^{-\gamma t}u(t)\right\|^2_{Y_1} dy + \sum_{j=0}^{a} \int\limits_{R^1_+} \left\|\partial^j_t(e^{-\gamma t}u(t)]\right\|^2_{Y_0} dt\}^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Здесь $a \geqslant 0$ — целое число.

В дальнейшем используются пространства $\widehat{W}^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ при следующем конкретном выборе пространств $Y_1,\ Y_0$ :

$$\widehat{H}^s_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++}) \equiv \widehat{W}^{\frac{s}{r}}_{2,\gamma}(H_{s,\alpha,q}(R^n_+),L_2(R^n_+)), \quad \widehat{H}^\beta_{r,\gamma}(R^n_+) \equiv \widehat{W}^{\frac{\beta}{r}}_{2,\gamma}(H_{\sigma_j}(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}) \quad .$$

Задача (18), (21), (21) сводится к задаче (18), (21), (22), если выполнено следующее условие согласования.

**Условие 6.** Для набора функций $F(t,x,y) \in \widehat{H}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++})$, $G_j(x,y) \in \widehat{H}^{\sigma_j}_{r,\gamma}(R^n_+)$, $\sigma_j = s - m_j - \frac{1}{2}q$, $j = 1,2,...,r_3$; $\Phi_{\mu_1}(x,t) \in \widehat{H}^{\beta_{\mu_1}}_{\alpha,q}(R^n_+)$ $\beta_\mu = s - \mu r - \dfrac{1}{2}r$, $\mu = 1,2,...,l-1$ существует такая функция $v_0(y,x,t) \in \widehat{H}^s_{r,\gamma,\alpha,q}(R^{n+1}_{++})$, что

1) выполняется условие $\partial^j_t\ v|_{t=0} = \Phi_j(x,y)$, $j = 1,2,...,l-1$;

2) после продолжения функций $F - Av_0$, $G_j - B_jv_0|_{y=0}$, $j = 1,2,...,r_3$ нулем при $y < 0$ справедливы включения $F - Av_0 \in \widehat{H}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha,q}, G_j - B_jv_0|_{y=0} \in \widehat{H}^{\sigma_j}_{r,\gamma}$, $j = 1,2,...,r_3$;

3) существует постоянная $c > 0$, что справедлива оценка

$$\|v_0\|_{\widehat{H}^s_{r,\gamma,\alpha,q}} \leqslant c\sum_{j=0}^{l-1} \|\Phi_j\|_{\widehat{H}^{\beta_\mu}_{r,\gamma}} \quad .$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть выполнено условие 6 и условия теоремы 5. Тогда существует такое $\gamma_0 > 0$, что при всех $\gamma > \gamma_0$ и любых $F(t,x,y) \in \widehat{H}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++})$, $G_j(x,y) \in \widehat{H}^{\sigma_j}_{r,\gamma}(R^n_+)$, $\sigma_j = s - m_j - \frac{1}{2}q$, $j = 1,2,...,r_3$,

$$\Phi_{\mu_1}(x,t) \in \widehat{H}^{\beta_{\mu_1}}_{\alpha,q}(R^n_+),\ \beta_{\mu_1} = s - \mu_1 r - \frac{1}{2}r,\ \mu_1 = 0,1,...,l-1$$

задача (18), (21), (21) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\widehat{H}^s_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++})$, причем справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{\widehat{H}^s_{r,\gamma,\alpha,q}} \leqslant C(\|F\|_{\widehat{H}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha,q}} + \sum_{j=1}^{r_3} \langle\langle G_j\rangle\rangle_{\widehat{H}^{\sigma_j}_{r,\gamma}} + \sum_{\mu_1=0}^{l-1} \|\Phi_{\mu_1}\|_{\widehat{H}^{\beta_{\mu_1}}_{\alpha.q}}).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баруча-Рид, А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча-Рид. — М. : Мир, 1966. — 351 с.

2. Bresis, H. On a degenerate elliptic-parabolic equation / H. Bresis, W. Rosenkrantz , B. Singer // Comm. Pure and Appl. Math. — 1971. — V. 24, № 3. — P. 395–416.

3. Булавин, В. Г. О существовании решения смешанной задачи для вырождающегося дифференциального уравнения, описывающего диффузионный процесс / В. Г. Булавин, В. П. Глушко // Труды математического факультета Воронежского гос. университета. — 1972. — Вып. 7. — С. 29–39.

4. Богатова, В. П. Разрешимость начально-краевых задач для параболических уравнений высокого порядка с вырождением по пространственной переменной / В. П. Богатова, В. П. Глушко // Доклады академии наук СССР. — 1986. — Т. 291, № 3. — С. 531–534.

5. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 60–76.

7. О существовании решений общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 51–67.

8. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

9. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

10. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 477, № 1. — С. 7–10.

## REFERENCES

1. Barucha-reed A.T. Elements of the theory of Markov processes and their applications. [Barucha-Rid A.T. Elementy teorii markovskix processov i ix prilozheniya]. Moscow, 1966, 351 p.

2. Bresis H., Rosenkrantz W., Singer B. on a degenerate elliptic-parabolic equation. Comm. Pure and Appl. Math., 1971, vol. 24, no. 3, pp. 395–416.

3. Bulavin V.G., Glushko V.P. on the existence of a solution of a mixed problem for a degenerate differential equation describing the diffusion process. [Bulavin V.G., Glushko V.P. O sushhestvovanii resheniya smeshannoj zadachi dlya vyrozhdayushhegosya differencial'nogo uravneniya, opisyvayushhego diffuzionnyyj process]. *Trudy matematicheskogo fakul'teta Voronezhskogo gos. universiteta — Proceedings of the mathematical faculty of the Voronezh state University*, 1972, iss. 7, pp. 29–39.

4. Bogatova V.P., Glushko V.P. Solvability of initial-boundary value problems for parabolic equations of high order with degeneration on the spatial variable. [Bogatova V.P., Glushko V.P. Razreshimost' nachal'no-kraevyx zadach dlya parabolicheskix uravneniyj vysokogo poryadka s vyrozhdeniem po prostranstvennoyj peremennoyj]. *Doklady akademii nauk SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 531–534.

5. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

6. Baev A.D., Bakhtina J.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaitsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. A priori estimates for solutions of General boundary value problems in the half-space for degenerating elliptic equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. Ob apriornyx ocenkax resheniyj obshhix granichnyx zadach v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 60–76.

7. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D. On the existence of solutions of General boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A., Xarchenko V.D. O sushhestvovanii resheniyj obshhix granichnyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 51–67.

8. Baev A.D. On General boundary value problems in the half-space for degenerating elliptic equations of higher order. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

9. Baev A.D., Kobylinsky P.A. On some properties of one class of degenerate pseudo-differential operators. [Baev A.D., Kobylinskiyj P.A. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2015, vol. 460, no. 2, pp. 133–135.

10. Baev A.D., Rabotinsky N.I. On some properties of a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2017, vol. 477, no. 1, pp. 7–10.

*Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: alexsandrbaev@mail.ru*

*Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: alexsandrbaev@mail.ru*

*Ковалевский Ростислав Александрович, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru*

*Kovalevsky Rostislav A., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru*

*Найдюк Филипп Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: olegna@vmail.ru*
*Тел.: +7(473)220–86–90*

*Naydyuk Philip Olegovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: olegna@vmail.ru*
*Tel.: +7(473)220–86–90*

*Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия*
*E-mail: 259608@mail.ru*

*Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: 259608@mail.ru*

*Харченко Виктория Дмитриевна, студент Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация*

*Kharchenko Victoria Dmitrievna, student of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

*Леженина Ирина Федоровна, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
*E-mail: if.lezhenina@yandex.ru*

*Lezhenina Irina Fedorovna, associate Professor of the Department of functional analysis and operator equations, Voronezh state University, Voronezh, Russia*
*E-mail: if.lezhenina@yandex.ru*

*Плетнева Ольга Константиновна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*
*Тел.: +7(473)220–86–90*

*Pletneva Ol'ga K., Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*Tel.: +7(473)220–86–90*