

ПРОЦЕССЫ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАДИОЦЕПЯХ, КАК ОБОБЩЕНИЕ ПРОЦЕССОВ В СТАЦИОНАРНЫХ РАДИОЦЕПЯХ

Н. Д. Бирюк¹, Т. Н. Короткова², О. С. Хорпяков³

¹ – Воронежский государственный университет;

² – Воронежский институт МВД;

³ – Международный институт компьютерных технологий

Поступила в редакцию 14.12.2017 г.

Аннотация. Рассмотрен параметрический контур с периодически изменяющимся во времени активным сопротивлением. Существует неочевидная аналогия между процессами в параметрическом и обычном контуре. Её можно обнаружить, если характерные для обычного контура возмущающие гармонические функции времени заменить функциями Хилла, которые представлены в виде бесконечного тригонометрического ряда с наперед заданными частотами составляющих. Получена математическая модель в виде блочной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Матрица системы состоит из блоков в виде квадратичных матриц порядка 2×2 . Предложенный подход обобщается на параметрические радиоцепи любой сложности, в этом случае бесконечные системы уравнений состоят из блоков в виде квадратных матриц порядка $n \times n$, n – любое целое положительное число. При этом естественным путем реализуется обобщение и в другом направлении, когда все элементы контура изменяются во времени по любым непрерывным периодическим функциям с одинаковыми периодами.

Ключевые слова: параметрический контур, функция Хилла, аналогия, бесконечная система уравнений, блоки, обобщение, вынужденные колебания, свободные колебания.

THE PROCESSES IN TIME VARYING CIRCUITS US GENERALIZATION OF PROCESSES IN USUAL CIRCUITS

N. D. Birjuk, T. N. Korotkova, O. S. Khorpyakov

Abstract. The time varying circuit with time varying resistor is considered. It is unobvious analogy between processes in time varying and usual circuits. It may be displayed if typical for usual circuit exciting harmonic functions of time replace by Hill's functions, which is produced in form of infinity trigonometric series, with well-known frequencies of components. It is received mathematic model in form of blocking infinite system of linear algebraic equations. Matrix of system consists of blocks in form of square matrices with order 2×2 . Proposing approach is generalized among time varying circuits of arbitrary complication, then infinite systems of equations consist of blocks in from of square matrices with order $n \times n$, where is any whole positive number. For all this a generalization is realized in another direction, when all elements of circuit are changed at time accordance any continuous periodical functions with identical periods.

Keywords: time varying circuit, Hill's functions, analogy, infinity system of equations, blocks, generalization, forced oscillations, free oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

Отметим характерные особенности процессов в стационарных радиочепях. Эти цепи особым образом реагируют на задающие токи и напряжения в виде гармонических функций времени, именно, гармонические возбуждения в установившемся режиме вызывают гармонические отклики с теми же частотами. Свободные процессы представляют собой экспоненциально затухающие квазигармонические функции времени. При отсутствии активных сопротивлений они вырождаются в гармонические функции. С позиции метода комплексных амплитуд, экспоненциально затухающую синусоиду можно считать обычной синусоидой с комплексной частотой. Стационарные цепи с положительными элементами всегда устойчивы по Ляпунову.

Перейдём к линейным радиочепям с положительными периодическими параметрами, в которых все или несколько параметров периодически изменяются во времени с одной и той же частотой. Условие линейности выполняется, если функция изменения параметров не зависит от протекающих токов. Процессы в таких цепях являются обобщением процессов в стационарных цепях, однако обнаружить это непросто.

Пусть имеется параметрическая радиочепь любой сложности, параметры которой периодически изменяются во времени с круговой частотой Ω . Воздействие в виде функции Хилла вызывает в ней вынужденные колебания с тем же спектром что и воздействие. Функции Хилла не выражаются в элементарных функциях, они являются почти периодическими функциями и представляются в виде суммы бесконечного ряда:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cos[(\omega + k\Omega)t + \varphi_k].$$

Гармоническая функция времени является частным случаем функции Хилла, поэтому воздействию в виде гармонической функции времени соответствует отклик в виде функции Хилла.

Другой особенностью радиочепей является тот факт, что параметрическая цепь с положительными параметрами может быть устойчивой или неустойчивой по Ляпунову. Разделение этих возможностей - сложная физико-математическая задача. Свободный процесс в устойчивом параметрическом контуре является затухающей, а в неустойчивом возрастающей функцией Хилла.

Метод комплексных амплитуд настолько широко применяется при анализе стационарных радиочепей, что забыты его истоки, а это затрудняет его применение в случае параметрических радиочепей. Удобная для наших целей методика применения метода комплексных амплитуд изложена в учебнике профессора Ю.Т. Величко [1]. Этот математический метод является своеобразным, так как не входит в классическую математику. Его разработал американский инженер-электротехник Чарльз Протеус Штейнмец и доложил на Электротехническом конгрессе в Чикаго в 1871 году. Несмотря на некоторые формальные недостатки, метод безотказно работает при решении электро- и радиотехнических задач. Поэтому анализ устойчивости радиочепей на основе этого метода относится к неляпуновскому методу анализа устойчивости.

Суть метода комплексных амплитуд заключается в том, что гармонической функции времени a_t названной оригиналом, ставится в соответствии изображение \hat{a} , являющееся показательной функцией с мнимым показателем. Это соответствие символически указывается стрелкой остриём к оригиналу

$$a_t = A \cos(\omega t + \varphi) \leftarrow \hat{a} = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \dot{A} e^{j\omega t}, j = \sqrt{-1}$$

где $\dot{A} = Ae^{j\varphi}$ — комплексная амплитуда. В этом методе математические преобразования оригиналов переводятся в соответствующие преобразования изображений, что заметно упрощает промежуточные преобразования. Ответ должен быть в виде оригинала, поэтому требуется обратный переход от изображения к оригиналу, а он очень простой

$$a_t = Re\hat{a},$$

где оператор Re означает взятие действительной части комплексного числа или функции.

Подробности применения данного варианта метода комплексных амплитуд к анализу процессов в радиоцепях содержатся в нашей статье [3]. На практике цепи с периодическими параметрами применяются, однако функции их изменения во времени из физических соображений получить не удаётся. Поэтому принято эти функции аппроксимировать выражениями

$$P(t) = P_o [1 + m_p \cos(\Omega t + \varphi_p)]$$

или

$$P(t) = \frac{P_o}{1 + m_p \cos(\Omega t + \varphi_p)}, \quad (1)$$

где $m < 1$ — коэффициент модуляции параметра. В радиоприёмнике обычно выполняется сильное неравенство $m_p \ll 1$, тогда эти выражения отличаются друг от друга только начальной фазой, что не существенно. Здесь вместо P нужно подставлять обозначение изменяющегося во времени параметра. Самая важная область применения параметрических радиоцепей — маломощные высокочастотные усилители, где среди других типов усилителей параметрические усилители по совокупности показателей считаются наилучшими.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ВИДЕ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Анализ параметрических радиоцепей связан с громоздкими математическими преобразованиями, поэтому рассмотрим относительно простую параметрическую цепь — последовательный колебательный контур (рис. 1) с изменяющимся по закону (1), активным сопротивлением. Предложенный подход обобщим на более сложные параметрические цепи.

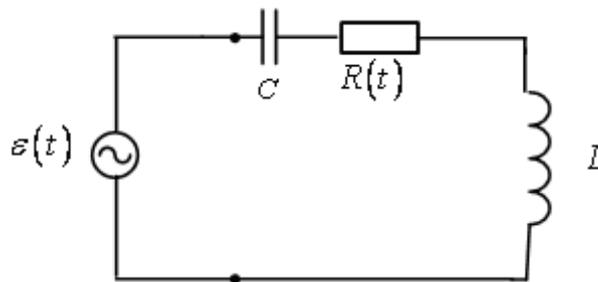


Рис. 1. Последовательный колебательный контур с периодически изменяющимся активным сопротивлением.

Здесь

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon), \quad R(t) = R_o [1 + m_R \cos(\Omega t + \varphi_R)] \quad (2)$$

Уравнение контура относительно тока $i(t)$ (оригинала) —

$$L \frac{di}{dt} + R_o [1 + m \cos(\Omega t + \varphi_p)] i + \frac{1}{C} \int i dt = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon) \quad (3)$$

Это же уравнение относительно изображения тока —

$$L \frac{d\hat{i}}{dt} + R_o \left(\frac{\dot{m}}{2} e^{j\Omega t} + 1 + \frac{\dot{m}^*}{2} e^{-j\Omega t} \right) \hat{i} + \frac{1}{C} \int \hat{i} dt = \varepsilon_m \dot{e}^{j\omega t}, \quad (4)$$

где $\dot{m} = m e^{j\varphi_R}$, $\dot{m}^* = m e^{-j\varphi_R}$, $\varepsilon_m = \varepsilon_m e^{j\varphi_R}$. Здесь вынужденное колебание тока представляет собой функцию Хилла —

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \cos [(\omega + k\Omega)t + \varphi_k], \quad (5)$$

её изображение —

$$\hat{i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{I}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \quad \dot{I}_k = I_k e^{j\varphi_k} \quad (6)$$

Производная и интеграл изображения —

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = j \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\omega + k\Omega) \dot{I}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \quad \int \hat{i} dt = -j \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{I}_k}{\omega + k\Omega} e^{j(\omega+k\Omega)t} \quad (7)$$

Если подставить (8) и (9) в (6), то после преобразований получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{m}}{2} R_o \dot{I}_{k-1} + \left[R_o + j(\omega + k\Omega)L - \frac{j}{(\omega + k\Omega)C} \right] \dot{I}_k + \frac{\dot{m}^*}{2} R_o \dot{I}_{k+1} \right\} e^{j(\omega+k\Omega)t} = \varepsilon_m \dot{e}^{j\omega t} \quad (8)$$

Из этой суммы поочерёдно выбираем слагаемые с одинаковыми показателями. После сокращения на одинаковые множители с этими показателями получим бесконечную систему алгебраических уравнений. Уравнения этой системы следующие:

при $k = 0$: $\frac{\dot{m}}{2} R_o \dot{I}_{-1} + \left[R_o j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \dot{I}_0 + \frac{\dot{m}^*}{2} \dot{I}_1 = \varepsilon_m$;

при $k \neq 0$: $\frac{\dot{m}}{2} R_o \dot{I}_{k-1} + \left[R_o + j(\omega + k\Omega)L - \frac{j}{(\omega+k\Omega)C} \right] \dot{I}_k + \frac{\dot{m}^*}{2} R_o \dot{I}_{k+1} = 0$.

Коэффициенты в уравнениях имеют размерности сопротивления. Для уменьшения громоздкости введём обозначения

$$Z_{k,k-1} = \frac{\dot{m}}{2} R_o, \quad Z_{k,k} = R_o + j \left[(\omega + k\Omega)L - \frac{1}{(\omega + k\Omega)C} \right], \quad Z_{k,k+1} = \frac{\dot{m}^*}{2} R_o \quad (9)$$

Представим полученную бесконечную систему уравнений в векторно-матричном виде —

$Z_{-2,-3}$	$Z_{-2,-2}$	$Z_{-2,-1}$	0	0	0	0	·	\dot{I}_{-3}	=	0	
0	$Z_{-1,-2}$	$Z_{-1,-1}$	$Z_{-1,0}$	0	0	0		\dot{I}_{-2}			0
0	0	$Z_{0,-1}$	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	0	0		\dot{I}_{-1}			0
0	0	0	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$Z_{1,2}$	0		\dot{I}_0			ε_m
0	0	0	0	$Z_{2,1}$	$Z_{2,2}$	$Z_{2,3}$		\dot{I}_1			0
0	0	0	0	$Z_{2,1}$	$Z_{2,2}$	$Z_{2,3}$		\dot{I}_2			0
							·	\dot{I}_3			

Бесконечная матрица простирается до бесконечности в четырёх направлениях: вверх, вниз, влево и вправо; вектор-столбцы уходят в бесконечность в двух направлениях: вверх и вниз.

Индексы отсчитываются от центральных элементов с нулевыми индексами, клетки которых выделены. Матрица содержит три ненулевые диагонали: главную и примыкающие к ней слева и справа. Все элементы боковых диагоналей матрицы одинаковые: для левой $\frac{m}{2}R_o$, для правой $\frac{m}{2}R_o$. Точно так же и в вектор-столбцах клетки с нулевым индексом выделены.

Свободный бесконечный вектор-столбец содержит лишь один ненулевой элемент ε_m , находящийся в нулевой строке.

Бесконечная система уравнений (10) может быть представлена в максимально компактном, векторно-матричном виде

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{I} = \varepsilon, \quad (11)$$

где \mathbf{Z} — бесконечная матрица, \mathbf{I} и ε — бесконечные вектор-столбцы, структура которых уточняется сравнением (11) с (10). Уравнение (11) является бесконечным векторным уравнением.

Матрица \mathbf{Z} как функция частоты является периодической с периодом Ω , т. е.

$$\mathbf{Z}(\omega + \Omega) = \mathbf{Z}(\omega) \quad (12)$$

Это видно из выражений (9). Замена ω на $\omega + \Omega$ равнозначна замене k на $k + 1$, что для бесконечной матрицы несущественно. Равенство (12) имеет более общий характер и справедливо для линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами.

Задача об устойчивости контура равнозначна задаче о свободных колебаниях. Соответствующее уравнение получается из (13) в предположении, что правая часть тождественно равна нулю. Оно имеет вид

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{I} = 0. \quad (13)$$

Это уравнение имеет ненулевое решение при выполнении условия

$$\det \mathbf{Z} = 0. \quad (14)$$

Определитель как функция частоты периодичен с периодом Ω , поэтому уравнение (14) имеет бесконечно множество решений на комплексных частотах

$$\dots, \dot{\omega} - k\Omega, \dot{\omega} - (k-1)\Omega, \dots, \dot{\omega} - \Omega, \dot{\omega}, \dot{\omega} + \Omega, \dots, \dot{\omega} + (k-1)\Omega, \dot{\omega} + k\Omega, \dots$$

Все эти комплексные частоты имеют одинаковые мнимые части, в которых содержится информация об устойчивости контура. В случае устойчивости мнимые части положительны, в случае неустойчивости — отрицательны. Для решения вопроса об устойчивости, достаточно найти одну из приведенных частот, проще для вычислений — частоту $\dot{\omega}$. Может оказаться полезным метод проб и ошибок при компьютерных вычислениях.

Рассмотрим возможности обобщений в разных направлениях. Нулевые элементы матрицы \mathbf{Z} в (10) получились за счёт того, что сопротивление $R(t)$ изменяется во времени по простой периодической функции. Если бы это сопротивление или все три элемента контура изменялись по периодическим функциям общего вида, то все элементы матрицы \mathbf{Z} были бы ненулевыми. Свободный вектор в (10) содержит единственный ненулевой элемент. Причина этого — возмущающая гармоническая ЭДС. Если бы она изменялась во времени по функции Хилла общего вида, то все элементы свободного вектора были бы ненулевыми. Сложнее обобщить относящуюся к контуру методику на любые параметрические цепи. Трудность заключается в том, что исходное уравнение (3) для обобщений мало пригодно.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ВИДЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Законы Кирхгофа изначально приводят к дифференциальной системе уравнений первого порядка. Преобразовать эту систему в одно дифференциальное уравнение n -го порядка теоретически возможно, но на практике требуются громоздкие преобразования, быстро возрастающие с повышением n . Для контура ($n = 2$) таких трудностей, как при больших n , не возникает. Поэтому при обобщении нужно исходить не из уравнения (3), а из системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Эта система может быть разной в зависимости от того, какие две функции процесса выбраны в качестве определяющих. Практика показала, что в их роли целесообразно выбирать заряд конденсатора $q(t)$ и магнитное потокосцепление индуктивности $\varphi(t)$. Тогда законы Кирхгофа приведут к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{L}\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{C}q - \frac{R(t)}{L}\varphi + \varepsilon(t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

или в векторном виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (16)$$

$$\mathbf{A}(t) = \{a_{i,k}\}, \quad i,k = 1,2; \quad a_{1,1} = 0, \quad a_{1,2} = \frac{1}{L}, \quad a_{2,1} = -\frac{1}{C}, \quad a_{2,2} = -\frac{R(t)}{L},$$

$$\mathbf{x} = \text{colon}(q, \varphi), \quad \mathbf{f}(t) = \text{colon}(0, \varepsilon(t)).$$

Как и ранее, считаем

$$R(t) = R_o [1 + m \cos(\Omega t + \varphi_R)], \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi_\varepsilon)$$

Если попытаться обобщить систему (15) на любые параметрические цепи, то для оригиналов возникают трудности, связанные с начальными фазами, которые не дают возможности сократить зависимые от времени множители. Для изображений этого нет, так как начальные фазы “спрятаны” в комплексных амплитудах. Поэтому необходимо перейти от системы (15) для оригиналов к соответствующей системе для изображений —

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{q}}{dt} &= \frac{1}{L}\hat{\varphi} \\ \frac{d\hat{\varphi}}{dt} &= -\frac{1}{C}\hat{q} - \frac{R_o}{L} \left[\frac{m}{2} e^{j\Omega t} + 1 + \frac{m^*}{2} e^{-j\Omega t} \right] \hat{\varphi} + \varepsilon_m e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Заряд и потокосцепление зададим в виде функций Хилла и найдём их производные —

$$\hat{q} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{q}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \quad \frac{d\hat{q}}{dt} = j \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\omega + k\Omega) \hat{q}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}; \quad (18)$$

$$\hat{\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}, \quad \frac{d\hat{\varphi}}{dt} = j \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\omega + k\Omega) \hat{\varphi}_k e^{j(\omega+k\Omega)t}$$

Если подставить (8) в (17), то после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [j(\omega + k\Omega) \hat{q}_k - \frac{1}{L} \hat{\varphi}_k] e^{j(\omega+k\Omega)t} &= 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{q}_k}{C} + \frac{m}{2} \frac{R_o}{L} \hat{\varphi}_{k-1} + [j(\omega + k\Omega) + \frac{R_o}{L}] \hat{\varphi}_k + \frac{m^*}{2} \frac{R_o}{L} \hat{\varphi}_{k+1} \right\} e^{j(\omega+k\Omega)t} &= \varepsilon_m e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Поочерёдно выбираем слагаемые с одинаковыми экспоненциальными множителями. После сокращения на эти множители, получим бесконечную алгебраическую систему уравнений. В отличие от (8), здесь каждому k соответствует пара уравнений. Эти уравнения следующие:

$$\text{при } k = 0: \left. \begin{aligned} j\omega \dot{q}_0 - \frac{1}{L} \dot{\varphi}_0 &= 0 \\ \frac{\dot{q}_0}{C} + \frac{\dot{m} R_o}{2L} \varphi_{-1} + \left(j\omega + \frac{R_o}{L}\right) \dot{\varphi}_0 + \frac{\dot{m} R_o}{2L} \dot{\varphi}_1 &= \varepsilon_m \end{aligned} \right\}; \tag{20}$$

$$\text{при } k \neq 0: \left. \begin{aligned} j(\omega + k\Omega) \dot{q}_k - \frac{1}{L} \dot{\varphi}_k &= 0 \\ \frac{\dot{q}_k}{C} + \frac{\dot{m} R_o}{2L} \varphi_{k-1} + \left[j(\omega + k\Omega) + \frac{R_o}{L}\right] \dot{\varphi}_k + \frac{\dot{m} R_o}{2L} \varphi_{k+1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Для компактного векторного представления упорядочим переменные следующим образом:

$$\dots, \dot{q}_{-k}, \dot{\varphi}_{-k}; \dot{q}_{-k+1}, \dot{\varphi}_{-k+1}; \dots, \dot{q}_{-1}, \dot{\varphi}_{-1}; \dot{q}_0, \dot{\varphi}_0; \dot{q}_1, \dot{\varphi}_1; \dots, \dot{q}_{k-1}, \dot{\varphi}_{k-1}; \dot{q}_k, \dot{\varphi}_k; \dots$$

Тогда систему (22) можно представить в векторном виде —
при $k = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{m} R_o}{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{-1} \\ \dot{\varphi}_{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j\omega & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & j\omega + \frac{R_o}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\varphi}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{m} R_o}{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\varphi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}; \tag{21}$$

при $k \neq 0$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{m} R_o}{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{k-1} \\ \dot{\varphi}_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j(\omega + k\Omega) & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & j(\omega + k\Omega) + \frac{R_o}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_k \\ \dot{\varphi}_k \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{m} R_o}{2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{k+1} \\ \dot{\varphi}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для матрицы и вектор-столбцов предыдущих выражений введём обозначения

$$\mathbf{A}_{k,k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{m} R_o}{2L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{k,k} = \begin{pmatrix} j(\omega + k\Omega) & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & j(\omega + k\Omega) + \frac{R_o}{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{m} R_o}{2L} \end{pmatrix};$$

$\mathbf{x}_k = colon(q_k, \varphi_k)$ — неизвестный вектор-столбец, относящийся к частоте $(\omega + k\Omega)$; $\mathbf{f}_0 = colon(0, \varepsilon_m)$ — свободный вектор-столбец.

Тогда уравнение (23) можно представить в векторном виде:

$$\text{при } k = 0 \mathbf{A}_{0,-1} \mathbf{x}_{-1} + \mathbf{A}_{0,0} \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}_{0,1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_0;$$

$$\text{при } k \neq 0 \mathbf{A}_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{A}_{k,k} \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_{k,k+1} \mathbf{x}_{k+1} = 0, k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty.$$

Имеем бесконечное множество векторных уравнений, в котором неизвестные и свободные члены представляют собой векторы второго порядка, а коэффициенты — матрицы порядка 2×2 . Эту бесконечную систему векторных уравнений можно представить в векторно-матричном виде, —

$$\begin{matrix} A_{-1,-2} & A_{-1,-1} & A_{-1,0} & 0 & 0 \\ 0 & A_{0,-1} & A_{0,0} & A_{0,1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \mathbf{x}_{-2} \\ \mathbf{x}_{-1} \\ \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{f}_0 \\ 0 \end{matrix}, \tag{22}$$

а также в компактном представлении

$$\mathbf{A} \times \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (23)$$

Структура матрицы и вектор-столбцов этого уравнения раскрывается сравнением (23) с (22). В частности матрица \mathbf{A} содержит три блочных диагонали, что равнозначно шести обычным диагоналям. Векторное уравнение (25) представляет собой бесконечную блочную систему уравнений. Элементы матрицы – блоки, представляющие собой матрицы порядка 2×2 , элементы вектор-столбцов также блоки – вектор-столбцы второго порядка.

Заметим, что матрица и вектор-столбцы исходной дифференциальной системы (16) также 2-го порядка, т. е. такого же порядка, как и блоки бесконечной системы (22). Отсюда открываются широкие возможности для обобщений.

ОБОБЩЕНИЕ НА РАДИОЦЕПИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Допустим, что имеется любая параметрическая радиочепь, в которой все или некоторые элементы изменяются во времени по любым непрерывным периодическим функциям с одинаковыми периодами. Применим к этой цепи предложенную здесь методику анализа.

Законы Кирхгофа приведут к системе n (любого числа) дифференциальных уравнений первого порядка. Функции изменения параметров представим в виде сумм рядов Фурье, а неизвестные – в виде функций Хилла. Применяем метод комплексных амплитуд и переходим к изображениям, далее делаем выборку по частотам, вследствие чего все зависящие от времени функции сократятся. В результате получим бесконечную блочную алгебраическую систему типа (23) с блоками, представляющими собой матрицы и вектор-столбцы n -го порядка. Эта система может быть решена приближенно методом редукции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заметим, что подобный подход был применён для анализа последовательного контура с изменяющейся во времени индуктивностью в монографии В.А. Тафта [4], на наш взгляд, без нужных комментариев и обобщений. Ряд параметрических цепей более сложного типа рассмотрен в монографии [5], но без обобщений. В статьях [6–8] рассмотрены частные случаи похожих задач. В публикациях [9–10] представлен другой подход к решению подобных задач с использованием компьютерных программ. В некоторых вузах, например [11], параметрические колебания включены в общий курс физики. Интересная попытка объединения математического и физического подходов при анализе параметрических систем представлена в статье [12]. В теории дифференциальных уравнений выделены некоторые особенности [13], которые могут быть применены при анализе параметрических цепей. В настоящей публикации предложен системный однотипный подход анализа широкого класса параметрических радиочепей. Задача вычислений здесь лишь упомянута, она не простая, но реализуемая. Начальные сведения содержатся в монографии [2]. Эта задача с нужными подробностями требует отдельного рассмотрения.

Предложенный здесь метод имеет преимущества перед другими методами, заключающиеся в упрощении промежуточных преобразований. Это свойство метода комплексных амплитуд.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Величко, Ю. Т. Теоретичні основи радіотехнічних мереже / Ю. Т. Величко. — Львів : Видавництво ЛДУ, 1966. — 340 с.
2. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М.–Л. : Госфизматиздат, 1962. — 708 с.

3. Бирюк, Н. Д. Функции Хилла в теории параметрических радиоцепей / Н. Д. Бирюк, Т. Н. Короткова, О. С. Хорпяков // Вестник Воронежского института МВД России. — 2017. — № 4. — С. 166–174.
4. Тафт, В. А. Электрические цепи с переменными параметрами / В. А. Тафт. — М. : 1968. — 327 с.
5. Бирюк, Н. Д. Основы теории параметрических радиоцепей / Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. — 345 с.
6. Бирюк, Н. Д. Колебательный контур с переключающейся скачками реактивностью / Н. Д. Бирюк, А. Ю. Кривцов // Теория и техника радиосвязи. — 2015. — № 4. — С. 59–64.
7. Бирюк, Н. Д. Математическая модель параметрического контура и ее преобразования / Н. Д. Бирюк, А. Ю. Кривцов // III Международная научно-практическая конференция “Наука в современном мире”. — Киев, 2015. — С. 94–98.
8. Бирюк, Н. Д. Физические процессы в параметрическом контуре / Н. Д. Бирюк, А. Ю. Кривцов // East European Scientific Journal. — 2016. — Р. 4, № 11. — С. 9–12.
9. Шаповалов, Ю. І. Символьний аналіз лінійних електричних кіл у частотній області. Постійні та змінні параметри / Ю. І. Шаповалов. — Львів : Видавництво НУ “Львівська політехніка”, 2014. — 324 с.
10. Шаповалов, Ю. І. Визначення потужності лінійних параметричних кіл у середовищі системи програмних функцій MAORCS / Ю. І. Шаповалов, Б. А. Мандзій, Д. Р. Бачик // Вісник Національного технічного університету України “КПІ” Серія : Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2016. — № 66. — С. 29–35.
11. Кирюшин, А. В. Параметрические колебания в вузовском курсе общей физики / А. В. Кирюшин. // Ученые заметки ТОГУ. — 2014. — Т. 5, № 3. — С. 42–48.
12. Осипов, В. М. К теории параметрических систем / В. М. Осипов // Известия Томского ордена Октябрьской революции и ордена Трудового Красного знамени политехнического института им. С. М. Кирова. — 1974. — Т. 210. — С. 35–50.
13. Кокушкин, В. И. Характеристики колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем / В. И. Кокушкин // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 10. — С. 1406–1407.

REFERENCES

1. Velichko Yu.T. Theoretical basic of radio circuits. [Velichko Yu.T. Teoretichny osnovy radiotekhnichnih mezezh]. Lvov: Publishing Hous ob LSU, 1966, 340 p.
2. Kantorovich L.V., Krilov V.I. Approximate methods ob high analysis. [Kantorovich L.V., Krilov V.I. Priblizhonniye metody vishego analiza]. Moscow–Leningrad : State physical and mathematical Publishing House, 1962, 708 p.
3. Birjuk N.D., Korotkova T.N., Khorpyakov O.C. Hill Function in the Theory of Parametric Radio Circuits. [Birjuk N.D., Korotkova T.N., Khorpyakov O.C. Funktsiyi Hilla v teorii parametricheskikh radiotsepey]. *Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii — Proceeding of Voronezh Institute of Ministry of Internal Affairs of Russia*, 2017, no. 4, pp. 166–174.
4. Taft V.A. Electrical circuits with varying parameters. [Taft V.A. Electrichestkiye tsepy s peremennimy parametramy]. Moscow, 1968, 327 p.
5. Birjuk N.D., Yurgelas V.V. Theoretical basis of time varying circuits. [Birjuk N.D., Yurgelas V.V. Osnovy teorii parametricheskikh radiotsepey]. Voronezh: Publishing and Polygraphic Center VSU, 2012, 345 p.
6. Birjuk N.D., Krivtsov A.Yu. contour with switch with jump reactance. [Birjuk N.D., Krivtsov A.Yu. Kol’ebatel’niy kontur s perekl’uchaushcheysya reaktivnostuy]. *Teoriya i tekhnika radiosvyazi — Theory and Technics of Radio Communication*, 2015, no. 4, pp. 59–64.
7. Birjuk N.D., Krivtsov A. Yu. Mathematical model of time varying contour and it

transformation. [Birjuk N.D., Krivtsov A. Yu. Matematicheskaya model parametriceskogo kontura I yeyo preobrazovaniye]. III International Conference “The Science in Modern World”, Kiev, 2015, pp. 94–98. 8. Birjuk N.D., Krivtsov A. Yu. Physical Process in Time Varying Contour. [Birjuk N.D., Krivtsov A. Yu. Fizicheskiye protsesi v parametriceskom konturye]. *East European Scientific Journal – East European Scientific Journal*, 2016, part 4, no. 11, pp. 9–12.

9. Shapovalov Yu.I. Symvolnyi analiz liniinykh elektrychnykh kil u chastotnii oblasti. Postiini ta zminni parametry. Lviv: Vydavnytstvo NU “Lvivska politekhnik”, 2014, 324 p.

10. Shapovalov Yu.I., Mandziy B.A., Bachik D.R. Definition of Power of Linear Time Varying Circuits in Medium of Program Functions MAOPCS. [Shapovalov Yu.I., Mandziy B.A., Bachik D.R. Vznachennya potuzhnosti liniynih parametriceskikh kil u seredovishchi sistem programnih funktsiy MAOPCS]. *Visnik Nacional'nogo texnichnogo universitetu Ukraïni “KPI” Seriya : Radiotekhnika. Radioaparotobuduvaniya – Herald of National Technical University of Ukraine “KPI”. Series-Radio Engineering. Radio Apparatus Construction*, 2016, no. 66, pp. 29–36.

11. Kiryushin A.V. Time Varying Oscillations in Higher Educational Establishment General Course of Physic. [Kiryushin A.V. Parametriceskiye kolyebaniya v vuzovskom kurse obshchey fiziky]. *Uchenye zametki TOGU – Teaching Notes of POU*, 2014, vol. 5, no. 3, pp. 42–48.

12. Osipov V.M. In addition of Time Varying Systems. [Osipov V.M. K teorii parametriceskikh sistem]. *Izvestiya Tomskogo ordena Oktyabr'skoyj revolyucii i ordena Trudovogo Krasnogo znamenii politexnicheskogo instituta im. S. M. Kirova – Proceedings of Tomsk Polytechnical Institute*, 1974, vol. 210, pp. 35–50.

13. Kokushkin V.I. Characteristics of oscillations and rotations of linear differential system determinations. [Kokushkin V.I. Harakteristiki kol'eblosti u vrashchatelnosti resheniy lineynih differentsial'nykh sistem]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 10, pp. 1406–1407.

*Бирюк Николай Данилович, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры экспериментальной физики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: lidia@mail.ru*

*Birjuk Nikolay Danilovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Department of Experimental Physic, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: lidia@mail.ru*

*Короткова Татьяна Николаевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры физики Воронежского института МВД, Воронеж, Россия
E-mail: tn_korotkova@mail.ru*

*Korotkova Tatyana Nikolayevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated professor of Department of Physic, Voronezh Institute of Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russia
E-mail: tn_korotkova@mail.ru*

*Хорпяков Олег Станиславович, кандидат технических наук, доцент факультета информационных систем Международного института компьютерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: al17183@yandex.ru*

*Khorpyakov Oleg Stanislavovich, Candidate of Technical Sciences, Associated professor Faculty of Information Systems, International Institute of Computer Technologies, Voronezh, Russia
E-mail: al17183@yandex.ru*