УДК 517.927.25

# О СКОРОСТИ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ*

**С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Е. А. Шайна**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 01.06.2016 г.

**Аннотация**. В работе получена скорость роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с негладкими решениями, которая возникает при применении метода Фурье к математической модели, возникающей при описании малых свободных колебаний механической системы, состоящей из стержня, оба конца которого защемлены, при этом система находится во внешней среде с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения. Анализ задачи опирается на поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным, и показавший свою эффективность при изучении линейных граничных задач второго и четвертого порядков с непрерывными решениями (построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем).

**Ключевые слова**: граничная задача, математическая модель, спектральная задача, собственное значение, скорость роста.

# ABOUT THE VELOCITY OF INCREASE OF EIGENVALUE OF THE FOURTH ORDER SPECTRAL PROBLEM WITH DERIVATIVE ON THE MEASURE

**S. A. Shabrov, N. I. Bugakova, E. A. Shayna**

**Abstract**. The paper obtained the growth rate of the eigenvalues of a fourth-order spectral problem with nonsmooth solutions, which arises when applying the Fourier method to a mathematical model that arises when describing small free oscillations of a mechanical system consisting of a rod, both ends of which are clamped, while the system is in the outer environment with localized features leading to a loss of smoothness in the solution. The analysis of the problem is based on the pointwise approach proposed by Yu. V. Pokorny, and has shown its effectiveness in studying linear second- and fourth-order boundary value problems with continuous solutions (an exact parallel was built to the classical theory of ordinary differential equations down to oscillation theorems).

**Keywords**: boundary problem, math model, spectral problem, eigenvalue, the velosity of growth.

Изложенный в [1] метод, с помощью которого получена оценка скорости роста собственных значений классической граничной задачи с гладкими решениями, в работах [2], [3] адаптирован для двух задач с негладкими решениями: одной разнопорядковой, а другой — четвертого порядка со спектральным параметром при второй производной. В этой работе этот метод адаптируется для оценки роста собственных значений спектральной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = u(\ell) = u'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

Данная спектральная задача возникает при применении метода Фурье в математической модели, которая описывает малые собственные колебания растянутого стержня, оба конца которого защемлены, и помещенного во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости.

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0,\ell]$; функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке $x$; $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0,x)$, $\sigma$ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе $E$ абсолютно непрерывных на $[0,\ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; квазипроизводная $pu''_{xx}$ абсолютна непрерывна на $[0,\ell]$; $(pu''_{xx})'_x$ — $\sigma$-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0,\ell]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0,\ell]$ функция и $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} p(x)>0$, $r(x)\geqslant 0$.

Уравнение в (1) определено на специальном расширении $\overline{[0,\ell]}_\sigma$ отрезка $[0,\ell]$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$.

Множество $\overline{[0,\ell]}_\sigma$ строится следующим образом. На $[0,\ell]$ вводим метрику $\rho(x,y)=|\sigma(x)-$ $-\sigma(y)|$. Если $S(\sigma)\neq\varnothing$, то $([0,\ell],\rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0,\ell]}_\sigma$.

Отметим, что качественная теория с негладкими решениями начала бурно развиваться после выхода в 1999 году работы Ю. В. Покорного [4]. Так вышли монографии [5], [6], работы [7], [8], [9], [10] в которых досконально изучены линейные краевые задачи второго порядка с производными по мере. Поточечный подход, используемый в линейных задачах, показал свою эффективность и в нелинейных задачах [11], [12], и в задачах с разрывными решениями [13], [14], [15], и в граничных задачах четвертого порядка [16], [17], [18], а также в краевых задачах гиперболического типа [19], [20].

Эта эффективность объясняется достаточно просто: при использовании производных по мере уравнение становится поточечно заданным, то есть обыкновенным, что дает возможность применения качественных методов анализа решений, в отличие от теорий обобщенных функций. Так, при использовании теории распределений по Шварцу-Соболеву, проявляются трудно разрешимые проблемы. Во-первых, удается установить лишь слабую разрешимость уравнения, что для приложений мало пригодно, во-вторых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную, которую не удается решить до сих пор, и, в-третьих, уравнения в обобщенных функциях — это равенство двух функционалов, определенных над пространством основных функций, и применение качественных методов анализа к таким уравнениям крайне затруднительно. Здесь можно вспомнить работу [21] Мышкиса, в которой для уравнений с обобщенными коэффициентами удалось установить аналог теорем Штурма о перемежаемости нулей.

## ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ

Как показано в работе [17] задача

$$\begin{cases} Lu\equiv(pu''_{xx})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=F'_\sigma; \\ u(0)=u'(0)=u(\ell)=u'(\ell)=0, \end{cases}$$

является невырожденной (однородная задача имеет только тривиальное решение), поэтому она имеет единственное решение для любой $\sigma$–абсолютно непрерывной функции $F(x)$.

Через $K(x,s)$ обозначим минималь следующего функционала

$$\Phi(u)=\int_0^\ell \frac{pu''^2_{xx}}{2}dx+\int_0^\ell \frac{ru'^2_x}{2}\,dx+\int_0^\ell \frac{u^2}{2}\,dQ-\int_0^\ell u\,d\theta(x-s), \tag{2}$$

где $\theta(x-s)$ — функция Хевисайда. Существование $K(x,s)$ доказывается точно так же, как и в работе [17].

Тогда, задача (1) эквивалента интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_0^\ell K(x,s)u(s)M'_\sigma(s)\,d\sigma, \tag{3}$$

или, вспоминая теорему о замене [7],

$$u(x)=\lambda\int_0^\ell K(x,s)u(s)\,dM(s).$$

Нетрудно видеть, что интегральный оператор $(Au)(x)=\int\limits_0^\ell K(x,s)u(s)d\,M(s)$ действует в $C[0;\ell]$ и вполне непрерывен, следовательно, его спектр состоит из собственных значений, при этом каждое из них имеет конечную кратность. Более того, так как задача является симметричной: для всяких $u,v\in E$ справедливо равенство $(Lu,v)=(u,Lv)$, то спектр вещественен.

Покажем, что у каждого собственного значения присоединенные элементы отсутствуют, алгебраическая кратность равна единице.

Предположим противное: у некоторого собственного значения $\lambda_k$ существует цепочка присоединенных ненулевых векторов. Тогда, первая (за собственной функцией, которую мы обозначим через $\varphi_k(x)$) является решением граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma+uQ'_\sigma=\lambda_k M'_\sigma u+\varphi_k,\\ u(0)=u'(0)=u(\ell)=u'_x(\ell)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим ее через $\psi(x)$.

Подставив $\psi(x)$ в уравнение из (4), умножив полученное тождество на $\varphi_k(x)$ и проинтегрировав по мере $\sigma$ вдоль всего отрезка $[0,\ell]$, получим равенство

$$\int_0^\ell (p\psi''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k\,d\sigma-\int_0^\ell (r\psi'_x)'_\sigma\varphi_k\,d\sigma+\int_0^\ell \psi Q'_\sigma\varphi_k\,d\sigma=\lambda_k\int_0^\ell \psi M'_\sigma\varphi_k\,d\sigma+\int_0^\ell \varphi_k^2\,d\sigma. \tag{5}$$

Первый и второй интеграл равенства (5) проинтегрируем по частям (первый интеграл — четрыре раза, второй — два):

$$\int_0^\ell (p\psi''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k\,d\sigma=(p\psi''_{xx})'_x\varphi_k\Big|_0^\ell-p\psi''_{xx}{\varphi_x}'_x\Big|_0^\ell+p{\varphi_k}''_{xx}\psi'\Big|_0^\ell-(p{\varphi_k}''_{xx})'_\psi\Big|_0^\ell+\int_0^\ell (p{\varphi_k}''_{xx})''_{x\sigma}\psi\,d\sigma=$$

$$= \int\limits_0^\ell (p\varphi_k{}''_{xx})''_{x\sigma}\psi\, d\sigma \quad (6)$$

и

$$\int\limits_0^\ell (r\psi'_x)'_\sigma \varphi_k\, d\sigma = r\psi'_x\varphi_k\Big|_0^l - r\varphi_k{}'_x\psi\Big|_0^l + \int\limits_0^\ell (r\varphi_k{}'_x)'_\sigma\psi\, d\sigma = \int\limits_0^\ell (r\varphi_k{}'_x)'_\sigma\psi\, d\sigma. \qquad (7)$$

Все подынтегральные слагаемые равны нулю, так как $\varphi_k(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют краевым условиям. С учетом равенств (6) и (7), соотношение (5) принимает вид:

$$\int\limits_0^\ell [(p\varphi_k]'_{xx})''_{x\sigma}) - (r\varphi_k{}'_x)'_\sigma + Q'_\sigma\varphi_k]\psi\, d\sigma = \lambda_k\int\limits_0^\ell \psi M'_\sigma\varphi_k\, d\sigma + \int\limits_0^\ell \varphi_k^2\, d\sigma. \qquad (8)$$

Но $\varphi_k(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_k$, поэтому (8) принимает вид: $\int\limits_0^\ell \varphi_k^2\, d\sigma = 0$, откуда следует, в силу непрерывности $\varphi_k(x)$, тождество $\varphi_k(x) \equiv 0$. Последнее противоречит нетривиальности $\varphi_k(x)$.

Геометрическая простота каждого собственного значения доказана в [22].

## ПОРЯДОК РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Собственные значения спектральной задачи (4) определяются как нули оператора Фредгольма, который в нашем случае определяется следующим образом (см, например, [23], [1])

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n,$$

где

$$A_n = \int\limits_0^l \ldots \int\limits_0^l \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & \ldots & K(s_1,s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(s_n,s_1) & \ldots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} dM(s_1)\ldots dM(s_n).$$

Точно так же, как и в [23], [1], доказывается сходимость ряда при всех $\lambda$. Однако, применить схему, использованную в [1], в нашем случае нельзя, так как $K(x,s)$ не имеет непрерывной производной по $x$.

Однако, разности $K(s_{i+1},s_i) - K(s_i,s_j)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1, j = 1,2,\ldots,n)$ при некоторых $\kappa_{ij}$, заключенными между $\inf\limits_{x,s\in[0;\ell]} K'_x(x,s)$ и $\sup\limits_{x,s\in[0;\ell]} K'_x(x,s)$, можно записать в следующем виде $K(s_{i+1},s_i) - K(s_i,s_j) = \kappa_{ij}(s_{i+1} - s_i)$. Так как $K(x,s)$ — решение уравнения $Lu = \theta(x-s)$, то $K'_x(x,s)$ ограничена на всем квадрате $[0,\ell]\times[0,\ell]$. Поэтому, величины $\kappa_{i,j}$ ограничены в совокупности некоторой постоянной $C$.

Тогда, при $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \ldots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \ldots & K(s_2,s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(s_{n-1},s_1) & K(s_{n-1},s_2) & \ldots & K(s_{n-1},s_n) \\ K(s_n,s_1) & K(s_n,s_2) & \ldots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_{n-1},s_1) & K(s_{n-1},s_2) & \dots & K(s_{n-1},s_n) \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_n - s_{n-1}) = \ldots =$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & \dots & \kappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{n-2,1} & \kappa_{n-2,2} & \dots & \kappa_{n-2,n} \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_{n-1}).$$

Применяя неравенство Адамара и оценку

$$|(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_{n-1})| \leqslant \left(\frac{\ell}{n-1}\right)^{n-1},$$

для $A_n$ (при $n \geqslant 2$) будем иметь

$$|A_n| \leqslant C^n \cdot n^{\frac{n}{2}}(M(\ell) - M(0))^n \left(\frac{\ell}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{\ell}(C(M(\ell) - M(0))\ell)^n \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}}.$$

Так как для любого фиксированного положительного $\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = 0$, то при достаточно большом $n$ (зависящем от $\varepsilon$), справедливо неравенство

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{\ell}(C(M(\ell) - M(0))\ell)^n n^{-\frac{n}{2}+\varepsilon n}.$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [24], [25], показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $\frac{2}{3} - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $2/3$, следовательно, для произвольности $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/3+\delta}} \tag{9}$$

сходится. Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — $\sigma$–абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$, $Q(x)$ — не убывает на $[0,l]$ и $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} r(x) \geqslant 0$. Пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи* (1). *Тогда ряд* (9) *сходится при любом $\delta > 0$.*

Доказанная теорема позволяет получить достаточные условия применимости метода Фурье к математической модели четвертого порядка с негладкими решениями, описывающей малые свободные колебания стрежня, оба конца которого защемлены, и помещенного во внешнюю среду с локализованными особенностями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит–ры. — 1957. — 267 с.

2. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

3. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи с производными по мере и спектральным параметром при второй производной / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина, М. В. Шаброва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 203–207.

4. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

5. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

6. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

7. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

8. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

9. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

10. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

11. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

12. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

13. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М. Б. Давыдова, Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

14. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

15. Покорный Ю. В. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

16. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

17. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

18. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

19. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

20. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

21. Мышкис, А. Д. О решениях линейного однородного двумерного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенными коэффициентами / А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.

22. Шабров, С. А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере / Диссертация на соискание уч. ст. д–ра физ-мат. наук. — Воронеж, 2017. — 412 с.

23. Гантмахер, Ф. Р. Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М. : Гос. изд. тех–теор. лит–ры. — 1950. — 359 с.

24. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — М. : Наука, 1980. — 464 с.

25. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : Гос. изд. тех-теор. лит–ры, 1956. — 632 с.

## REFERENCES

1. Lovitt W.V. Linear integral equations. [Lovitt U.V. Linejnye integral’nye uravneniya]. Moscow, 1957, 267 p.

2. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj raznoporyadkovoyj spektral’noyj zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 186–195.

3. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M., Shabrova M.V. On the rate of growth of the eigenvalues of one spectral problem with derivatives of the measure and a spectral parameter in the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il’ina O.M., Shabrova M.V. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj spektral’noyj zadachi s proizvodnymi po mere i spektral’nym parametrom pri vtoroyj proizvodnoyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 203–207.

4. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt’esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial’nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

5. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial’nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

6. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral’nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

7. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul’snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

8. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

9. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral’noj zadachi Shturma-Liuvillya].

*Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

10. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

11. Davydova M. B., Shabrov S. A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

12. Davydova M. B., Shabrov S. A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M. B., Shabrov S. A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

13. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A., Davydova M.B. Stieltjes differential pulsed problems with discontinuous solutions. [Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A., Davydova M.B. Differencial Stilt'esa v impul'snyx zadachax s razryvnymi resheniyami]. *Doklady Akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 2009, vol. 428, no. 5, pp. 595–597.

14. Zvereva M.B. Differential equations with discontinuous solutions: qualitative theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

15. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. About problem of Sturm - Liouville for discontinuous strings. [Pokornyj Yu.V., M.B. Zvereva, S.A. Shabrov O zadache Shturma–Liuvillya dlya razryvnoj struny]. *Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskij region. Matematika i mexanika sploshnyx sred. Specvypusk. Rostov-na-Donu — Proceedings of the universities. North Caucasus region. Mathematics and mechanics of continuous media. Special Issue. Rostov-on-Don*, 2004, pp. 186–190.

16. Shabrov S.A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimiosobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

17. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon Funkciya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

18. Shabrov S.A. A necessary condition for a minimum of a quadratic functional with Stieltjes integral. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

19. Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon Uniqueness Of The Solution Mathematical Model Of Forced String Oscillation Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Meach Mon O edinstvennosti resheniya matematicheskoj modeli vynuzhdennyx kolebanij struny s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, iss. 1, pp. 50–55.

20. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon About Unique Classical Solution Mathematical Model Of Forced Vibrations Rod System With Singularities. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon O edinstvennosti klassicheskogo resheniya matematicheskoj

modeli vynuzhdennyx kolebanij sterzhnevoj sistemy s osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 74–80.

21. Myshkis A.D. On solutions of linear homogeneous two-dimensional second-order differential inequality with generalized coefficients. [Myshkis A.D. O resheniyax linejnogo odnorodnogo dvumernogo differencial'nogo neravenstva vtorogo poryadka s obobshhennymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 5, pp. 615— 619.

22. Shabrov S.A. Mathematical modeling and qualitative methods of analysis of boundary value problems with derivatives on the measure. [Shabrov S.A. Matematicheskoe modelirovanie i kachestvennye metody analiza granichnyx zadach s proizvodnymi po mere]. Thesis for the degree of doctor of physical and mathematical Sciences, Voronezh, 2017, 412 p.

23. Gantmakher F.R., Krein M.G. Oscillating matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems. [Gantmaxer F.R., Krejn M.G. Oscilyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mexanicheskix sistem]. Moscow, 1950, 359 p.

24. Titchmarsh E. Theory of functions. [Titchmarsh E. Teoriya funkcij]. Moscow: Nauka, 1980, 464 p.

25. Levin B.Ya. The distribution of roots of entire functions. [Levin B.Ya. Raspredelenie kornej celyx funkcij]. Moscow, 1956, 632 p.

*Шабров Сергей Александрович, доцент кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент, Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru*

*Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Doctor of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru*

*Бугакова Надежда Игоревна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru*

*Bugakova Nadezhda Igorevna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru*

*Шайна Екатерина Александровна, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
*E-mail: katerinashaina@mail.ru*
*Тел.: +7(473) 220–86–90*

*Shayna Ekaterina Aleksandrovna, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia*
*E-mail: katerinashaina@mail.ru*
*Tel.: +7(473) 220–86–90*