УДК 517.9

О МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЯХ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ГАРМОНИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ*

В. Е. Струков, И. И. Струкова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.06.2018 г.

Аннотация. Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из однородных пространств и распределений из гармоничных пространств. В работе рассматривается целый ряд однородных пространств функций. Вводится понятие гармоничного пространства распределений, которое строится по одному из однородных пространств функций. Изучаются свойства гармоничных пространств распределений, они наделяются структурой банаховых модулей. Доказывается, что каждое такое пространство изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций. На основе определений медленно меняющейся и периодической на бесконечности функций из однородного пространства вводятся понятия медленно меняющегося и периодического на бесконечности распределений из гармоничного пространства. С помощью методов абстрактного гармонического анализа в статье получены свойства таких распределений, в частности, критерии принадлежности распределения классу медленно меняющихся на бесконечности распределений. Построены ряды Фурье периодических на бесконечности распределений и получены некоторые их свойства. Результаты статьи получены с существенным использованием теорий изометрических представлений и банаховых модулей.

Ключевые слова: медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, однородное пространство, банахово пространство, ряд Фурье, распределение медленного роста, медленно меняющееся на бесконечности распределение, периодическое на бесконечности распределение, банахов модуль.

ABOUT SLOWLY VARYING AND PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS FROM HOMOGENEOUS SPACES AND HARMONIC DISTRIBUTIONS

V. E. Strukov, I. I. Strukova

Abstract. The article under consideration is devoted to some problems of harmonic analysis of slowly varying and periodic at infinity functions from homogeneous spaces and distributions from harmonic spaces. We consider a number of homogeneous function spaces and on the basis of them we construct harmonic spaces of distributions. Then we study their properties, endow them with the structure of Banach modules and prove them to be isometrically isomorphic to the corresponding homogeneous function spaces. On the basis of definitions of slowly varying and periodic at infinity functions we design the concept of slowly varying and periodic at infinity distributions from harmonic spaces. By means of the methods of abstract harmonic analysis we study the properties of those distributions. In particular, we derive the conditions for a distribution to be slowly varying at infinity. For periodic at infinity distributions we construct Fourier series and study their properties. The results of the article are received with essential use of methods of isometric representations and Banach modules theories.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097.

Keywords: slowly varying at infinity function, periodic at infinity function, homogeneous space, Banach space, Fourier series, distribution of slow growth, slowly varying at infinity distribution, periodic at infinity distribution, Banach module.

1. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End\,X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Символом $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ мы будем обозначать линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций со значениями в X.

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в X, называется *однородным,* если выполнены условия:
(a) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(\mathbb{R}, X)$, причем вложение $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \subset S^1(\mathbb{R}, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);
(b) в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ определена и ограничена группа $S(t),\ t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t),\ s, t \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X); \tag{1}$$

(c) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и выполнено неравенство $\|f*x\| \leqslant C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C \geqslant 1$ (как правило, $C = 1$);
(d) $\varphi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ для любой $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi$, причем $\|\varphi x\| \leqslant \|\varphi\|\|x\|$ и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно.

Однородные пространства функций изучались в работах [1], [2].

Пример 2. Следующие банаховы пространства функций являются однородными. Все они являются линейными подпространствами из $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$.

1. Пространства $L^p = L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов) функций. Нормы в данных пространствах имеют вид $\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p_X dt\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$.

2. Пространство $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}, X)$ существенно ограниченных (классов) функций с нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X$.

3. Пространства Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, состоящие из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup\limits_{s \in \mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \|x(s+t)\|^p_X dt\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$, принимаемая за норму (см. [3–5]).

4. Пространства амальгам Винера $(L^p, l^q) = (L^p(\mathbb{R}, X), l^q(\mathbb{R}, X))$, $p, q \in [1, \infty)$, состоящие из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$ таких, что
$$\|x\|_{p,q} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \|x(s+k)\|^p ds \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty, \ p, q \in [1, \infty).$$
Они являются однородными относительно следующей эквивалентной нормы:
$$\|x\|_{p,q} = \sup_{t\in[0,1]} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \|x(s+t+k)\|^p ds \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty, \ p, q \in [1, \infty).$$

5. Пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ ограниченных непрерывных функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$, $x \in C_b$ ($C_b(\mathbb{R}, X)$ – замкнутое подпространство из $L^\infty(\mathbb{R}, X)$).

6. Подпространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X) \subset C_b$ равномерно непрерывных функций из C_b.

7. Подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $t \in \mathbb{R}$).

8. Подпространство $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\tau) - x(\tau)\| = 0$, $t, \tau \in \mathbb{R}$) (см. [6], [7]).

9. Подпространство $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ функций, ω-периодических на бесконечности, $\omega \in \mathbb{R}_+$ (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\| = 0$, $t \in \mathbb{R}$) (см. [6], [8]).

10. Пространства $C^k = C^k(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{N}$, функций, k раз непрерывно дифференцируемых, с ограниченной k-ой производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty$.

11. Пространства Гельдера $C^{k,\alpha} = C^{k,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0, 1]$,
$$C^{k,\alpha} = \left\{ x \in C^k : \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{t\neq s\in\mathbb{R}} \frac{|x^{(k)}(t) - x^{(k)}(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\},$$
$\|x\|_{C^{k,\alpha}} = \|x\|_{C^k} + \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}}$.

12. Подпространство $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbb{R}, X)$ функций из $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ ограниченной вариации, т.е. функций, для которых конечна величина $\|x\|_\mathbb{V} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} V_t^{t+1}(x) + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x\|_X$, принимаемая за норму.

В дальнейшем символом $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать однородное пространство. В случае $X = \mathbb{C}$ также используется обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Символом $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X) = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$: функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывна$\}$. Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ будет обозначаться наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$, где функция φ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{supp}\varphi$ – компакт.

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура задается сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. [5, 9–13]). В частности, пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ совпадают с пространствами S-непрерывных векторов (см. [1]). Следует отметить, что $(L^p(\mathbb{R}, X))_c = L^p(\mathbb{R}, X)$, $(L^\infty(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$; $(C_b(\mathbb{R}, X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, $(C_b(\mathbb{R}, X))_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$.

2. МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИЕСЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 3. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, обозначаемое символом $\mathcal{F}_{sl,\infty} = \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, рассматривалось в [1], [2].

При $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ в теории дифференциальных уравнений (см. [14, р. 3.6.3]) использовалось эквивалентное определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.* При $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ пространство медленно меняющихся на бесконечности функций изучалось в [6], [7] и обозначалось символом $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t), t \in \mathbb{R},$ где c – вектор из банахова пространства X и x_0 – любая функция из $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. При $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$ примерами медленно меняющихся на бесконечности функций являются:

1) $x_1(t) = \sin \ln(1 + t^2),\ t \in \mathbb{R};$ 2) $x_3(t) = \sin \sqrt{1 + |t|},\ t \in \mathbb{R};$

3) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ со свойством $x' \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Следующие два результата были получены в [2].

Теорема 4. *Пространство $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладает следующими свойствами:*

1) для того, чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$;

2) для того, чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$;

3) если $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то множество $\Lambda(x)\backslash\{0\}$ содержится в непрерывном спектре функции x и $\Lambda_{ess}(x) \subset \{0\}$.

Здесь символом $\Lambda_{ess}(x)$ обозначен существенный спектр функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ (см. [2]).

Теорема 5. *Если $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то существует функция $x_0 \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $x - x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.*

Следствие 6. *Если $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то существует функция $x_0 \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $x - x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$. Кроме того, найдется ограниченная целая функция $y_0 : \mathbb{R} \to X$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до ограниченной целой функции сколь угодно малого экспоненциального типа, и такая, что $x - y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.*

Определение 7. Пусть $\omega > 0$. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *ω-периодической на бесконечности*, если $(S(\omega)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Равномерно непрерывные периодические на бесконечности функции изучались в [6], [7]. Множество ω-периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{F}_{\omega,\infty} = \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Символом $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ обозначим подпространство банахова пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, состоящее из ω-периодических функций, т.е. функций $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, для которых выполнено условие $S(\omega)x = x$.

Отметим, что оба множества $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образуют линейные замкнутые подпространства банахова пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$. Банахово пространство $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ образует замкнутое подпространство в $\mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, имеют место включения $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, при этом все они инвариантны относительно операторов $S(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Примерами периодических на бесконечности функций из $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ являются:

1) предельно периодические функции, т.е. функции $x : \mathbb{R} \to X$, представимые в виде $x = y + y_0$, где $y \in \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$, $y_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$;

2) функция $\overline{x} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ такая, что она совпадает с $x \in \mathcal{F}_\omega(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\overline{x}(t)\| = 0$;

3) любая функция из $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$;

4) любая функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$, представимая в виде $x = \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k(t)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 8. *Каноническим рядом Фурье* функции $x \in \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},$$

где функции $x_n : \mathbb{R} \to X,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, – обычные коэффициенты Фурье непрерывной периодической функции x.

Определение 9. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $y_n,\ n \in \mathbb{Z}$, – такие функции из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, для которых $y_n - x_n \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (3).

В [2] получены следующие

Лемма 1. *Канонические коэффициенты Фурье x_n, $n \in \mathbb{Z}$, являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т.е. $x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.*

Теорема 10. *По любой функции $x \in \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ можно построить обобщенный ряд Фурье (4) такой, что $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Более того, функции y_n, $n \in \mathbb{Z}$, могут быть выбраны так, что они допускают расширение на $\mathbb{C}$ до ограниченных целых функций сколь угодно малого экспоненциального типа.*

Теорема 11. *Коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье функции $x \in \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|_{\mathcal{F}} = 0$.*

3. ГАРМОНИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть X – комплексное банахово пространство. Символом $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ обозначим пространство Шварца, т. е. линейное полинормированное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ таких, что для всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует $C > 0$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|t^m \varphi^{(n)}(t)\|_X < C$. Такие функции называют *пробными*.

Будем говорить, что последовательность $(\varphi_k,\, k \in \mathbb{N})$, $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, *сходится* к функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, если при всех $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ последовательность $t \mapsto t^m \varphi_k^{(n)}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, равномерно сходится к функции $t \mapsto t^m \varphi^{(n)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \to X$ – линейный оператор. Будем обозначать значение оператора Φ на $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ символом $\Phi(\varphi)$. Линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \to X$ называют *непрерывным*, если $\Phi(\varphi_k)$ сходится к $\Phi(\varphi)$ всякий раз, когда $\{\varphi_k\}$ сходится к φ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$. Всякий непрерывный линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \to X$ называют *распределением* (или *обобщенной функцией) медленного роста* на $\mathbb{R}$ со значениями в X. Обозначим символом $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ линейное пространство всех распределений медленного роста с естественными операциями сложения и умножения на число (более подробно для скалярных распределений из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ см. [15]).

Производной распределения $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ будем называть распределение $D\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$, определенное формулой $(D\Phi)(\varphi) = -\Phi(\dot{\varphi})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$. Отметим, что оператор дифференцирования $D : \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ – линейный и непрерывный оператор. Из определения пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ следует, что любое распределение $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ дифференцируемо бесконечное число раз.

Пусть $x \in S^1(\mathbb{R}, X)$ (в частности, x может быть непрерывной функцией). Ясно, что оператор Φ_x, действующий по правилу $\Phi_x(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\varphi(t)dt$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$. Распределение Φ_x, порожденное функцией $x \in S^1(\mathbb{R}, X)$, называют *регулярным*.

В пространстве распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ действует группа $S : \mathbb{R} \to End\, \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ операторов сдвига

$$(S(t)F)(\varphi) = F(S(-t)\varphi),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X),\ t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Свертка распределения $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ с функцией $f \in L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$(f * F)(\varphi) = F(\widetilde{f} * \varphi),\ F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X),\ f \in L^1(\mathbb{R}), \tag{6}$$

где функция $\widetilde{f}$ имеет вид $\widetilde{f}(\tau) = f(-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Далее будут введены гармоничные пространства распределений и изучены их свойства.

Рассмотрим последовательность $(f_n,\, n \in \mathbb{N})$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, вида

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!} e^{-t} & , \quad t > 0, \\ 0 & , \quad t \leqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что преобразование Фурье $\widehat{f_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $\widehat{f_n}(\lambda) = \frac{1}{(i\lambda+1)^n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Каждому однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, которые определяются как линейные пространства функций вида $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) = \{f_n * x \mid x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)\}$, $n \in \mathbb{N}$, с нормой $\|f_n * x\|_{\mathcal{F}^{(n)}} = \|f_n * x\|_{\mathcal{F}} + \|x\|_{\mathcal{F}}$, где функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, задаются формулой (7). Отметим, что все пространства $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{N}$, также являются однородными.

Определение 12. Линейное подпространство $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ называется *гармоничным пространством распределений,* если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого распределения Φ из $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ найдется функция φ из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ такая, что $\Phi = (D + I)^n \varphi$ и $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. При этом для пространства $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будем использовать обозначение $\mathcal{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ и говорить, что пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ *соответствует однородному пространству функций* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Заметим, что в определении 12 функция φ представима в виде $\varphi = f_n * \Phi$, где функция f_n из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (7).

Под пространством $\mathcal{F}^{(0)}(\mathbb{R}, X)$ будем понимать само однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$. Тогда каждому однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения 12 вытекает, что любое из этих пространств можно рассматривать как гармоничное пространство распределений.

В каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим операторы $\mathbb{D}_n^m : D(\mathbb{D}_n^m) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}^{(n-m)}(\mathbb{R}, X)$ вида

$$\mathbb{D}_n^m = (D + I)^m, \ m \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

и операторы $\mathbb{D}_n^{-m} : D(\mathbb{D}_{-m}) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}^{(n+m)}(\mathbb{R}, X)$, действующие по правилу

$$\mathbb{D}_n^{-m}\Phi = f_m * \Phi, \ \Phi \in \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X), \ m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где функция f_m из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (7).

Когда ясно, о каком именно пространстве идет речь, вместо обозначения $\mathbb{D}_n^m$ будем использовать более короткое обозначение $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$. При этом под оператором $\mathbb{D}_n^0$ будем понимать тождественный оператор I, действующий в соответствующем пространстве $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что операторы $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $\mathbb{D}^m\mathbb{D}^{-m} = I$.

Кроме того, в каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим оператор $\mathbb{S}_n(f) : \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ свертки распределения Φ из $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, задаваемый формулой $\mathbb{S}_n(f)\Phi = f * \Phi$. При $n = 0$ вместо $\mathbb{S}_0(f)$ будем писать просто $\mathbb{S}(f)$.

Далее символом $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ будет обозначаться одно из пространств функций или распределений $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемое как гармоничное пространство распределений.

Теорема 13. *Любое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.*

Утверждение теоремы 13 следует непосредственно из определения 12. При этом изометрию осуществляет оператор $\mathbb{D}^n$ для соответствующего $n \in \mathbb{Z}$, определяемый одной из формул (8) или (9).

Также из теоремы 13 и следует, что каждое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ образует банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль, в котором действует группа S сдвигов вида (5) и модульная структура задается формулой (6), в которой распределение F принадлежит соответствующему гармоничному пространству распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$. Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. [5, 9–13]). В частности, пространства $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X) = (\mathbb{F}(\mathbb{R}, X))_c$ совпадают с пространствами S-непрерывных векторов (см. [1]).

Гармоничным пространством распределений является, например, банахово пространство $M(\mathbb{R}, X)$ векторных (со значениями в X) борелевских мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ со сверткой мер в качестве умножения.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теперь введем понятия медленно меняющегося и периодического на бесконечности распределений из гармоничного пространства распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$. В соответствии с определением 12 можно положить $\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}^{(-n)}(\mathbb{R}, X)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Пространства $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ и $\mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ определим следующим образом:

$\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)\}$;

$\mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)\}$.

Определение 14. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющимся на бесконечности,* если $S(\alpha)\Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Определение 15. Пусть $\omega > 0$. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *ω-периодическим на бесконечности,* если $S(\omega)\Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$.

Множества медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений обозначим символами $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Непосредственно из определений следует, что $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, образуют линейные замкнутые подпространства из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, инвариантные относительно группы сдвигов S.

Из теоремы 13 вытекают следующие две леммы:

Лемма 2. *Пространства $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, т.е. распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является медленно меняющимся на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является медленно меняющейся на бесконечности.*

Лемма 3. *Пространства $\mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, т.е. распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является ω-периодическим на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является ω-периодической на бесконечности.*

Тогда пространствам $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и $\mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ можно дать эквивалентные определения:

$\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)\}$;

$\mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = \mathbb{D}^n y, \ y \in \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)\}$.

Таким образом, для медленно меняющихся и периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств справедливы результаты, аналогичные полученным для медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций из однородных пространств. В частности, это позволяет строить ряды Фурье периодических на бесконечности распределений из гармоничных пространств и изучать их свойства.

Сначала приведем свойства медленно меняющихся на бесконечности распределений из гармоничных пространств.

Из теоремы 4 следует

Теорема 16. *Пространство $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладает следующими свойствами:*

1) для того, чтобы распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежало пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$;

2) для того, чтобы распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$ принадлежало пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * \Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$;

3) если распределение Φ принадлежит пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, то множество $\Lambda(\Phi)\backslash\{0\}$ содержится в непрерывном спектре распределения Φ и $\Lambda_{ess}(\Phi) \subset \{0\}$.

Рассмотрим функции e_k, $k \in \mathbb{Z}$, следующего вида $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 17. *Каноническим рядом Фурье* распределения $\Phi \in \mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_k e_k$, где Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, — такие распределения из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, что функции $y_k = \mathbb{D}^{-n}\Phi_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ являются каноническими коэффициентами Фурье функции $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Такие распределения Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, будем называть *каноническими коэффициентами Фурье* распределения Φ.

Определение 18. *Обобщенным рядом Фурье* распределения $\Phi \in \mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ называется любой ряд вида $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \Psi_k e_k$, где Ψ_k, $k \in \mathbb{Z}$, – такие распределения из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R}, X)$, для которых $\Psi_k - \Phi_k \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R}, X)$, а распределения Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, — канонические коэффициенты Фурье распределения Φ.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 4. *Канонические коэффициенты Фурье Φ_k, $k \in \mathbb{Z}$, распределения $\Phi \in \mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ являются медленно меняющимися на бесконечности, т.е. $\Phi_k \in \mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Из леммы 4 и теоремы 11 следует

Теорема 19. *Коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье распределения $\Phi \in \mathbb{F}_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ принадлежат пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и удовлетворяют условию $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Psi_k\|_{\mathbb{F}} = 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Струков, В. Е. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства / В. Е. Струков, И. И. Струкова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2018. — Т. 50, № 3. — С. 254–264.

2. Струкова, И. И. Гармонический анализ периодических на бесконечности функций в однородных пространствах / И. И. Струкова // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — № 2(39). — С. 29–38.

3. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : МГУ, 1978. — 206 с.

4. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

5. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3–54.

6. Baskakov A. Harmonic analysis of functions periodic at infinity / A. Baskakov, I. Strukova // Eurasian Math. J. — 2016. — V. 7, № 4. — P. 9–29.

7. Струкова, И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы / И. И. Струкова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 161–165.

8. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 186–198.

9. Росс, К. Абстрактный гармонический анализ / К. Росс, Э. Хьюитт. — М. : Мир, 1975. — Т. 2. — 899 с.

10. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2016. — 152 с.

11. Баскаков, А. Г. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, И. И. Струкова, И. А. Тришина // Сиб. матем. журн. — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 293–308.

12. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // СМФН. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.

13. Баскаков, А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 1978. — Т. 24, № 2. — С. 195–206.

14. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 535 с.

15. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1981. — 250 с.

REFERENCES

1. Strukov V.E., Strukova I.I. About four definitions of almost periodic at infinity functions from homogeneous space. [Strukov V.E., Strukova I.I. O chetyrex opredeleniyax pochti periodicheskoyj na beskonechnosti funkcii iz odnorodnogo prostranstva]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika — Research Bulletin of Belgorod State University. Mathematics. Physics*, 2018, vol. 50, no. 3, pp. 254–264.

2. Strukova I.I. Harmonic analysis of periodic at infinity functions in homogeneous spaces. [Strukova I.I. Garmonicheskiyj analiz periodicheskix na beskonechnosti funkciyj v odnorodnyx prostranstvax]. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie — Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2017, no. 2 (39), pp. 29–38.

3. Levitan B.M., Zhikov V.V. Almost periodic functions and differential equations. [Levitan B.M., Zhikov V.V. Pochti-periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya]. Moscow, 1978, 206 p.

4. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie lineyjnyx differencial'nyx uravneniyj metodami spektral'noyj teorii raznostnyx operatorov i lineyjnyx otnosheniyj]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

5. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. [Baskakov A.G., Krishtal I.A. Garmonicheskiyj analiz kauzal'nyx operatorov i ix spektral'nye svoyjstva]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 3–54.

6. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J., 2016, vol. 7, no. 4, pp. 9–29.

7. Strukova I.I. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. [Strukova I.I. Spektry algebr medlenno menyayushhixsya i periodicheskix na beskonechnosti funkciyj i banaxovy predely]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 161–165.

8. Strukova I.I. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. [Strukova I.I. O teoreme Vinera dlya periodicheskix na beskonechnosti funkciyj]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 186–198.

9. Hewitt E., Ross K.A. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. [Ross K., X'yuitt E. Abstraktnyyj garmonicheskiyj analiz. T. 2]. Moscow, 1975, 899 p.

10. Baskakov A.G. Harmonic analysis in Banach modules and linear operators spectral theory. [Baskakov A.G. Garmonicheskiyj analiz v banaxovyx modulyax i spektral'naya teoriya lineyjnyx operatorov]. Voronezh: VSU, 2016, 152 p.

11. Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. [Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. Pochti periodicheskie na beskonechnosti resheniya differencial'nyx uravneniyj s neogranichennymi operatornymi koefficientami]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 293–308.

12. Baskakov A.G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Teoriya predstavleniyj banaxovyx algebr, abelevyx grupp i polugrupp v spektral'nom analize lineyjnyx operatorov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 9, pp. 3–151.

13. Baskakov A.G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. [Baskakov A.G. Spektral'nye kriterii pochti periodichnosti resheniyj funkcional'nyx uravneniyj]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1978, vol. 24, no. 2, pp. 195–206.

14. Daletsky Yu.L., Krein M.G. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. [Daletsky Yu.L., Krein M.G. Ustoyjchivost' resheniyj differencial'nyx uravneniyj v banaxovom prostranstve]. Moscow, 1970, 535 p.

15. Vladimirov V.S. Mathematical physics equations. [Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoyj fiziki]. Moscow: Nauka, 1981, 250 p.

Струков Виктор Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета ПММ, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com
Тел.: 8–908–131–68–75

Strukov Victor Evgenievich, Ph. D., research associate of System analysis and management faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics department, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com
Tel.: 8–908–131–68–75

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета ПММ, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Тел.: 8–904–212–77–49

Strukova Irina Igorevna, Ph. D., research associate of System analysis and management faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics department, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Tel.: 8–904–212–77–49