УДК 517.9

О НОСИТЕЛЕ ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМ ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛОМ ПО ОКРУЖНОСТИ ОТ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ПУАССОНА

Е. Л. Санина, С. А. Рощупкин

Воронежский государственный университет,
Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина

Поступила в редакцию 10.01.2017 г.

Аннотация. В теории интегральных преобразований и их приложений (в компьютерной томографии) часто необходима теорема о носителе функции, сферическое среднее сдвига которой равно нулю при достаточно большом шаге сдвига. Здесь роль сдвига выполняет обобщенный сдвиг Пуассона, а соответствующей сферический интеграл рассмотрен со специальным весом, ассоциированным со сдвигом Пуассона. Доказан следующий результат: если весовое сферическое среднее обобщенного сдвига равно нулю при достаточно большом модуле сдвига, то сама функция имеет ограниченный носитель.

Ключевые слова: Обобщенный сдвиг Пуассона, сферическое преобразование координат, лемма Хелгасона о носителе.

ABOUT SUPORT FUNCTION WITH ZERO WEIGHT INTEGRAL ON THE CIRCLE FROM THE GENERALIZED POISSON SHIFT

E. L. Sanina, S. L. Roshchupkin

Abstract. In the theory of integral transformations and their applications (in computed tomography), a theorem on the support of a function is often necessary, the spherical mean shift of which is zero for a sufficiently large shift step. Here, the role of the shift is performed by the generalized Poisson shift, the corresponding spherical integral is considered with a special weight associated with the Poisson shift. The following result is proved: if the weight spherical average of the generalized shift is zero for a sufficiently large shear modulus, then the function itself has a limited support.

Keywords: Generalized Poisson Shift, Spherical Coordinate Transformation, Helgason's lemma about the carrier.

Одномерный обобщенный сдвиг Пуассона размерности $\gamma > 0$ имеет вид [1]

$$f \to ({}^\gamma T^y f)(x) = ({}^\gamma T^y f)(x) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha\,.$$

Такие сдвиги в случае размерности $\gamma = n$, где n — натуральное число, получаются из обычного многомерного сдвига при сферическом преобразовании координат в евклидовом пространстве точек размерности n:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(|x-y|)\, g(|y|)\; dy = |S_1| \int\limits_0^\infty ({}^{n-1}T^\rho f)(r)\, g(r)\; r^{n-1}\, dr,$$

где $|S_1|$ — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}_n$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_2^2}$ (доказательство см. в [2]). В работах [3, 4] приведены формулы сферического преобразования для смешанного обобщенного сдвига ${}^{\gamma}T_x^y$. Оказалось, что наличие многих переменных ($\geqslant 2$) имеет принципиальное значение, и это не позволяет воспользоваться результатами [2] при работе с одномерным обобщенным сдвигом. Профессором Л.Н. Ляховам была поставлена задача о доказательстве одного из результатов работы [4] для случая, когда обобщенный сдвиг Пуассона применяется к функции одной переменной.

Вначале заметим, что поскольку сдвиг Пуассона имеет интегральное представление, то интегрирование с участием этого сдвига происходит в евклидовом пространстве размерность которого больше на единицу. Действительно, поскольку

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right) = f\left(\sqrt{(x-z_1)^2+z_2^2}\right),$$

где $z_1 = y\,\cos\alpha$, $z_2 = y\,\sin\alpha$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1} T^x f(y)\, g(|y|)\; dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} f\left(\sqrt{z_1-x)^2+z_2^2}\right)\, g\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)\; z_2^{\gamma-1}\, dz_1 dz_2,$$

Выделим интегрирование по окружности радиуса R:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1} f(|x-y|)\, g(|y|)\; dy = \int\limits_{0}^{\infty} g\,(R))\; dr \int\limits_{S_R} f\left(\sqrt{(z_1-x)^2+z_2^2}\right)\; z_2^{\gamma-1}\, dS_R,$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть бесклнечно дифференцируемая четная функция f такова, что функция $|x|^k f(x)$ ограничена для всех натуральных k. Предположим, что при этом для всех $R > 1$, $x \geqslant 0$ выполняется равенство*

$$\int\limits_{S_R^+} f\left(\sqrt{(z_1-x)^2+z_2^2}\right)\; z_2^{\gamma-1}\, dS_R(z) = 0, \tag{1}$$

где $S_1^+(0)$ — полуокружность $\{z = (z_1,z_2):\ |z| = y,\ z_2 > 0\}$.

Тогда $f(x) = 0$ для всех $|x| > 1$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\int\limits_0^R (T^x f)(y)\, y^\gamma\, dy = \left(\int\limits_0^\infty - \int\limits_R^\infty\right)(T^x f)(y)\, y^\gamma\, dy$$

Известно, что при интегрировании по $(0,\infty)$ обобщенный сдвиг Пуассона является самосопряженным [1, 5]. Поэтому

$$\int\limits_0^R (T^x f)(y)\, y^\gamma\, dy = \int\limits_0^\infty f(y)\, y^\gamma\, dy - \int\limits_R^\infty (T^x f)(y)\, y^\gamma\, dy$$

Здесь введем антиполярные координаты

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = y\,\cos\alpha \\ z_2 = y\,\sin\,\alpha \end{array}\right| \quad 0 < \alpha < \pi \quad \left\{\begin{array}{l} z_1 \in (-R,R) \\ z_2 \in (0,R) \end{array}\right.,$$

тогда

$$\int\limits_R^{\infty}(T^x f)(y)\,y^\gamma\,dy = C(\gamma)\int\limits_R^{\infty}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sqrt{(z_1-x)^2+z_2^2}\right)\; z_2^{\gamma-1}\,y^\gamma\,d\alpha\,y^\gamma\,dS(\theta)$$

Если $|y|=R>1$, то по условию леммы этот интеграл равен нулю и мы получим равенство

$$\int\limits_0^{R}(T^x f)(y)\,y^\gamma\,dy = \int\limits_0^{\infty} f(y)\,y^\gamma\,dy\,. \tag{2}$$

Рассмотрим левую часть этого равенства. По определению обобщенного сдвига Пуассона имеем

$$\int\limits_0^{R}(T^x f)(y)\,y^\gamma\,dy = C(\gamma)\int\limits_0^{R}\int\limits_0^{\pi} f\left(\sqrt{y^2+x^2-2xy\cos\,\alpha}\right)\;\sin^{\gamma-1}\alpha\,y^\gamma\,d\alpha\,y^\gamma\,dy$$

Обозначим через B_R круг с центром в начале координат, радиуса R. Тогда

$$\int\limits_0^{R}(T^x f)(y)\,y^\gamma\,dy = C(\gamma)\int\limits_{B_R}\widetilde{f}(z_1-x,z_2)\,z_2^{\gamma-1}\,dz,$$

где

$$\widetilde{f}(z_1,z_2) = f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right)\,.$$

Теперь равенство (2) примет вид

$$C(\gamma)\int\limits_{B_R}\widetilde{f}(z_1-x,z_2)\,z_2^{\gamma-1}\,dz = \int\limits_0^{\infty} f(y)\,y^\gamma\,dy$$

Здесь правая часть не зависит от x. Дифференцируя, получим

$$\int\limits_{B_R}\widetilde{f}'_x(z_1-x,z_2)\,z_2^{\gamma-1}\,dz = 0$$

или

$$\int\limits_{B_R}\widetilde{f}'_{z_1}(z_1-x,z_2)\,z_2^{\gamma-1}\,dz = 0\,.$$

Границу круга B_R с центром в точке $z=0$ обозначим

$$S_R(0) = \{z:\; |(z_1-x,z_2)|=R,\; z_2>0\}.$$

Применим формулу Грина интегрирования по частям в $\mathbb{R}_2$. В результате

$$\int\limits_{B_R}\widetilde{f}'_{z_1}(z_1+x,z_2)\,z_2^{\gamma-1}\,dz = \int\limits_{S_R(0)}\widetilde{f}_{z_1}(z_1-x,z_2)\,z_2^{\gamma-1}\,\cos(\overline{n},z_1)\,d\Gamma.$$

Здесь вектор внешней нормали $\overline{n}$ к окружности с центром в начале координат совпадает с радиус-вектором точки z. Поэтому

$$\cos(\overline{n},z_1) = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} = \frac{z_1}{R}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{B_R} \widetilde{f}(z_1+x,z_2)\, z_2^{\gamma}\, dz = \int\limits_{S_R(0)} \widetilde{f}(z_1-x,z_2)\, z_2^{\gamma-1}\, \frac{z_1}{R}\, d\Gamma$$

и мы имеем равенство

$$\int\limits_{S_R(0)} \widetilde{f}(z_1-x,z_2)\, z_2^{\gamma-1}\, z_1\, d\Gamma = 0$$

Учитывая равенство (1), можем записать

$$\int\limits_{S_R(0)} \widetilde{f}(z_1-x,z_2)\, (z_1-x)\, z_2^{\gamma-1}\, d\Gamma = 0.$$

Начало координат удобно перенести в точку $z_1 = x$, $z_2 = 0$, тогда получим равенство

$$\int\limits_{S_R(x,0)} \widetilde{f}(z_1,z_2)\, z_1\; z_2^{\gamma-1}\; d\Gamma = 0.$$

Отсюдя следует, что равенство (1) выполняется для функции

$$\widetilde{f}_1(z_1,z_2) = z_1\, f_1\left(\sqrt{(z_1-x)^2+z_2^2}\right).$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\int\limits_{S_R(x,0)} \widetilde{f}(z_1,z_2)\, z_1^2\; z_2^{\gamma-1}\; d\Gamma = 0.$$

Следовательно, для произвольного многочлена $P_m(z_1)$ порядка m мы имеем равенство

$$\int\limits_{S_R(x,0)} \widetilde{f}(z_1,z_2)\, P_m(z_1)\; z_2^{\gamma-1}\; d\Gamma = 0.$$

Переменную z_1 примем за параметр кривой S_R: $z_2 = \sqrt{R^2 - z_1^2}$. Тогда получим

$$\int\limits_{-R}^{R} \widetilde{f}\left(z_1,\sqrt{r^2-z_1^2}\right)\; P(z_1)\, R\, (R^2-z_1^2)^{\frac{\gamma-2}{2}}\; dz_1 = 0.$$

Для произвольного многочлена $p_m(z_1)$ такое равенство возможно лишь при условии, что

$$\widetilde{f}\left(z_1,\sqrt{R^2-z_1^2}\right) = 0$$

Поскольку точка $(z_1,\sqrt{R^2-z_1^2}\,)$ принадлежит окружности $z_1^2+z_2^2 = R^2$ при $R > 1$, а

$$\widetilde{f}\left(z_1,\sqrt{r^2-z_1^2}\right) = f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right) = f(y),$$

получаем утверждение леммы: $f(y) = 0$ для всех $|y| > 1$.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан, Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б. М. Левитан // УМН. — 1951. — Т. 6, № 2(42). — С. 102–143.

2. Ляхов, Л. Н. Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена—Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье / Л. Н. Ляхов. — Тр. ММО. — 2015. — Т. 76, № 1. — С. 67–84.

3. Ляхов, Л. Н. Сферическое преобразование обобщенного сдвига Пуассона и некоторые свойства весовых лебеговых классов функций / Л. Н. Ляхов, С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина // Проблемы математ. анализа. — Вып. 88. — С. 87–95.

4. Lyakhov, L. N. Spherical Transformation of Generalized Poisson Shift and Properties of Weighted Lebesgue Classes of Functions / L. N. Lyakhov, S. A. Roshchupkin, E. L. Sanina // Journal of mathematical sciences. — 2017. — V. 224, № 5. — P. 699–709.

5. Киприянов, И. А. Сингулярные эллиптические задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 199 с.

REFERENCES

1. Levitan B.M. Expansion into series and Fourier integrals by Bessel functions. [Levitan B.M. Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funkciyam Besselya]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1951, vol. 6, no. 2(42), pp. 102–143.

2. Lyakhov L.N. Poles L. N. The construction of the Dirichlet kernels and Valle-Poussin—n for the j-Bessel integrals of Fourier. [Lyaxov L.N. Postroenie yader Dirixle i Valle-Pussena—Nikol'skogo dlya j-besselevyx integralov Fur'e]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshhestva — Proceedings of the Moscow mathematical society*, 2015, vol. 76, no. 1, pp. 67–84.

3. Lyakhov L.N., Roshchupkin S.A., Sanina E.L. Spherical transformation of the generalized Poisson shift and some properties of weight Lebesgue classes of functions. [Lyaxov L.N., Roshhupkin S.A., Sanina E.L. Sfericheskoe preobrazovanie obobshhennogo sdviga Puassona i nekotorye svoyjstva vesovyx lebegovyx klassov funkciyj]. *Problemy matematicheskogo analiza — Problems of mathematical analysis*, iss. 88, pp. 87–95.

4. Lyakhov L.N., Roshchupkin S.A., Sanina E.L. Spherical Transformation of Generalized Poisson Shift and Properties of Weighted Lebesgue Classes of Functions. Journal of mathematical sciences, 2017, vol. 224, no. 5, pp. 699–709.

5. Kipriyanov I. A. Singular elliptic problems. [Kipriyanov I. A. Singulyarnye ellipticheskie zadachi]. Moscow: Nauka, 1997, 199 p.

Санина Е. Л., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: sanina08@mail.ru

Sanina E. L., Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: sanina08@mail.ru

Рощупкин С. А., Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина, Елец, Россия
E-mail: roshupkinsa@mail.ru

Roshchupkin S. A., Yelets state University named after I. A. Bunin, Yelets, Russia
E-mail: roshupkinsa@mail.ru