УДК 517.946

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА*

В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.01.2017 г.

Аннотация. В работе получены коэрцитивные априорные оценки решений краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Рассмотрено вырождающееся эллиптическое уравнение высокого порядка, которое содержит весовые операторы, представляющие собой суперпозицию оператора умножения на функцию, которая обращается в нуль на границе, и оператора дифференцирования. На границе рассматриваются условия типа условий Дирихле. Получены коэрцитивные априорные оценки решений рассматриваемых задач. Оценки получены в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства С. Л. Соболева.

ON AN A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A STRIP FOR A DEGENERATE HIGH ORDER ELLIPTIC EQUATION

V. V. Pankov, A. D. Baev, V. D. Kharchenko

Abstract. In this paper, we obtain coercive a priori estimates of solutions to the boundary value problem of the Dirichlet type in the band for a degenerate high-order elliptic equation. We consider a degenerate elliptic equation of high order, which contains weight operators, which are a superposition of the multiplication operator on the function, which vanishes at the boundary, and the differentiation operator. On the boundary conditions of the Dirichlet condition type are considered. The coercive a priori estimates of the solutions of the considered problems are obtained. Estimates are obtained in special weight spaces such as Sobolev spaces.

Keywords: a priori estimate, the degenerate elliptical equation, S. L. Sobolev's weight spaces.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для уравнений с вырождением относятся к "неклассическим" задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1], [2].

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском государственном университете.

В работе В. П. Глушко [3] были получены априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [4]–[6] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые в полосе задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [7]–[8] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка.

В настоящей работе получены априорные оценки решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение нечетного порядка по одной из переменных. Таким образом. работа является естественным продолжением исследований, начатых в работах [7]–[8]. Формулировка полученных результатов содержится в работе [9].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1.1}$$

где $A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = L_{2m}(D_x,D_{\alpha,t})v + b(-1)^k\partial_t^{2k-1}v$, $L_{2m}(D_x,D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j}D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, $a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\,\bar{b}a_{0,2m} = 0$.

Здесь $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия

$$B_j(D_x)\left.v\right|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}D_x^\tau\partial_t^{j-1}\left.v\right|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1,2,...,k-1 \tag{1.2}$$

с комплексными коэффициентами b_τ.

На границе $t = d$ полосы R_d^n заданы условия вида

$$\left.v\right|_{t=d} = \partial_t\left.v\right|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\left.v\right|_{t=d} = 0. \tag{1.3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0$, $j = 1,2,...,k-1$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Рассмотрим пространства, в которых будет исследоваться задача (1.1)-(1.3). Рассмотрим интегральное преобразование, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$. Это преобразование было введено в работе [4]. В этой работе показано, что для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ - обратное преобразование Фурье. В этой работе было показано, что для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля. Это дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ ($s \geqslant 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \{ \sum_{l=0}^{[\frac{(2k-1)s}{2m}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{2k-1}l)} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]] \right\|^2_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{(2k-1)s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$.

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l \leqslant s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|^2_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ — целое число, $m \geqslant 2k-1$- целое число, и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1.1) - (1.3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leqslant c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \|B_j \; v|_{t=0}\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v.

Здесь $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве Соболева–Слободецкого $H_s(R^{n-1})$.

Формулировка теоремы 1 содержится в работе [9].

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Применим к обеим частям уравнения (1.1) и условий (1.2)–(1.3) преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$. Получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\,u(\xi,t) = L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})\,u(\xi,t) + b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u(\xi,t) = f(\xi,t)\,, \tag{2.1}$$

$$B_j(\xi)\; u|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \partial_t^{j-1}\; u|_{t=0} = g_j(\xi),\; j = 1,2,...,k-1, \tag{2.2}$$

$$u(\xi,t)\,|_{t=d} = \partial_t u(\xi,t)\,|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1} u(\xi,t)\,|_{t=d} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[\nu(x,t)]$, $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F(x,t)]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}[G(x)]$.

Аналогично определенным выше пространствам введем пространства $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ ($s \geqslant 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} = \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{2k-1}j\leqslant s} \left\| F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha\left[\partial_t^j u\right]\right] \right\|^2_{L_2(0;d)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующей теоремы:

Теорема 2.1 Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ - целое число, $m \geqslant 2k-1$ — целое число. Пусть $f(\xi,t) \in \widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ и выполнены условия 1-3. Тогда для любого решения $u(\xi,t)$ задачи (2.1)-(2.3), принадлежащего при всех $\xi \in R^{n-1}$ пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, справедлива априорная оценка

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c\left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m^*-\frac{m}{2k-1}}|g(\xi)|^2\right) \tag{2.4}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $\xi \in R^{n-1}$, u, f, g.

Из определения преобразования F_α получим, что для любых $u(t) \in L_2(0;d)$, $w(t) \in L_2(0;d)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\alpha[u](\eta)\cdot\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta = 2\pi(u,w). \tag{2.5}$$

Здесь и в дальнейшем через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в $L_2(0;d)$.

Кроме того, из определения преобразования F_α следует, что если $u(t) \in C^s[0;d]$ и удовлетворяет условиям

$$u(d) = \partial_t u(d) = ... = \partial_t^{s-1}(d) = 0, \tag{2.6}$$

то справедливо равенство

$$F_\alpha\left[D^j_{\alpha,t}u\right](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta) \tag{2.7}$$

при всех $j = 0,1,2,...,s$.

Из последнего равенства следует, что если $u(t) \in C^s[0;d]$, $w(t) \in C^s[0;d]$ и эти функции удовлетворяют условиям (2.6), то справедливо равенство

$$\left(D^j_{\alpha,t}u(t), w(t)\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta^j F_\alpha[u](\eta)\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta. \tag{2.8}$$

В дальнейшем нам понадобятся аналоги неравенства Эрлинга–Ниренберга для весовых производных, которые в нашем случае можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2.1. Пусть $u(t) \in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ (s — натуральное число). Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $j = 0,1,2,...,s-1$ справедливо неравенство

$$\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon^{2(s-j)}\left\|D^s_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left(c\varepsilon^{-2j} + \varepsilon^{2(s-j)}\right)\|u\|^2 \tag{2.9}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u.

Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|$ обозначается норма в пространстве $L_2(0;d)$.

Следствие 2.1. Пусть $u(t) \in \widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $j = 0,1,2,...,2m-1$, $\xi \in R^{n-1}$ справедливо неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon^{2(2m-j)}\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 \tag{2.10}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u, ξ.

Утверждение теоремы 2.1 вытекает из следующей совокупности утверждений. В этих утверждениях константы $c > 0$, $\varepsilon > 0$, во всех оценках не зависят от u, ξ.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия 1, 2; $m \geqslant 2k-1$. Тогда для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\tfrac{1}{2}\left|\partial_t^{k-1}u\left(0\right)\right|^2\leqslant c(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\left(t\right)\right\|^2+\\+\left(1+|\xi|^2\right)^{m}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^{j}u\left(0\right)})\end{gathered}\tag{2.11}$$

с константой $c>0$, не зависящей от ξ, u.

Доказательство. Так как пространство $C^{2m}[0;d]$ плотно в пространстве $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, то неравенство (2.11) достаточно доказать для функций из пространства $C^{2m}[0;d]$. Умножив скалярно в $L_2(0,d)$ обе части уравнения (2.1) на функцию $bu(t)$, получим

$$Re\left(L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u,bu\right)+|b|^2(-1)^kRe\left(\partial_t^{2k-1}u,u\right)=Re\left(A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u,bu\right).\tag{2.12}$$

Используя равенство (2.7) и условие 1, получим оценку

$$Re\left(L_{2m}\left(\xi,D_{\alpha,t}\right)u,bu\right)\geqslant c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|,\tag{2.13}$$

где $c_1>0$ — некоторая константа, не зависящая от $\xi\in R^{n-1}$, u.

С использованием условия (1.3) получим равенство

$$(-1)^k\int_0^d\partial_t^{2k-1}u\cdot\bar{u}dt=\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j-1}\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^{j}u\left(0\right)}+\frac{1}{2}\left|\partial_t^{k-1}u\left(0\right)\right|^2.\tag{2.14}$$

Применяя (2.13), (2.14) в (2.12) и используя неравенство Коши-Буняковского, получим для любого $\varepsilon>0$ оценку

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_{\alpha,t}^{j}u\right\|^2+\frac{1}{2}|b|^2\left|\partial_t u\left(0\right)\right|^2\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\left(t\right)\right\|^2+\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{m}|b|^2\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j-1}\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^{j}u\left(0\right)}.$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим оценку (2.11).

Лемма 2.3. При выполнении условий леммы 2.2 для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\leqslant\varepsilon\left(\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2\right)+c\left(\varepsilon\right)\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)\tag{2.15}$$

при любом $\varepsilon>0$.

Доказательство. Умножив скалярно обе части равенства (2.1) на $a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u$, получим оценку

$$|a_{0,2m}|^{2m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+Re\left(b(-1)^k\partial_t^{2k-1}u,a_{0,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u\right)\leqslant$$

$$\leqslant \left| \left(\sum_{\substack{|\tau|+j\leqslant 2m \\ |\tau|\geqslant 1}} a_{\tau j}\xi^{\tau} \left(D^{j}_{\alpha,t}u, a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u \right) \right) \right| + \left| \left(A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\left(t\right), a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u \right) \right|. \quad (2.16)$$

Заметим, что

$$\left| \left(A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\left(t\right), a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u \right) \right| \leqslant \varepsilon \left\| D^{2m}_{\alpha,t}u \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left\| A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u\left(t\right) \right\|^2. \quad (2.17)$$

С помощью неравенства (2.10) и неравенства Коши–Буняковского получим для любого $\varepsilon > 0$ оценку

$$\left| \left(\sum_{\substack{|\tau|+j\leqslant 2m \\ |\tau|\geqslant 1}} a_{\tau j}\xi^{\tau} a_{0,2m} \left(D^{j}_{\alpha,t}u, D^{2m}_{\alpha,t}u \right) \right) \right| \leqslant \varepsilon \left\| D^{2m}_{\alpha,t}u \right\|^2 + c_1\left(\varepsilon\right) \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2. \quad (2.18)$$

Используя (2.17) и (2.18) в правой части (2.16), получим оценку

$$|a_{0,2m}|^{2m} \left\| D^{2m}_{\alpha,t}u \right\|^2 + Re\left(b(-1)^k \partial_t^{2k-1}u, a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u \right) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left\| D^{2m}_{\alpha,t}u \right\|^2 + c_2\left(\varepsilon\right) \left(\left\| A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u \right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m} \|u\|^2 \right). \quad (2.19)$$

Заметим, что

$$Re\left(\partial_t^{2k-1}u, D^{2m}_{\alpha,t}u\right) = (-1)^{k-1} Re(\partial_t^k u, \partial_t D^{2m}_{\alpha,t}\partial_t^{k-2}u) + \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^j Re K_j,$$

где операторы K_j определены формулой:

$$K_j = I_{2m,1}(D_{\alpha,t}, \partial_t)\partial_t^{j-1}u.$$

Здесь $I_{2m,1}\left(D_{\alpha,t}, \partial_t\right)$ — коммутатор операторов $D^{2m}_{\alpha,t}$ и ∂_t.

С помощью интегрирования по частям получим равенство

$$Re\left(\partial_t^{2k-1}u, D^{2m}_{\alpha,t}u\right) = (-1)^k (D^m_{\alpha,t}\partial_t^k u, D^m_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}u) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j K_j +$$
$$+ (-1)^k \sum_{j=0}^{m-1} i\alpha(t) D^j_{\alpha,t}\partial_t^k u \cdot D^{2m-j-1}_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d}.$$

Так как при $j \leqslant m-1-k$ выполняется неравенство $j+k \leqslant m-1$, то учитывая граничные условия (2.3), получим равенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} i\alpha(t) D^j_{\alpha,t}\partial_t^k u \cdot D^{2m-j-1}_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d} = \sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t) D^j_{\alpha,t}\partial_t^k u \cdot D^{2m-j-1}_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d}.$$

Таким образом, получаем равенство

$$Re\left(\partial_t^{2k-1}u,D_{\alpha,t}^{2m}u\right) = (-1)^k Re(D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^k u,D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u) + \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j ReK_j +$$

$$= (-1)^k Re\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d} = (-1)^k Re(\partial_t D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u,D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j ReK_j + (-1)^k Re\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d}+$$

$$+ (-1)^k Re(I_{m,1}(D_{\alpha,t}^{m},\partial_t)\partial_t^{k-1}u,D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u). \quad (2.20)$$

Здесь $I_{m,1}(D_{\alpha,t}^{m},\partial_t)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^{m}$ и ∂_t.

Так как $Re(\partial_t D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u,D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u) = 0$, то справедливо равенство

$$Re\left(\partial_t^{2k-1}u,D_{\alpha,t}^{2m}u\right) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j ReK_j + (-1)^k Re\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d}+$$

$$+ (-1)^k Re(I_{m,1}(D_{\alpha,t}^{m},\partial_t)\partial_t^{k-1}u,D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u).$$

Используя это равенство в (2.19), получим оценку

$$|a_{0,2m}|^{2m}\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c_2(\varepsilon)\left(\|A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)+$$

$$+ c\Big(\sum_{j=1}^{k-1}|ReK_j| + \left|Re\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d}\right|+$$

$$+\left|Re(I_{m,1}(D_{\alpha,t}^{m},\partial_t)\partial_t^{k-1}u,D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u)\right|\Big). \quad (2.21)$$

С помощью неравенства Коши–Буняковского и неравенства (2.10), получим

$$\sum_{j=1}^{k-1}|ReK_j| + \left|Re(I_{m,1}(D_{\alpha,t}^{m},\partial_t)\partial_t^{k-1}u,D_{\alpha,t}^{m}\partial_t^{k-1}u)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2\right) + c_3(\varepsilon)\left(1+|\varepsilon|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \quad (2.22)$$

С помощью известной теоремы “о следах” получим оценку

$$\left|Re\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar{u}\Big|_{t=d}\right| \leqslant c\sum_{j=1}^{2m-1}\left|\partial_t^j u(d)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1\int_{\frac{d}{2}}^{d}\left|\partial_t^{2m}u\right|^2 dt + c_4(\varepsilon_1)\int_{\frac{d}{2}}^{d}|u(t)|^2 dt \leqslant \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c_5(\varepsilon)\cdot\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2. \quad (2.23)$$

Используя неравенства (2.22), (2.23) в правой части неравенства (2.20), получим, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, оценку (2.15).

Лемма 2.4. При выполнении условий леммы 2.2 для любой функции $u(t) \in \widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 \leqslant c\left(\left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right) \quad . \tag{2.24}$$

Доказательство. Из уравнения (2.1) получим с помощью неравенства (2.10) оценку

$$\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 \leqslant \left\|A\left(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u\right\|^2+\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+\varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2+c\left(\varepsilon\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Применяя в этом неравенстве неравенство (2.15) и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (2.24).

Доказательство теоремы 2.1.

Используя леммы 2.2 – 2.4, получим оценку

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c\left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}+\left(1+|\xi|^2\right)^m\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right) \tag{2.25}$$

Используя неравенство Коши, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right| \leqslant \left(1+|\xi|^2\right)^m\sum_{j=0}^{k-2}(\varepsilon\left|\partial_t^{2k-2-j}u\left(\xi,0\right)\right|^2+ \\ +\frac{1}{\varepsilon}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2).$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon=\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{-m+qj+\frac{1}{2}q}$, где $q=\frac{2m}{2k-1}$, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-2}(\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left|\partial_t^{2k-2-j}u\left(\xi,0\right)\right|^2+ \\ +\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2).$$

где ε_1 — любое число.

Заметим, что $\left|\partial_t^{2k-2-j}u\left(\xi,0\right)\right|^2=-2Re\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\partial_t^{2k-2-j}u\right)$. Отсюда получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=0}^{k-2}(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}\left|Re\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\partial_t^{2k-2-j}u\right)\right|+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2).$$

Применяя для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства неравенство Коши, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}Re\partial_t^{2k-2-j}u\left(0\right)\overline{\partial_t^j u\left(0\right)}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-2}(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+\frac{q}{2}}(\varepsilon_2\left\|\partial_t^{2k-1-j}u\right\|^2+ \\ +\frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\partial_t^{2k-2-j}u\right\|^2)+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}}\left|\partial_t^j u\left(\xi,0\right)\right|^2).$$

Выберем в этом неравенстве $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{q}{2}}$, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^{k-j} Re\partial_t^{2k-2-j} u\,(0)\,\overline{\partial_t^j u\,(0)}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-2} (2\varepsilon_1^{\frac{3}{2}}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj} \left\|\partial_t^{2k-1-j} u\right\|^2 +$$
$$+\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+q} \left\|\partial_t^{2k-2-j} u\right\|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-\frac{q}{2}} \left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2).$$

Применим это неравенство и неравенство Эрлинга–Ниренберга в правой части неравенства (2.25), получим неравенство

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c\left(\|Au\|^2 + \varepsilon_2(\left\|\partial_t^{2k-1} u\right\|^2 + \right.$$
$$\left. + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2) + c(\varepsilon_2)\sum_{j=0}^{k-2}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right).$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon_2 > 0$ достаточно малым, получим неравенство

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c_1\left(\|Au\|^2 + \sum_{j=0}^{k-2}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u\,(\xi,0)\right|^2\right) \tag{2.26}$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$|u\,(\xi,0)| = \left|\frac{\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \partial_t^{j-1}\, u|_{t=0}}{\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau}\right| \leqslant c\,(1+|\xi|)^{-m_j}\,|B_j\,(\xi)\,u|_{t=0}| \leqslant c\,|g_j(\xi)|$$

Применяя это неравенство в (2.26) получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \leqslant c\left(\|f\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}|g_j\,(\xi)|^2\right)$$

Таким образом, доказана оценка (2.4) при $s = 2m$. Справедливость оценки (2.4) при $s > 2m$ доказывается методами, аналогичными методам работы [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

2. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

3. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

4. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

5. Баев, А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун–т, 2008. — 240 с.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

8. Баев, А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

9. Баев, А. Д. О существовании решений одного класса краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. В. Панков // Доклады Академии Наук. — 2017. — Т. 475, № 5. — С. 1–3.

REFERENCES

1. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

2. Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

3. Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate high-order elliptic equations. [Glushko V.P. Apriornye ocenki resheniyj kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Voronezhskiyj gosudarstvennyyj universitet, Voronezh, 1979, 47 s, dep. v VINITI 27.03.79, № 1048–79 – Voronezh State University, Voronezh, 1979, 47 p, DEP. in VINITI 27.03.79, № 1048–79.* 4. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

5. Baev A.D. Qualitative methods of the theory of regional tasks for the degenerating elliptic equations. [Baev A.D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. Voronezh, 2008, 240 p.

6. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

7. Baev A.D., Buneev S.S. On a class of boundary value problems in the band for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D., Buneev S.S. Ob odnom klasse kraevyx zadach v polose dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 2013, vol. 448, no. 1, pp. 7–8.

8. Baev A.D., Buneev S.S. A priori estimate of solutions of a boundary value problem in strip for degenerate elliptic equations of high order. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

9. Baev A.D., Pankov V.V. On the existence of solutions to a class of boundary value problems in the band for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D., Pankov V.V. O sushhestvovanii resheniyj odnogo klassa kraevyx zadach v polose dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2017, vol. 475, no. 5, pp. 1–3.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Панков Владимир Владимирович, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: pankovfam@mail.ru
Тел.: +7910–242–44–76

Pankov Vladimir Vladimirovich, post-graduate student of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: pankovfam@mail.ru
Tel.: +7910–242–44–76

Харченко Виктория Дмитриевна, студент Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
Тел.: +7900–932–70–50

Kharchenko Victoria Dmitrievna, student of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: +7900–932–70–50