УДК 532.582.7

ОБТЕКАНИЕ МАЛОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ТЕЛА НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. Купцов, А. А. Катрахова

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 11.01.2017 г.

Аннотация. В настоящей работе вычислено поле скоростей обтекания эллипсоида в неоднородном нестационарном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Основной невозмущенный поток идеальной несжимаемой жидкости (без эллипсоидального включения) представлен в виде разложения поля скоростей с помощью гармонических функций. В этот поток было внесено малое эллипсоидальное тело и для этого возмущенного потока были определены гидродинамические параметры течения жидкости (поля скоростей и давлений в жидкости) . В работе были получены новые комбинации гармонических эллипсоидальных функций, позволяющие решить эту задачу. Ввиду сложности задачи, не представляется возможным определить точное решение , поэтому в решениях учитывались члены до третьей аппроксимации. Сделана оценка точности решения.

Ключевые слова: эллипсоид, нестационарный неоднородный поток, идеальная несжимаемая жидкость.

THE FORCE INFLUENCE ON THE SMALL ELLIPSOID IN THE NON–UNIFORM FL OW OF THE IDEAL INCOMPRESSIBLE LIQUID

W. S. Kuptsov, A. A. Katrachowa

Abstract. The Field of velocities the ellipsoid in the non-uniform non-stationary flow of the ideal incompressible liquid have been calculated in this paper. The main undisturbed flow of the ideal incompressible fluid (without the ellipsoidal including) is presented by decomposition of the field of velocities by using harmonic functions. The little ellipsoidal body has been included in that disturbed flow and there have been determined the hydrostatic parameters of the liquid flowing for it (the fields of velocities and pressures). The new combinations for the harmonic ellipsoidal functions have been obtained in this paper which allow solving this problem. According to difficulty of the task it is impossible to determine the precise solving so that the members of solution before the third approximation have been considered only. The estimation of solution has been done.

Keywords: ellipsoid, non-stationary non-uniform flow, ideal incompressible liquid.

Рассмотрим произвольный потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости. Потенциал его может быть записан:

$$\varphi(x_i, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j \ldots \partial y_k}(q) x_j \ldots x_k, \tag{1}$$

где t — время; y_i — неподвижная декартова система координат; x_i — подвижная система координат, оси которой совпадают с осями эллипсоида; $q(t)$ — радиус-вектор центра эллипсоида в неподвижной системе координат; здесь и далее по повторным индексам ведется суммирование, причем число индексов $j\dots k$ равно m.

Следуя работе [2], сохраним в формуле (1) слагаемые при $m=0,1,2$.

Внесем в поток с потенциалом $\varphi(x_i,t)$ эллипсоид. Это изменит потенциал течения, который будем искать в виде

$$\varphi=\varphi(x_i,t)+\varphi'(x_i,t), \tag{2}$$

где φ' — конечный добавок к потенциалу основного течения (без эллипсоида). Так как потенциалы основного течения и возмущенного совпадают при $\lambda\to\infty$ (λ — квадрат расстояния отсчитываемого от поверхности эллипсоида по нормали до произвольной точки области течения, то

$$\left.\varphi'(x_i,t)\right|_{\lambda\to\infty}=0. \tag{3}$$

На поверхности эллипсоида выполняется условие непротекания жидкости через его поверхность:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}n_i|_{\lambda=0}=\left\{(\dot q_i+\dot a_i x_i/a_i)\,n_i+([\Omega,r]\,n_i)\right\}|_{\lambda=0}, \tag{4}$$

где n_i — компоненты вектора внешней нормали к поверхности; $a_i(t)$ — полуоси эллипсоида; $\Omega_i(t)$ — компонента вектора угловой скорости вращения эллипсоида; r — радиус–вектор в системе x_i, точкой обозначена производная по времени. В постановке задачи допускается деформирование эллипсоида так, что его поверхность все время остается поверхностью эллипсоида с постоянным объемом, т. е. $\dot a_1/a_1+\dot a_2/a_2+\dot a_3/a_3=0$.

Потенциал $\varphi'(x_i,t)$ ищется в виде:

$$\varphi'(x_i,t)=A_jx_j\alpha_j+B_j\beta_jx/x_j+C_i\left[\left(x_j^2-x_i^2\right)\beta_k\varepsilon_{kj}+2x_i^2\left\{D\left(a_i^2+\lambda\right)\right\}-\alpha_i\right], \tag{5}$$

где $\alpha_i=\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{D(a_i^2+\lambda)}$, $\beta_i=\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{D(a_j^2+\lambda)(a_k^2+\lambda)}$; i, j, k — образуют перестановку из чисел 1, 2, 3 и $i\neq j\neq k$, $x=x_1x_2x_3$, $D^2=(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda)$, A_j, B_j, $C_j=\mathrm{const}$, $\varepsilon_{kj}=\begin{cases}0, & k=j;\\ 1, & k\neq j,\end{cases}$ $j,k=1,2,3$.

В формуле (5) $C_3=0$, так как из трех последних слагаемых одно является линейно зависимым от двух других. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\varphi'(x_i,t)$ гармоническая функция и выполнено граничное условие (3).

Подставляя (5) в (4) и приравнивая члены при одинаковых степенях x_i в обеих частях полученного равенства, будет иметь:

$$A_j=\left[\dot q_j-\nu_j(q)\right]D_0\left(\alpha_j^0D_0-2\right)^{-1},$$

$$C_1=\left[\left(\frac{\partial\nu_2}{\partial y_2}(q)-\frac{\dot a_2}{a_2}\right)\beta_3^0+\left(\frac{\partial\nu_1}{\partial y_1}(q)+\frac{\dot a_1}{a_1}\right)(\beta_1^0+\beta_3^0)/\Delta\right],$$

$$C_2=\left[\left(\frac{\partial\nu_1}{\partial y_1}(q)-\frac{\dot a_1}{a_1}\right)\beta_3^0+\left(\frac{\partial\nu_2}{\partial y_2}(q)+\frac{\dot a_2}{a_2}\right)(\beta_2^0+\beta_3^0)/\Delta\right],$$

$$B_i=\left[b_{jk}\Omega_i-a_{jk}\frac{\partial\nu_k}{\partial y_j}(q)\right]/\Delta_i, \tag{6}$$

где индексы i, j, k образуют четную перестановку 1, 2, 3 и $i\neq j\neq k$; $\Delta=2\left(\beta_1^0\beta_2^0+\beta_2^0\beta_3^)+\beta_1^0\beta_3^0\right)$, $\Delta_i=\beta_0^0a_{jk}-2/D_0$, $a_{jk}=a_k^2+a_j^2$, $b_{jk}=a_j^2-a_k^2$. В формуле (6) верхний нулевой индекс обозначает, что соответствующая величина определено при $\lambda=0$, а

$\nu_j(q)$ — скорость основного потока, вычисленная в центре эллипсоида. Можно показать, что Δ и Δ_i отличны от нуля при любых $a_i(t)$.

Для определения силового и моментного воздействия на эллипсоид воспользуемся интегралом Лагранжа–Коши, записанным в подвижной системе координат [1]

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{q}_i + \varepsilon_{ikj}\Omega_j x_k\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + f(t), \tag{7}$$

где p — давление в жидкости; ρ — плотность; $f(t)$ — произвольная функция времени; ε_{ikj} — тензор Леви–Чивиты.

Тогда силовое и моментное воздействия на эллипсоид будут равны:

$$F_i^{\text{эл}} = \int\limits_{S_{\text{эл}}} p n_i\,ds, \qquad M_i^{\text{эл}} = \int\limits_{S_{\text{эл}}} p\varepsilon_{ikj} n_j x_k\,ds. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8), используя при этом (5), получим после интегрирования следующие выражения для компонент векторов силы и момента:

$$F_i^{\text{эл}} = \frac{4\pi\rho D_0}{3}\left[\dot{A}_i\alpha_i^0 + A_i\dot{\alpha}_i^0 + \dot{\nu}_i(q)\right] + 2\rho\left\{A_k E_{kij}\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{a_{ik}A_{ik}}{D_0 a_j^4 a_k^4}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{A_i}{a_i}\left(\dot{a}_l + \frac{4C_l}{D_0 a_l}\right)\left(\frac{4\pi}{3}\delta_{il} - \frac{J_{il}}{D_0 a_j^3 a_k^3}\right) + \varepsilon_{imn}\Omega_m A_n\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{b_{ni}J_{in}}{D-0a_i^4 a_n^4}\right)\right\},$$

$$M_i^{\text{эл}} = \frac{\rho b_{i\gamma}}{D_0 a_i^2 a_\gamma^2}\left\{J_{j\gamma}^* E_{ij\gamma}E_{i\gamma j} - \frac{4\left(J_{\gamma j}A_\gamma A_j - J_{ij\gamma}B_\gamma B_j a_i^{-4}\right)}{D_0^2 a_j^2 a_\gamma^2} - \right.$$
$$- 4\left[\frac{C_m J_{mj\gamma}}{a_m^4} - \frac{J_{j\gamma}^*\left(C_\gamma a_\gamma^2 + C_J a_j^2\right)}{a_{j\gamma}}\right]\frac{a_{j\gamma}E_{j\gamma i}}{D_0 a_j^2 a_\gamma^2} - \frac{2a_{ik}b_k J_{ikj}E_{ikj}}{D_0^3 a_i^2} - \frac{a_i J_{j\gamma}^* E_{j\gamma i}}{a_i} -$$
$$- \frac{2a_m B_i J_{mj\gamma}}{D_0 a_m^3 a_j^2 a_\gamma^2} + J_{j\gamma}^* E_{j\gamma i} + J_{\gamma j}^*\varepsilon_{imn}\Omega_m A_n E_{imn} + \frac{4C_i\Omega_i}{D_0 a_j^2}\left[J_{j\gamma}^* + \frac{J_{jj\gamma}b_{j\gamma}}{a_j^6}\right] +$$
$$\left. + \frac{2J_{ij\gamma}\left[B_\gamma b_{ji}\Omega_j - B_j b_{ji}\Omega_\gamma + 2C_i b_{ji}\Omega_i\right]}{D_0^3 a_i}\right\}, \tag{9}$$

где по n, k, l, m — суммируется, по i, j, k — нет суммирования, δ_{ij} — тензор Кронекера, $J_{ij}^* = \dfrac{4\pi}{15 D_0 a_i^2 a_j^2}$, $E_{ij\gamma} = \dfrac{\partial\nu_i}{\partial y_j}(q) + B_\gamma\beta_\gamma^0$, $i \neq j \neq k \neq \gamma$, i, j, γ — образуют четную перестановку $1, 2, 3$; J_{ij}, J_{ijk} — поверхностные интегралы, не зависящие от гидродинамических параметров основного потока

$$J_{ik} = \int\limits_{S_{\text{эл}}} x_i^2 x_k^2 R^3\,ds, J_{ikl} = \int\limits_{S_{\text{эл}}} x_i^2 x_k^2 x_l^2 R^3\,ds, R^{-2} = \frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4}.$$

В случае сферы выражения (9) упрощаются и совпадают с формулами работы [2].

Оценим точность решения нашей задачи. Введем относительное расстояние $\delta = \sqrt{\lambda}/a_{\max}$, где $a_{\max}$ — наибольшая полуось эллипсоида, тогда β_i может быть представлена в виде:

$$\beta_i = G\int\limits_{\delta} \frac{\delta\,d\delta}{\sqrt{\left(\gamma_1^2 + \delta\right)\left(\gamma_2^2 + \delta\right)\left(\gamma_3^2 + \delta\right)}\left(\gamma_j^2 + \delta\right)\left(\gamma_k^2 + \delta\right)}, \tag{10}$$

где $G = \text{const}$ — некоторая функция от $a_{\max}$, $\gamma_i = a_i/a_{\max}$. Если $\delta \gg 1$, то величинами γ_i можно пренебречь, и получим, что порядок β_i, равен δ^{-5}, величина x_j имеет порядок δ, поэтому в формуле (5) слагаемые начиная со второго $\sim \delta^{-3}$, а при $\delta \to \infty$ первое слагаемое в (5) будет порядка δ^{-2}. Анализируя формулу для силы (9), получим, что порядок каждого из слагаемых этой формулы равен порядку произведения $a_1a_2a_3$. Если в формуле (1) будем удерживать слагаемые при $m > 2$, то их вклад в выражение для силы будет по сравнению с $a_1a_2a_3$ малой более высокого порядка. Для эллипсоидов, которые близки к сферическим момент будет $\sim a^5$. Для сферы момент равен нулю.

Полученные выражения для силы и момента позволяют решить задачи о движении деформирующихся эллипсоидов в потоке идеальной несжимаемой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб. — М.–Л., 1947. — 929 с.

2. Войнов, О. В. О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости / О. В. Войнов // Прикладная механика и техническая физика. — 1973. — № 4. — С. 182–184

3. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. — М. : Мир, 1976. — 630 с.

4. Купцов, В. С. О силе, действующей на сферическую частицу, помещенную в нестационарный поток вязкой жидкости / В. С. Купцов // В кн: Сб. статей по мех.спл. сред. / Труды НИИМа. — Воронеж : ВГУ, 1976. — вып. 18.

5. Купцов, В. С. Обтекание малого эллипсоидального тела неоднородным потоком вязкой несжимаемой жидкости / В. С. Купцов, А. А. Катрахова // “Современные методы прикладной математики, теории управления компьютерных технологий” (ПМТУКТ–2016). Сборник трудов международной конференции. — Воронеж, 20–26 сентября 2016 г. — С. 197–199.

REFERENCES

1. Lamb G. Hydrodynamics. [Lamb G. Gidrodinamika]. Moskva–Leningrad, 1947, 929 p.

2. Voinov O.V. On the force acting on a sphere in an inhomogeneous flow of an ideal incompressible fluid. [Voyjnov O.V. O sile, deyjstvuyushheyj na sferu v neodnorodnom potoke ideal’noyj neszhimaemoyj zhidosti]. *Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1973, no. 4, pp. 182–184.

3. Happel J., Brenner G. Hydrodynamics at low Reynolds numbers. [Xappel’ Dzh., Brenner G. Gidrodinamika pri malyx chislax Reyjnol’dsa]. Moskva, 1976, 630 p.

4. Kupchov V.C. On the force acting on a spherical particle placed in a non-stationary viscous fluid flow. [Kupcov V.S. O sile, deyjstvuyushheyj na sfericheskuyu chasticu, pomeshhennuyu v nestacionarnyyj potok vyazkoyj zhidkosti]. *V knige: Sbornik. stateyj po mexanike sploshnyx sred. Trudy NIIMa, Voronezh: VGU — In the book: Collection of articles on continuum mechanics. Works of NIIM, Voronezh: Voronezh state University*, 1976, vyp. 18.

5. Kupchov V.S., Katrakhova A.A. Flow around a small ellipsoidal body by an inhomogeneous flow of a viscous incompressible fluid. [Kupcov V.S., Katraxova A.A. Obtekanie malogo ellipsoidal’nogo tela neodnorodnym potokom vyazkoyj neszhimaemoyj zhidkosti]. "Modern methods of applied mathematics, control theory of computer technology" (PMTCT-2016). Proceedings of the international conference. Voronezh, 2016, pp. 197–199.

Купцов Валерий Семенович, доцент кафедры ВМФММ ВГТУ, кандидат физико–математических наук, Воронеж, Россия
Тел.: +7(473)277–95–43

Kupchov Valery Semenovich, associate Professor of VMEM Voronezh State Technical University, candidate of physico-mathematical Sciences, Voronezh, Russia
Tel.: +7(473)277–95–43

Катрахова Алла Анатольевна, доцент кафедры ВМФММ ВГТУ, кандидат физико–математических наук, Воронеж, Россия

Katrakhova Alla Anatolyevna, associate Professor of VMEM Voronezh State Technical University, candidate of physico-mathematical Sciences, Voronezh, Russia