УДК 517.958 [550.3 + 551.5]

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФРАКТАЛЬНОСТИ ОБЛАЧНОЙ СРЕДЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ ОБЛАЧНЫХ КАПЕЛЬ

Т. С. Кумыков, А. А. Сокуров

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино–Балкарский научный центр Российской академии наук"

Поступила в редакцию 29.12.2016 г.

Аннотация. Впервые рассмотрен вопрос влияния фрактальности среды на рост мелких облачных капель на начальной стадии существования облака в режиме конденсационного роста и гравитационной коагуляции. При этом использовалось понятие эффективной скорости изменения физической величины, определяемое через производные нецелого порядка. Физико-математическая модель исследуемого процесса представлена в виде задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения дробного порядка, которое включает в себя параметр, характеризующий фрактальность облачной среды. В общем случае выписать аналитически точное решение данной задачи не представляется возможным, поэтому для нахождения ее приближенного решения применяются конечно-разностные методы. Исходя из проведенных расчетов, проанализировано качественное влияние фрактальности облака на эволюцию облачных капель.

Ключевые слова: облачная капля, фрактальная размерность, математическая модель, конвективное облако.

MODELING OF THE INFLUENCE OF FRACTAL CLOUD ENVIRONMENT ON THE EVOLUTION OF CLOUD DROPLETS

T. S. Kumykov, A. A. Sokurov

Abstract. For the first time the problem of the influence of the fractality of the medium on the growth of small cloud drops at the initial stage of the cloud existence in the regime of condensation growth and gravitational coagulation was considered. In this case, the conception of the effective velocity of change of a physical quantity, defined through derivatives of a non-integral order, was used. The physico-mathematical model of the process under investigation is presented as a Cauchy problem for a non-linear differential equation of fractional order, which includes a parameter characterizing the fractality of the cloud medium. In the general case it is not possible to write out an analytically exact solution of this problem, therefore finite-difference methods are used to find its approximate solution. Based on the performed calculations, the qualitative influence of the fractality of the cloud on the evolution of cloud drops is analyzed.

Keywords: cloud drop, fractal dimension, mathematical model, convective cloud.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время понятие фрактальной среды еще не обрело четкого определения, но следует признать, что «фрактальное» моделирование является инструментом для изучения скрытого порядка в динамике неупорядоченных систем, каковыми являются геофизические объекты. К таким объектам относятся и облака, которые, как и многие объекты в природе, представляют собой нерегулярный фрактал. В связи с этим, изучение влияния фрактальности среды на различные геопроцессы является весьма актуальной задачей. Исследование эволюции размеров частиц в капельных облаках под влиянием конденсации, гравитационной коагуляции и фрактальности облачной среды, представляет собой практически важную задачу при разработке методов прогноза погоды, поскольку от размеров капель зависит интенсивность выпадения осадков. Фрактальные модели были предложены для эмуляции сложных структур из-за их самоподобия Мандельбротом в 1983. В связи с этим, в данной работе решается задача выбора характерных величин микрофизических параметров, которые могут быть использованы в качестве начальных значений при моделировании процессов, описывающих формирование облаков, и выявления степени влияния фрактальности среды на различные механизмы роста капель в облаках.

КОНДЕНСАЦИОННЫЙ РОСТ КАПЕЛЬ С УЧЕТОМ ФРАКТАЛЬНОСТИ СРЕДЫ

Рассмотрим случай, когда капля находится в пересыщенном воздухе и процесс диффузии водяного пара протекает из-за разности плотностей. Классическая теория впервые была разработана Максвеллом для стационарного конденсационного роста неподвижной сферической частицы. Он показал, что при постоянном пересыщении квадрат радиуса капли растет пропорционально времени. В данном разделе исследуется модель конденсационного роста капель малого размера, учитывающая влияние фрактальности среды.

Скорость конденсационного роста мелкой ($r < 10^{-2}$ см) неподвижной капли, как показано в работе [1], может быть описана уравнением

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r \varepsilon D \Delta C_r, \tag{1}$$

где m – масса капли, r – радиус капли, $\varepsilon = \frac{B}{B+D/r}$, $B = \gamma\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}$, ΔC_r – разность между концентрацией пара на большом расстоянии от капли и равновесной концентрацией пара у поверхности, γ – коэффициент конденсации, μ – молекулярный вес воды, R — универсальная газовая постоянная, T – температура, D — коэффициент диффузии водяного пара в воздухе.

Исходя из (1), скорость изменения радиуса капли за счет конденсации можно записать в виде

$$\frac{d\,r(t)}{dt} = \frac{3\varepsilon D \Delta C_r}{\rho r(t)}, \tag{2}$$

где ρ – плотность воды.

По аналогии с работами [2] – [3], в работе [4] была введена эффективная скорость изменения радиуса капли с использованием аппарата теории дробного дифференцирования, учитывающая фрактальность среды

$$\left\langle \frac{d\,r(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\partial_{0t}^{\alpha} r(t),\ 0 < \alpha < 1,$$

принимая во внимание которое, (2) перепишется в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha} r(t) = \frac{3\,\tau\,\varepsilon D \Delta C_r}{\rho r(t)},\ 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} r(t)$ – дробная производная по Капуто, α – феноменологический параметр (в нашем случае – показатель фрактальности среды), τ – характерное время процесса.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка (3) с начальными условиями

$$r\left(0\right) = r_0. \tag{4}$$

Задача типа Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля исследованы в работе [5].

Для нахождения приближенного решения данной задачи воспользуемся разностным методом, предложенным в работе [6]. С этой целью на отрезке $[0,T]$ введем сетку $\overline{\omega}_h = \{jh, j = 0,1,2...N\}$ с шагом $h = T/N$ по времени, где N – натуральное число. Дифференциальной задаче (3) – (4) поставим в соответствие следующую разностную схему:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha})y_{t,s} = f(t_j,y_j), \quad j = 1,2,...N, \tag{5}$$

$$y_0 = r_0, \tag{6}$$

где $\Delta_{0t_j}^{\alpha} y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\limits_{s=0}^{j}(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha})y_{\bar{t},s}$ – дискретный аналог дробной производной, $y_{t,s} = \frac{y_{s+1}-y_s}{h}$ – правая разностная производная, $f(t_j,y_j) = \frac{3\,\tau\,\varepsilon D\Delta C_r}{\rho y_j}$.

Схема (5) – (6) является явной:

$$y_{j+1} = y_j + h^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)\left[f(t_j,y_j) - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha})y_{t,s}\right], \tag{7}$$

$$j = 0,1,2,...N-1.$$

На рис. 1 показаны графики приближенных решений задачи (3) – (4) при различных значениях показателя фрактальности α. При этом функции были приведены к безразмерному виду, где в качестве характерной длины взято начальное значение r_0. Из рисунка видно,

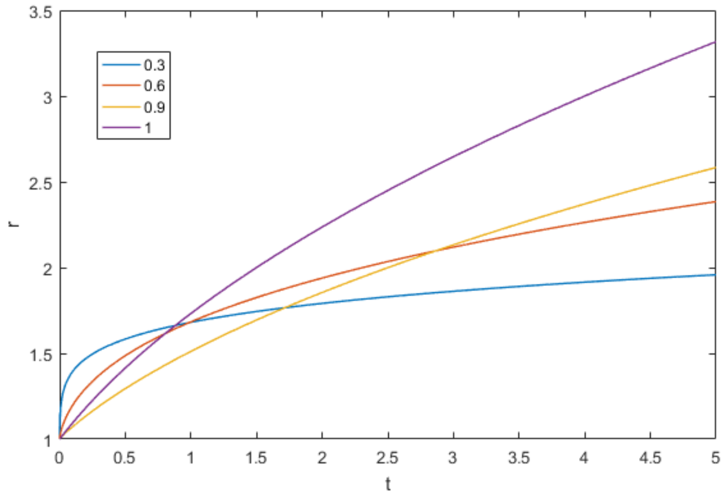

Рис. 1. *Графики решений задачи* (3)–(4) *при различных* α.

что при малых значениях параметра α происходит резкий скачок радиуса капель, а затем после перехода через зону действия фрактального эффекта, замедляется. Исходя из этого, можно сделать предположение, что процессы во фрактальных облачных средах протекают значительно медленнее, нежели в сплошных.

ВЛИЯНИЕ ФРАКТАЛЬНОСТИ СРЕДЫ НА ГРАВИТАЦИОННУЮ КОАГУЛЯЦИЮ КАПЕЛЬ

Известно [7] семь видов коагуляции: броуновская, гравитационная, гидродинамическая, градиентная, акустическая, турбулентная, электрическая. Разные виды движения, обуславливающие коагуляцию, могут быть взаимосвязанными, но мы рассмотрим гравитационную коагуляцию в монодисперсной среде, т. к. одним из главных процессов, влияющих на рост частиц капельного облака, первоначально образовавшихся за счет гомогенной конденсации или за счет конденсации на ядрах, является процесс гравитационной коагуляции частиц облака. Гравитационная коагуляция является важнейшей для процесса осадкообразования.

В работе [7] показано, что увеличение радиуса капли за единицу времени при падении через монодисперсное облако, состоящее из капель радиусом r_0 в случае $r_0 << r$, описывается уравнением

$$\frac{dr}{dt} = \frac{Wr_0^3}{3r^2(t)}, \tag{8}$$

где $W = Esn\Delta v$ – представляет собой вероятность столкновения капель, E – коэффициент соударения, s – эффективная площадь соударения, n – число частиц с радиусом r в единице объема, Δv – скорость падения частиц.

Учитывая фрактальность облачной среды, в которой протекает процесс, из (8) приходим к следующей задаче

$$\partial_{0t}^{\alpha} r\,(t) = \frac{\tau W r_0^3}{3r^2(t)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{9}$$

$$r\,(0) = r_0, \tag{10}$$

которая описывает динамику роста капель в случае гравитационной коагуляции.

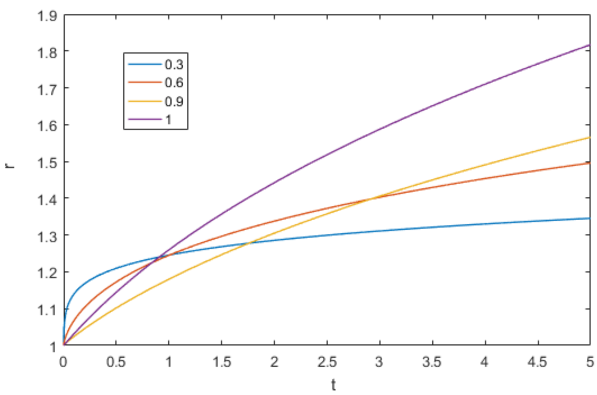

Рис. 2. *Графики решений задачи* (9) – (10) *при различных* α.

На рис. 2 показаны графики приближенных решений задачи (9) – (10) при различных значениях показателя фрактальности α. Видно, что при изменении показателя параметра α графики идентичны графикам полученным для конденсационного механизма. При этом следует отметить, что скорости роста капель в случае гравитационной коагуляции меньше чем при конденсационном росте. Также можно сделать предположение, что при различных механизмах роста капель зоны действия фрактального эффекта лежат на разных уровнях .

В случае $r_0 \leqslant r$ уравнение (8) принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = W(r(t) - r_0). \tag{11}$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$\partial_{0t}^{\alpha} r\left(t\right) = W(r(t) - r_0), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{12}$$

$$r\left(0\right) = r_0. \tag{13}$$

Введя эффективную скорость и фрактальность среды уравнение (12) было получено из (11). Решение задачи (12)–(13) имеет вид [8]

$$r\left(t\right) = r_0 t^0 E_{\alpha,1}\left(\tau W t^{\alpha}\right) + \tau W r_0 \int\limits_0^t \left(t-\theta\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\tau W\left(t-\theta\right)^{\alpha}\right) d\theta, \tag{14}$$

где $E_{\alpha,\beta}\left(z\right) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i+\beta)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Представление (14) после преобразования можно привести к виду

$$r\left(t\right) = r_0 t^0 E_{\alpha,1}\left(\tau W t^{\alpha}\right) + \tau W r_0 t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}\left(\tau W t^{\alpha}\right). \tag{15}$$

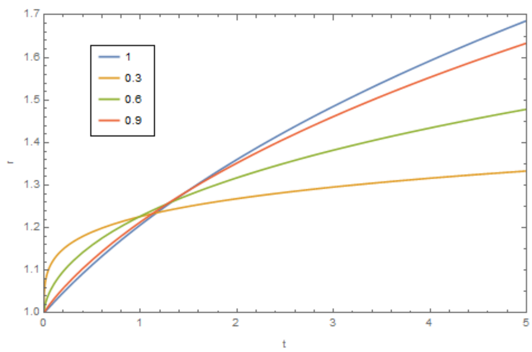

Рис. 3. *Графики решений задачи* (12) – (13) *при различных* α.

На рис. 3 показаны графики приближенных решений задачи (12) – (13) при различных значениях показателя фрактальности α, на которыом просматривается аналогично рис 1. и рис 2. тенденция роста капель при различных значениях параметра α. Видно, что зона действия фрактального эффекта на том же уровне, что и на рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано влияние фрактальности среды на конденсационный рост и гравитационную коагуляцию облачных капель. Средний радиус капель в облаке является основным осадкообразующим фактором, эволюция которого связана с процессом гравитационной коагуляции. Представлены формулы, используемые для расчета изменения радиуса частиц облака под влиянием процессов конденсации и коагуляции капель с заданными параметрами с учетом фрактальности среды. Проведены численные эксперименты для оценки влияния фрактальности среды на рост облачных частиц при различных сочетаниях микрофизических параметров с использованием аппарата дробного исчисления. Определена общая зависимость роста облачных частиц от параметра фрактальности среды, выражающаяся в резком скачке, а затем в уменьшении скорости роста капель при различных значениях параметра α. Выявлены зоны начала действия фратального эффекта при различных механизмах роста облачных капель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимофеев, М. П. Испарение мелких капель воды / М. П. Тимофеев, М. Е. Швец // Метеорология и гидрология. — 1948. — № 2. — С. 14–18.

2. Рехвиашвили, С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования / С. Ш. Рехвиашвили // Нелинейный мир. — 2007. — Т.5, № 4. — С. 194–198.

3. Рехвиашвили, С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики / С. Ш. Рехвиашвили // Письма в Журнал технической физики. — 2004, — Т.30, № 2. — С. 33–37.

4. Кумыков, Т. С. Исследование влияния фрактальности среды на механизмы роста облачных частиц / Т. С. Кумыков // Материалы Международной научной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и информатики” и XIV Школы молодых ученых “Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики”. — Нальчик, 2016. — С. 172–173.

5. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

6. Таукенова, Ф. И. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка / Ф. И. Таукенова, М. Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 10. — С. 1871–1881.

7. Шишкин, Н. С. Облака, осадки и грозовое электричество / Н. С. Шишкин. — Л. : Гидрометеоиздат, 1964. — 402 с.

8. Псху, А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А. В. Псху. — Нальчик, 2005. — 185 с.

REFERENCES

1. Timofeev M.P., SHvec M.E. Evaporation of small water droplets. [Timofeev M.P., SHvec M.E. Isparenie melkih kapel’ vody]. *Meteorologiya i gidrologiya — Meteorology and hydrology*, 1948, no. 2, pp. 14–18.

2. Rekhviashvili S.Sh. Fractional derivative physical interpretation. [Rekhviashvili S.Sh. K opredeleniyu fizicheskogo smysla drobnogo integro-differencirovaniya]. *Nelineyjnyyj mir — Nonlinear World*, 2007, vol. 5, no. 4, pp. 194–198.

3. Rekhviashvili S.Sh. Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics. [Rekhviashvili S.Sh. Formalizm Lagranzha s drobnoj proizvodnoj v zadachah mekhaniki]. *Pis’ma v Zhurnal texnicheskoyj fiziki — Applied Physics Letters*, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 33–37.

4. Kumykov T.S. Study of the influence of fractality of the environment on the mechanisms of cloud particle growth. [Kumykov T.S. Issledovanie vliyaniya fraktal’nosti sredy na mekhanizmy rosta oblachnyh chastic]. *Materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii “Aktual’nye problemy prikladnoj matematiki i informatiki” i XIV SHkoly molodyh uchenyh “Nelokal’nye kraevye zadachi i sovremennye problemy analiza i informatiki” — Materials of the International scientific conference "Actual problems of applied mathematics and Informatics" and XIV School of young scientists "Nonlocal boundary value problems and modern problems of analysis and Informatics"*, Nal’chik, 2016, pp. 172–173.

5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ix prilozheniya]. Minsk, 1987, 688 p.

6. Taukenova F.I., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations. [Taukenova F.I., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Raznostnye metody resheniya kraevyx zadach dlya differencial’nyx uravneniyj drobnogo poryadka].

Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, vol. 46, no. 10, pp. 1871–1881.

7. Shishkin N.C. Clouds, precipitation and storm electricity. [Shishkin N.S. Oblaka, osadki i grozovoe ehlektrichestvo]. Leningrad, 1964, 402 p.

8. Pskhu A.V. Boundary value problems for partial differential equations of fractional and continuum order. [Pskhu A.V. Kraevye zadachi dlya differencial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo i kontinual'nogo poryadka]. Nal'chik, 2005, 185 p.

Кумыков Тембулат Сарабиевич, старший научный сотрудник отдела Математического моделирования геофизических процессов ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: macist20@mail.ru

Kumykov Tembulat Sarabievich, senior researcher of the Department of Mathematical modelling of geophysical processes Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, Nalchik, Russia
E-mail: macist20@mail.ru

Сокуров Аслан Артурович, младший научный сотрудник отдела Математического моделирования геофизических процессов ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: aslan_s_07@mail.ru

Sokurov Aslan Arturovich, junior research scientist of the Department of Mathematical modelling of geophysical processes, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, Nalchik, Russia
E-mail: aslan_s_07@mail.ru