УДК 517.9

О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО ТИПА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Д. В. Костин[1], **М. Н. Небольсина**[1], **Д. С. Семендяев**[2]

[1] *— Воронежский государственный университет;*
[2] *— АО "НПК "КБМ"*

Поступила в редакцию 12.01.2017 г.

Аннотация. Методами теории сильно непрерывных полугрупп линейных преобразований в банаховом пространстве устанавливается равномерно корректная разрешимость граничных задач для двумерного уравнения Лапласа в полуоси. С этой целью на ограниченном интервале положительной полуоси указываются классы весовых пространств функций с однородным условием Дирихле на концах интервала. Описываются области определения операторов заданных дифференциальными выражениями $\frac{d^2}{dt^2}$ и $(-\frac{d^2}{dt^2})^{\frac{1}{2}}, t \in [0,l]$ и строятся соответствующие полугруппы, для которых эти операторы являются генераторами. С помощью полученных результатов устанавливается представление решений исследуемых задач и приводится точная оценка поведения этих решений на бесконечности.

Ключевые слова: корректные и некорректные задачи,генератор сильно непрерывной полугруппы.

ON THE EXACT ESTIMATION OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF MIXED TYPE FOR THE TWO-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION

D. V. Kostin, M. N. Nebolsina, D. S. Semendyaev

Abstract. Methods of the theory of strongly continuous semigroups of linear transformations in Banach space establish uniformly correct solvability of boundary value problems for the two-dimensional Laplace equation in the half-axis. For this purpose, classes of weight spaces of functions with a homogeneous Dirichlet condition at the ends of the interval are specified on a limited interval of the positive half-axis. The areas of operators definition given by differential expressions are described $\frac{d^2}{dt^2}$ и $(-\frac{d^2}{dt^2})^{\frac{1}{2}}, t \in [0,l]$ and the corresponding semigroups for which these operators are generators are constructed. With the help of the obtained results, the representation of the solutions of the studied problems is established and an accurate assessment of the behavior of these solutions at infinity is given.

Keywords: correct and incorrect problems,generator of strongly continuous semi-group.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследованию корректной разрешимости начально-краевых задач для дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Au(x), x \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где A-линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E с плотной областью определения $D(A) \subset E$, посвящена монография С.Г.Крейна [2].

В случае задачи о нахождении решения уравнения (1.1), удовлетворяющей условиям

$$u(0) = f, f \in D(A), \tag{1.2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \|u(x)\| = 0, \tag{1.3}$$

в [2] утверждается, что если оператор A позитивный с оценкой на резольвенту

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}, \lambda < 0, \tag{1.4}$$

то задача (1.1)-(1.3) равномерно корректна, то есть имеем единственное решение, которое представимо в виде

$$u(x) = U(x, -A^{\frac{1}{2}} f, \tag{1.5}$$

где $U(x, -A^{\frac{1}{2}})$ - сильно непрерывная полугруппа линейных преобразований с производящим оператором $-A^{\frac{1}{2}}$. При этом справедлива оценка

$$\|u(x)\|_E \leqslant M\|f\|_E. \tag{1.6}$$

В [4], [5] Д.В.Костиным для уравнения (1.1) рассматривается задача со смешанным граничным условием

$$-u'(0) + \mu u(0) = f. \tag{1.7}$$

Показано, что если оператор $-A$ является генератором сжимающей полугруппы $U(x, -A)$ с оценкой

$$\|U(x, -A)\| \leqslant Me^{-\omega x}, \omega \geqslant 0 \tag{1.8}$$

то задача (1.1)-(1.3)-(1.7) равномерно корректно разрешима, если

$$\mu + \sqrt{\omega} > 0 \tag{1.9}$$

и ее решение имеет вид

$$u(x) = \int\limits_x^\infty e^{-\mu(x-s)} U(s, -A^{\frac{1}{2}}) f ds =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-\mu\tau} U(x+\tau, -A^{\frac{1}{2}}) f ds \tag{1.10}$$

и справедлива оценка

$$\|u(t)\|_E \leqslant Me^{-(\mu+\sqrt{\omega})x}\|f\|_E. \tag{1.11}$$

В настоящей работе результаты приведенные в работах [3], [6], применяются к оператору A, заданному дифференциальным выражением $L = -\frac{d^2}{dt^2}$ $t \in [0,l] \subset [0,\infty)$ в пространствах $C_{0,0}$ непрерывных функций $u(t)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{1.12}$$

с нормой

$$\|u\|_C = \max_{t\in[0,l]} |u(t)|. \tag{1.13}$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для описания области определения оператора A введем весовые пространства непрерывных на $[0,l]$ функций $u(t)$ $C_{\rho,0}$ с нормой

$$\|u\|_\rho = \sup_{t\in[0,l]} |\frac{u(t)}{\sin^2\frac{\pi t}{l}}|. \tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что справедлива оценка

$$\|u\|_c \leqslant \|u\|_\rho, \tag{2.2}$$

из которой следует вложение $C_{\rho,0} \subset C_{0,0}$.

Лемма 2.1. *Вложение $C_{\rho,0} \subset C_{0,0}$ всюду плотное.*

Доказательство. Для произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $t \in [0,\delta] \cup [l-\delta,l]$ выполняется неравенство $|u(t)| < \varepsilon$. Далее пусть $\rho(t) = \sin\frac{\pi t}{l}$ и

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{\rho_{0,0}(t)}{\rho(\delta)}u(t), \quad t \in [0,\delta] \\ u(t), \quad t \in (0,l-\delta) \\ \frac{\rho_{0,0}(t)}{\rho(l-\delta)}u(t), \quad t \in [l-\delta,l] \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда очевидно $u_\varepsilon(t) \in C_{\rho,0}$ и справедливо неравенство

$$|u(t) - u_\varepsilon(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,\delta)} |(1 - \frac{\rho(t)}{\rho(\delta)})u(t)| + \sup_{t\in[l-\delta,l]} |(1 - \frac{\rho(t)}{\rho(l-\delta)})u(t)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Отсюда следует доказательство леммы.

Оператор A зададим дифференциальным выражением $L = -\frac{d^2}{dt^2}$ и областью определения

$$D(A) = \{u \in C_{\rho,0}, Lu \in C_{\rho,0}\}. \tag{2.4}$$

Нетрудно доказать, что $\overline{D}(A) = C_{0,0}$.

Далее заметим, что функции $\rho(t) = \sin\frac{\pi t}{l}$ являются собственными функциями оператора A, которым соответствуют собственные числа $\lambda_n = -(\frac{\pi t}{l})^2, n = 0,1,...$

В связи с этим докажем следующую теорему

Теорема 2.1. *Оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(x,-A)$ в пространствах $C_{0,0}$ и для нее справедлива оценка*

$$\|U(x,-A)\| \leqslant e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 x}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Так как $\rho(t) = -\sin(\frac{\pi}{l})^2 t$ есть собственная функция оператора A, то очевидно справедливо равенство

$$R(\lambda,-A)\rho = (\lambda I + A)^{-1}\rho = \frac{\rho}{(\frac{\pi}{l})^2 + \lambda} \tag{2.6}$$

Используем представление функции Грина для решения уравнения $\lambda u(t) + \frac{d^2u(t)}{dt^2} = f(t)$ $(f \in C)$, имеем следующее представление для резольвенты оператора $-A$

$$(\lambda I + A)^{-1}f(t) = R(\lambda,-A)f(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}sh\sqrt{\lambda}l}[\int\limits_0^t sh\sqrt{\lambda}\xi sh\sqrt{\lambda}(l-t)f(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_t^l sh\sqrt{\lambda}tsh\sqrt{\lambda}(l-\xi)f(\xi)d\xi], \quad \lambda\neq 0 \tag{2.7}$$

Из того, что в (2.7) ядро функции Грина положительно и положительный вес $\rho(t)$ из (2.6) следует оценка

$$\|R(\lambda,-A)\|_\rho \leqslant \frac{\|f\|_\rho}{\lambda+(\frac{\pi}{l})^2}. \tag{2.8}$$

Эта оценка по теореме Хилле-Филлипса обеспечивает оценку (2.5) и доказательство теоремы.

Замечание. *В оценках (2.5), (2.8) вес $\rho(t)$ можно заменить эквивалентным $\rho(t)=t(l-t)$*. Используя равенство (2.7) в формуле

$$U(x,-A)g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda x}R(\lambda,x)g(x)dx, \tag{2.9}$$

получаем следующее представление для полугруппы $U(x,-A)$

$$U(x,-A)g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{\lambda x}R(\lambda,-A)gd\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)\sqrt{\lambda}l}[ch\sqrt{\lambda}(\xi+l-x)-$$

$$-ch\sqrt{\lambda}(\xi-x-l)]g(\xi)d\xi+\int\limits_x^l\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)\sqrt{\lambda}l}[ch\sqrt{\lambda}(x+l-\xi)- \tag{2.10}$$

$$-ch\sqrt{\lambda}(x-l+\xi)]g(\xi)d\xi\}d\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^l[e^{-\frac{(2nl-t-\xi)^2}{4x}}-$$

$$-e^{-\frac{(2nl-t+\xi)^2}{4x}}]g(\xi)d\xi=\int\limits_0^l G(t,x,\xi,A)g(\xi)d\xi.$$

Здесь мы воспользовались равенствами

$$\frac{1}{e^{\sqrt{\lambda}l}-e^{-\sqrt{\lambda}l}}=e^{-\sqrt{\lambda}l}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n\sqrt{\lambda}l}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\frac{e^{\lambda x-\alpha\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}}d\lambda=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}e^{-\frac{\alpha^2}{4x}}.$$

Операторы - A имеют квадратный корень, причем операторы $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ являются генераторами сильно непрерывных полугрупп $U(x,-A^{\frac{1}{2}})$, связанных с полугруппами $U(x,-A)$ соотношением

$$U_{\frac{1}{2}}(x,A)g(t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4s}}}{s^{3/2}}U(s,-A)g(t)ds. \tag{2.11}$$

Таким образом, получаем следующее выражения для полугрупп с оператором $-(-A)^{1/2}$

$$U_{1/2}(x,A)g(t) = \frac{x}{\pi}\int\limits_0^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{1}{(2nl+t-\xi)^2+x^2} -$$

$$-\frac{1}{(2nl+t+\xi)^2+x^2}]g(t)d\xi.$$

Из приведенных результатов следует

Теорема 2.2. *Задача о нахождении решения уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x \geqslant 0, y \in [0,l] \subset [0,\infty) \tag{2.12}$$

удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \mu u(x,u)|_{x=0} = g(y), \tag{2.13}$$

$$u(x,0) = 0, u(x,l) = 0, \tag{2.14}$$

где

$$\|g\|_\rho = \sup_{y\in[0,l]} |\frac{g(y)}{\sin^2 \frac{\pi}{l} y}| \tag{2.15}$$

имеет единственное решение, если

$$\mu + \frac{\pi}{l} > 0, \tag{2.16}$$

оно имеет вид (1.10), где $U(x, -A^{\frac{1}{2}})$ *определяется представлением (2.11) и справедлива оценка*

$$\sup_{y\in[0,l]} |\frac{u(x,y)}{\sin^2 \frac{\pi}{l} y}| \leqslant e^{-(\mu+\frac{\pi}{l})x} \sup_{y\in[0,l]} |\frac{g(y)}{\sin^2 \frac{\pi}{l} y}|. \tag{2.17}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев : Высща школа, 1989. — 347 с.

2. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

3. Костин, В. А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В. А. Костин, М. Н. Небольсина // Доклады Академии Наук. — 2009. — Т. 428, № 1. — С. 20—22.

4. Костин, Д. В. О третьей краевой задаче для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве на R^+ / Д. В. Костин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XXIII». — Воронеж, 2012. — С. 97–98.

5. Kostin, D. V. On well-posed solvability of boundary value problems for equations with fractional derivatives in hyper-weight spaces of continuous functions on R^+ / D. V. Kostin // Applicable Analysis. — 2017. — V. 96, iss. 3. — P. 396–408.

6. Небольсина, М. Н. Исследование корректной разрешимости некоторых математических моделей тепломассопереноса методом С. Г. Крейна / Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук. — Воронеж, 2009. — 102 с.

REFERENCES

1. Goldsteyn J. of semi-group of linear operators and their application. [Goldsteyjn Dzh. Polugruppy lineyjnyx operatorov i ix prilozheniya]. Kiev, 1989, 347 p.

2. Krejn S.G. Linear Differential Equations in Banach Spaces. [Kreyjn S.G. Lineyjnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1967, 464 p.

3. Kostin V.A., Nebolsin M.N. About correct resolvability of regional tasks for equations of the second order. [Kostin V.A., Nebol'sina M.N. O korrektnoyj razreshimosti kraevyx zadach dlya uravneniya vtorogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2009, vol. 428, no. 1, pp. 20–22.

4. Kostin D.V. About the third regional task for elliptic type equation in Banach space on R^+. [Kostin D.V. O tret'eyj kraevoyj zadache dlya uravneniya ellipticheskogo tipa v banaxovom prostranstve na R^+]. Modern methods of the theory of regional problems: materials Voronezh spring mathematical school "Pontrjagin Readings–XXIII", Voronezh, 2012, pp. 97–98. 5. Kostin D.V. On well-posed solvability of boundary value problems for equations with fractional derivatives in hyper-weight spaces of continuous functions on R^+. Applicable Analysis, 2017, vol. 96, iss. 3, pp. 396–408.

6. Nebolsina M.N. Research of correct resolvability of some mathematical models of a heatmass transfer by S.G. Krejn's method. [Nebol'sina M.N. Issledovanie korrektnoyj razreshimosti nekotoryx matematicheskix modeleyj teplomassoperenosa metodom S.G. Kreyjna]. Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical Sciences, Voronezh, 2009, 102 p.

Небольсина М. Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Тел.: +7(473)220-83-64

Костин Д. В., д.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: dvk@rambler.ru
Тел.: +7(473)220-83-64

Семендяев Дмитрий Сергеевич, инженер-конструктор 2 категории, АО "НПК "КБМ", г. Коломна, Московская область, Российская Федерация
Тел.: +7(929)577-33-96

Nebolsina M. N., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Tel.: +7(473)220-83-64

Kostin D. V., doctor of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: dvk@rambler.ru
Tel.: +7(473)220-83-64

Semendyaev Dmitry Sergeevich, design engineer category 2, AO "NPK "KBM", Kolomna, Moscow region, Russian Federation
Tel.: +7(929)577-33-96