УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ АЛЬФА–МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ*

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.06.2018 г.

Аннотация. В статье исследуется разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для альфа-модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров, которая впервые была рассмотрена В.А. Павловским. Он заметил, что в ряде моделей наряду с вязкими необходимо учитывать также и упругие свойства. Напряжения в таких средах зависят как от истории деформирования, так и от мгновенного значения скорости деформации, причём проявление вязкостных свойств в поведении материала связано с влиянием растворителя и в случае низкой концентрации полимера этот вклад не является пренебрежимо малым. Это подтверждается экспериментальными исследованиями, к примеру, растворов полиэтиленоксида и полиакриламида, растворов полиакриламида и гуаровой смолы. В данной работе для этой задачи изучается альфа-модель. В отличие от классической модели альфа-модель представляет собой своего рода регуляризованную приближенную систему, которые зависят от некоторого положительного параметра альфа. Интерес к исследованию данной альфа-модели в первую очередь связан с тем, что она являются хорошим инструментом для изучения задач, связанных с турбулентностью потоков жидкости.

Ключевые слова: Альфа–модель, слабая разрешимость, начально–краевая задача.

ON THE SOLVABILITY OF THE ALPHA MODEL FOR POLYMER SOLUTIONS MOTION

A. V. Zvyagin

Abstract. At the paper the solvability in the weak sense of the initial-boundary value problem for the alpha model describing the motion of weakly concentrated aqueous solutions of polymers is investigated. This model at the first time was considered by Pavlovsky. He mentioned that it is necessary to consider elastic properties as well as viscous ones in the case of such fluids. This is due to the fact that the stress depends both on the history of deformation and on the instantaneous value of the strain velocity tensor. The viscous properties of such a material are associated with the influence of the solvent. If the concentration of a polymer is low, this contribution is not negligible. These ideas have been confirmed by the experimental research describing the motion of solutions of polyethyleneoxide and polyacrylamide, solutions of polyacrylamide and guar gum. At this paper the alpha model for the problem under consideration is studied. In contrast to classical model alpha model is regularized approximate system depending on a positive parameter alpha. Interest in the study of this alpha model is due to the fact that it is a good tool for studying the problem associated with the turbulence of fluid flows.

Keywords: Alpha model, weak solvability, initial–boundary value problem.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (МК-2213.2018.1).

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Мы будем исследовать разрешимость следующей начально–краевой задачи для альфа–модели (см. [1]) движения растворов полимеров (см. [2]–[3]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\big(v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\big) + \nabla p = f, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = a. \tag{3}$$

Здесь, $v = (v_1(t,x), \dots, v_n(t,x))$ — скорость движения частицы жидкости, u — функция модифицированной скорости движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — функция плотности внешних сил. Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, $i, j = 1, \dots, n$, обозначается тензор скоростей деформации, $\varkappa > 0$ – время ретардации (запаздывания), ν – вязкость жидкости, $\alpha > 0$ — скалярный параметр.

Введём пространство W_1, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи: $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T;V^1), v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$, с нормой $\|v\|_{E_1} = \|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$.

Обозначим через $\Delta_\alpha : V^3 \to V^1$ оператор $\Delta_\alpha = (J + \alpha^2 A)$, где $J = PI$ и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = W_2^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$. Заметим, оператор Δ_α обратим. Применим проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2\Delta)u$ и выразим из последнего равенства u: $u = (J + \alpha^2 A)^{-1} v = \Delta_\alpha^{-1} v$. Т.к. $v(t) \in V^1$ получим, что $u(t) \in V^3$ при п.в. $t \in [0,T]$.

Определение 1. Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^1$. Функция $v \in E_1$ называется слабым решением начально-краевой задачи (1) – (3), если для всех $\varphi \in V^3$ при почти всех $t \in (0,T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx + \varkappa \int\limits_\Omega \mathcal{E}(\frac{\partial v}{\partial t}) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx -$$

$$-\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \langle f, \varphi \rangle,$$

и начальному условию (3).

Основным результатом для альфа–модели движения растворов полимеров является следующая теорема, доказательство которой основано на аппрокси- мационно–топологическом методе исследования задач гидродинамики (см. [4]–[5]).

Теорема 2. *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^1$. Тогда начально-краевая задача (1) – (3) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in E_1$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Звягин, А. В. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики / А. В. Звягин, В. Г. Звягин, Д. М. Поляков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 72–93.

2. Звягин, А. В. Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров / А. В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 147–156.

3. Звягин, А. В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А. В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.

4. Звягин, В. Г. Об одном варианте аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье-Стокса / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 3. — С. 104–124.

5. Звягин, В. Г. Вариант аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье-Стокса на основе параболической регуляризации / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 3. — С. 125–142.

REFERENCES

1. Zvyagin A.V., Zvyagin V.G., Polyakov D.M. Solvability of alpha-model of hydrodynamics. [Zvyagin A.V., Zvyagin V.G., Polyakov D.M. Razreshimost' al'fa-modeleyj gidrodinamiki]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2, pp. 72–93.

2. Zvyagin A.V. Investigation of solvability of the stationary model of weak aqueous solutions of polymers motion. [Zvyagin A.V. Issledovanie razreshimosti stacionarnoyj modeli dvizheniya slabyx vodnyx rastvorov polimerov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 1, pp. 147–156.

3. Zvyagin A.V. Investigation of solvability of one stationary model of the motion of a non-Newtonian fluid in an unbounded domain. [Zvyagin A.V. Issledovanie razreshimosti odnoyj stacionarnoyj modeli dvizheniya nen'yutonovoyj zhidkosti v neogranichennoyj oblasti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 118–121.

4. Zvyagin V.G., Zvyagin A.V., Turbin M.V. On one approach of topological approximation method for weak solvability investigation of Navier-Stokes system. [Zvyagin V.G., Zvyagin A.V., Turbin M.V. Ob odnom variante approksimacionno-topologicheskogo metoda issledovaniya slaboyj razreshimosti sistemy Nav'e-Stoksa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 104–124.

5. Zvyagin V.G., Zvyagin A.V., Turbin M.V. One variant of approximation-topological method using for studying the weak solvability of the Navier-Stokes system on the base of parabolic regularization. [Zvyagin V.G., Zvyagin A.V., Turbin M.V. Variant approksimacionno-topologicheskogo metoda issledovaniya slaboyj razreshimosti sistemy Nav'e-Stoksa na osnove parabolicheskoyj regulyarizacii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 125–142.

Звягин Андрей Викторович, заведующий лабораторией, НИИ математики Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Zvyagin Andrey V., head of laboratory, Institute of Mathematics of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvyagin.a@mail.ru