УДК 517.977

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ*

М. Б. Зверева, М. М. Мартиросян, М. В. Шаброва

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.01.2017 г.

Аннотация. Изучению задач граничного управления посвящено много работ. Особенно можно выделить публикации В. А. Ильина и его учеников. Основной целью исследований является получение условий, при которых процесс колебаний распределенной системы может быть переведен из начального состояния в наперед заданное финальное. При этом не просто обосновывается существование управления, а предъявляется его явная формула. В настоящей работе рассматривается модель электрических колебаний, описанная системой телеграфных уравнений на геометрическом графе–звезда. Изучена задача выбора граничных режимов, позволяющая перевести систему из начального состояния в заданное финальное состояние.

Ключевые слова: электрические колебания, телеграфные уравнения, геометрический граф, граничное управление.

MODELING OF ELECTRIC OSCILLATIONS FOR TELEGRAPHIC EQUATIONS ON A GRAPH

M. B. Zvereva, M. M. Martirosyan, M. V. Shabrova

Abstract. Many papers have been devoted to the investigation of boundary control problems, for example the publications of V. A. Il'in and his disciples. The main goal of the research is to obtain conditions under which the process of distributed system oscillations could be transferred from the initial state to the specified final state. At the same time, the existence of a control is not just substantiated, but its explicit formula is presented. In this paper, we consider a model of electrical oscillations, described by a system of telegraph equations on a geometric graph-star. The problem of boundary regimes choosing is studied. These regimes allow to transfer the system from the initial state to the specified final state.

Keywords: ectrical oscillations, telegraph equations, geometric graph, boundary control.

Изучению задач управления распределенными системами и их оптимизации посвящены работы многих математиков. Особенно можно выделить публикации В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, Л. Н. Знаменской, А. И. Егорова, А. В. Боровских, В. В. Провоторова [1]–[4]. Основной целью исследований является получение условий, при которых процесс колебаний распределенной системы под воздействием некоторого граничного локального или нелокального управления может быть переведен из начального состояния в наперед заданное финальное. Задачи граничного управления для колебательных процессов, описываемых волновыми уравнениями с особенностями в краевых условиях а также разрывными решениями рассматривались в работах [5]–[9]. Задачи граничного управления для телеграфных уравнений на отрезке изучались, например, в [10], [11].

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

В настоящей работе рассматривается система телеграфных уравнений на геометрическом графе–звезда, состоящем из n ребер длины l. Математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} v_x^j(x,t) + Li_t^j(x,t) + Ri^j(x,t) = 0, \\ i_x^j(x,t) + Cv_t^j(x,t) + Gv^j(x,t) = 0, \\ v^1(l,t) = v^2(l,t) = \ldots = v^n(l,t), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} i^j(l,t) = 0, \\ v^j(x,0) = \varphi^j(x), \\ i^j(x,0) = \psi^j(x), \\ v^j(0,t) = \mu^j(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $j = 1,2,\ldots,n$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Здесь $i^j(x,t)$ — сила тока на j-м ребре, $v^j(x,t)$ — напряжение на j-м ребре. Сопротивление R, плотность индуктивности L, коэффициент емкости C и проводимость изоляции G считаем постоянными на каждом ребре. Причем, будем рассматривать случай, когда сигнал по линиям распространяется без искажения, т. е. выполнено равенство $\beta = \dfrac{G}{C} = \dfrac{R}{L}$.

Теорема. *Пусть* $\psi^{1'}(l) = \psi^{2'}(l) = \ldots = \psi^{n'}(l)$, $\varphi^1(l) = \varphi^2(l) = \ldots = \varphi^n(l)$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi^{j'}(l) = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \psi^j(l) = 0$. *И пусть* $\psi^{j'}(0) = 0$, $\psi^j(0) = 0$, $\varphi^j(0) = 0$, $\varphi^{j'}(0) = 0$ *для всех* $j = 1,2,\ldots,n$. *Тогда при* $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2l}{a}$ *решение задачи (1) может быть представлено в виде*

$$v^j(x,t) = e^{-\beta t}\left(\frac{\Phi^j(x+at) + \Phi^j(x-at)}{2} - \frac{\Psi^j(x+at) - \Psi^j(x-at)}{2aC}\right) +$$

$$+\underline{\mu}^j\left(t - \frac{x}{a}\right)e^{-\frac{\beta x}{a}} - \underline{\mu}^j\left(t - \frac{2l-x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}} +$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t - \frac{2l-x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}},$$

$$i^j(x,t) = e^{-\beta t}\left(\frac{\Psi^j(x+at) + \Psi^j(x-at)}{2} - \frac{\Phi^j(x+at) - \Phi^j(x-at)}{2aL}\right) +$$

$$+aC\left(\underline{\mu}^j\left(t - \frac{x}{a}\right)e^{-\frac{\beta x}{a}} + \underline{\mu}^j\left(t - \frac{2l-x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}}\right) -$$

$$-aC\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t - \frac{2l-x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}},$$

где $j = 1,2,\cdots,n$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{CL}}$, $\beta = \dfrac{G}{C} = \dfrac{R}{L}$,

$$\underline{\mu}^j(t) = \begin{cases} \mu^j(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функции Φ^j и Ψ^j определены следующим образом:

$$\Phi^j(x) = \begin{cases} \varphi^j(x), \quad x \in [0;l] \\ -\varphi^j(-x), \quad x \in [-l;0] \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi^j(2l-x) - \varphi^j(2l-x), \quad x \in [l;2l] \\ \varphi^j(x-2l) - \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi^j(x-2l), \quad x \in [2l;3l] \\ \varphi^j(x+2l) - \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi^j(x+2l), \quad x \in [-2l;-l] \end{cases}$$

$$\Psi^j(x) = \begin{cases} \psi^j(x), \quad x \in [0;l] \\ \psi^j(-x), \quad x \in [-l;0] \\ \psi^j(2l-x) - \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \psi^j(2l-x), \quad x \in [l;2l] \\ \psi^j(x-2l) - \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \psi^j(x-2l), \quad x \in [2l;3l] \\ \psi^j(x+2l) - \dfrac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \psi^j(x+2l), \quad x \in [-2l;-l]. \end{cases}$$

Доказательство проводится непосредственной подстановкой найденных представлений в задачу (1). Покажем, что $v^1\,(l,t) = v^2\,(l,t) = \cdots = v^n\,(l,t)$.

Рассмотрим $v^1(l,t)$. Имеем

$$v^1(l,t) = e^{-\beta t}\left(\frac{\Phi^1(l+at)+\Phi^1(l-at)}{2} - \frac{\Psi^1(l+at)-\Psi^1(l-at)}{2aC}\right) +$$

$$+\underline{\mu}^1\left(t-\frac{l}{a}\right)e^{-\frac{\beta l}{a}} - \underline{\mu}^1\left(t-\frac{l}{a}\right)e^{-\frac{\beta l}{a}} + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t-\frac{l}{a}\right)e^{-\frac{\beta l}{a}}$$

При $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{l}{a}$ получим, что $l \leqslant l + at \leqslant 2l$ и $0 \leqslant l - at \leqslant l$. Тогда

$$\Phi^1(l+at) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(l-at) - \varphi^1(l-at),$$

$$\Psi^1(l+at) = \psi^1(l-at) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(l-at),$$

$$\Phi^1(l-at) = \varphi^1(l-at),$$

$$\Psi^1(l-at) = \psi^1(l-at).$$

Таким образом, с учетом, что $\underline{\mu}^j\left(t-\dfrac{l}{a}\right) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{l}{a}$, получим, что

$$v^1(l,t) = \frac{e^{-\beta t}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi^j(l-at) + \frac{\psi^j(l-at)}{aC}\right).$$

Аналогично, для всех номеров $j = 1,2,\cdots,n$ при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{l}{a}$ получим, что

$$v^j(l,t) = \frac{e^{-\beta t}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi^j(l-at) + \frac{\psi^j(l-at)}{aC}\right).$$

Пусть теперь $\dfrac{l}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{2l}{a}$. Тогда $2l \leqslant l+at \leqslant 3l$ и $-l \leqslant l-at \leqslant 0$. Значит,

$$\Phi^1(l+at) = \varphi^1(at-l) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at-l),$$

$$\Phi^1(l-at) = -\varphi^1(at-l),$$

$$\Psi^1(l+at) = \psi^1(at-l) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at-l),$$

$$\Psi^1(l-at) = \psi^1(at-l).$$

Тогда

$$v^1(l,t) = \frac{e^{-\beta t}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\psi^j(at-l)}{aC} - \varphi^j(at-l)\right) + \frac{2}{n}e^{-\frac{\beta l}{a}}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t-\frac{l}{a}\right).$$

Такое же равенство верно и для всех номеров j. Получим, равенство $v^1(l,t) = v^2(l,t) = \cdots = v^n(l,t)$ верно для всех $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2l}{a}$.

Покажем теперь, что $\sum\limits_{j=1}^{n} i^j(l,t) = 0$. Рассмотрим $i^1(l,t)$. Имеем

$$i^1(l,t) = e^{-\beta t}\left(\frac{\Psi^1(l+at)+\Psi^1(l-at)}{2} - \frac{\Phi^1(l+at)-\Phi^1(l-at)}{2aL}\right) +$$

$$+2aC\underline{\mu}^1\left(t-\frac{l}{a}\right)e^{-\frac{\beta l}{a}} - \frac{2aC}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t-\frac{l}{a}\right)e^{-\frac{\beta l}{a}}$$

Пусть $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{l}{a}$, то $l \leqslant l+at \leqslant 2l$ и $0 \leqslant l-at \leqslant l$. Тогда

$$i^1(l,t) = e^{-\beta t}\left(\psi^1(l-at) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(l-at) - \frac{1}{aLn}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(l-at) + \frac{1}{aL}\varphi^1(l-at)\right).$$

Аналогичные равенства выполняются для всех $i^j(l,t)$, $j = 1,2,\cdots,n$. Тогда

$$i^1(l,t) + i^2(l,t) + \cdots + i^n(l,t) =$$

$$= e^{-\beta t}\left(\sum_{j=1}^{n}\psi^j(l-at) - \sum_{j=1}^{n}\psi^j(l-at) - \frac{1}{aL}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(l-at) + \frac{1}{aL}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(l-at)\right) = 0.$$

Докажем что при $\dfrac{l}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{2l}{a}$ выполняется $\sum\limits_{j=1}^{n} i^j(l,t) = 0$. Для $i^1(l,t)$ имеем

$$i^1(l,t) = e^{-\beta t}\left(\psi^1(at-l) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at-l) - \frac{1}{aL}\varphi^1(at-l) + \frac{1}{aLn}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at-l)\right) +$$

$$+2aC\underline{\mu}^1\left(t-\frac{l}{a}\right)e^{-\frac{\beta l}{a}}+\frac{2aC}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t-\frac{l}{a}\right)e^{-\frac{\beta l}{a}}.$$

Аналогичные равенства выполняются для всех $i^j(l,t)$, $j=1,2,\cdots,n$. Тогда

$$i^1(l,t)+i^2(l,t)+\cdots+i^n(l,t)=$$

$$=e^{-\beta t}\left(\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at-l)-\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at-l)-\frac{1}{aL}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at-l)+\frac{1}{aL}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at-l)\right)+$$

$$+2aCe^{-\frac{\beta l}{a}}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t-\frac{l}{a}\right)-2aCe^{-\frac{\beta l}{a}}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(t-\frac{l}{a}\right)=0.$$

Таким образом, $\sum\limits_{j=1}^{n}i^j(l,t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant\dfrac{2l}{a}$.

Справедливость остальных равенств легко может быть установлена. Теорема доказана.

Замечание. Покажем, что однородная задача

$$\begin{cases} v_x^j(x,t)+Li_t^j(x,t)+Ri^j(x,t)=0,\\ i_x^j(x,t)+Cv_t^j(x,t)+Gv^j(x,t)=0,\\ v^1(l,t)=v^2(l,t)=\ldots=v^n(l,t),\\ \sum\limits_{j=1}^{n}i^j(l,t)=0,\\ v^j(x,0)=0,\\ i^j(x,0)=0,\\ v^j(0,t)=0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение. Отсюда вытекает, что решение задачи (1) является единственным. Обозначим $i(x,t)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}i^j(x,t)$, $v(x,t)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}v^j(x,t)$. Тогда эти функции являются решением задачи

$$\begin{cases} v_x(x,t)+Li_t(x,t)+Ri(x,t)=0,\\ i_x(x,t)+Cv_t(x,t)+Gv(x,t)=0,\\ i(l,t)=0,\\ v(0,t)=0,\\ i(x,0)=0,\\ v(x,0)=0. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что функция $v(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t)+2\beta v_t(x,t)+\beta^2v(x,t)=a^2v_{xx}(x,t),\\ v(0,t)=0,\\ v_x(l,t)=0,\\ v(x,0)=0,\\ v_t(x,0)=0. \end{cases}$$

Введем замену $v(x,t)=u(x,t)e^{-\beta t}$. Тогда функция $u(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\\ u(0,t)=0,\\ u_x(l,t)=0,\\ u(x,0)=0,\\ u_t(x,0)=0. \end{cases}$$

Согласно [12], последняя задача имеет только нулевое решение, т. е. $u(x,t) = 0$. Значит, $v(x,t) = 0$.

Функция $i(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} i_{tt}(x,t) + 2\beta i_t(x,t) + \beta^2 i(x,t) = a^2 i_{xx}(x,t), \\ i_x(0,t) = 0, \\ i(l,t) = 0, \\ i(x,0) = 0, \\ i_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Введем замену $i(x,t) = w(x,t)e^{-\beta t}$. Тогда функция $w(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t), \\ w(x,0) = 0, \\ w_t(x,0) = 0, \\ w_x(0,t) = 0, \\ w(l,t) = 0. \end{cases}$$

Согласно [12], последняя задача имеет только нулевое решение, т. е. $w(x,t) = 0$. Значит, $i(x,t) = 0$. Рассмотрим теперь функции $f^j(x,t) = v^j(x,t) - v(x,t)$ и $g^j(x,t) = i^j(x,t) - i(x,t)$. Для всех $j = 1,2,\ldots,n$ эти функции являются решениями задач

$$\begin{cases} f^j_x(x,t) + Lg^j_t(x,t) + Rg^j(x,t) = 0, \\ g^j_x(x,t) + Cf^j_t(x,t) + Gf^j(x,t) = 0, \\ f^j(l,t) = 0, \\ f^j(x,0) = 0, \\ g^j(x,0) = 0, \\ f^j(0,t) = 0. \end{cases}$$

Аналогично, последняя задача может быть сведена к однородным начально-краевым задачам для волновых уравнений, которые, согласно [12], имеют только нулевое решение. Отсюда будет следовать, что $f^j(x,t) = 0$ и $g^j(x,t) = 0$. С учетом доказанных равенств $v(x,t) = 0$, $i(x,t) = 0$, получим, что $v^j(x,t) = 0$, $i^j(x,t) = 0$ для всех $j = 1,2,\ldots,n$, что и требовалось.

Решим теперь задачу граничного управления, то есть найдем функции $\mu^j(t)$ такие, что в момент времени T выполняются равенства $v^j(x,T) = \varphi^j_*(x)$, $i^j(x,T) = \psi^j_*(x)$, где $\varphi^j_*(x)$ и $\psi^j_*(x)$ — заданные функции. Будем предполагать, что $\psi^{1'}_*(l) = \psi^{2'}_*(l) = \ldots = \psi^{n'}_*(l)$, $\varphi^1_*(l) = \varphi^2_*(l) = \ldots = \varphi^n_*(l)$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi^{j'}_*(l) = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \psi^j_*(l) = 0$. И пусть $\psi^{j'}_*(0) = 0$, $\psi^j_*(0) = 0$, $\varphi^j_*(0) = 0$, $\varphi^{j'}_*(0) = 0$ для всех $j = 1,2,\ldots,n$. Рассмотрим случай, когда $T = \dfrac{2l}{a}$.

Воспользуемся формулами из теоремы 1. Тогда

$$v^j\left(x,\frac{2l}{a}\right) = e^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Phi^j(x+2l)+\Phi^j(x-2l)}{2} - \frac{\Psi^j(x+2l)-\Psi^j(x-2l)}{2aC}\right) +$$
$$+\underline{\mu}^j\left(\frac{2l-x}{a}\right)e^{-\frac{\beta x}{a}} - \underline{\mu}^j\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}} +$$
$$+\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}} = \varphi^j_*(x), \qquad (2)$$

$$i^j\left(x,\frac{2l}{a}\right) = e^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Psi^j(x+2l)+\Psi^j(x-2l)}{2} - \frac{\Phi^j(x+2l)-\Phi^j(x-2l)}{2aL}\right) +$$

$$+aC\left(\underline{\mu}^j\left(\frac{2l-x}{a}\right)e^{-\frac{\beta x}{a}}+\underline{\mu}^j\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}}\right)-$$

$$-\frac{2aC}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}}=\psi_*^j(x). \qquad (3)$$

Умножим равенство (2) на aC и затем сложим с (3). Получим

$$aCe^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Phi^j(x+2l)+\Phi^j(x-2l)}{2}\right)-e^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Phi^j(x+2l)-\Phi^j(x-2l)}{2}\right)+$$

$$+e^{-\frac{2\beta l}{a}}\psi^j(x-2l)+2aC\underline{\mu}^j\left(\frac{2l-x}{a}\right)e^{-\frac{\beta x}{a}}=aC\varphi_*^j(x)+\psi_*^j(x). \qquad (4)$$

Введем замену $t=\dfrac{2l-x}{a}$. Так как $0\leqslant x\leqslant l$, то $\dfrac{l}{a}\leqslant t\leqslant\dfrac{2l}{a}$. С учетом представлений для функций Φ^j и Ψ^j из теоремы 1, равенство (4) примет вид

$$2aC\underline{\mu}^j(t)e^{-\frac{\beta(2l-at)}{a}}=aC\varphi_*^j(2l-at)+\psi_*^j(2l-at)-e^{-\frac{2l\beta}{a}}\left(\psi^j(2l-at)-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(2l-at)\right)-$$

$$-aCe^{-\frac{2l\beta}{a}}\left(\varphi^j(2l-at)-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(2l-at)\right),$$

откуда получаем, что при $\dfrac{l}{a}\leqslant t\leqslant\dfrac{2l}{a}$

$$\mu^j(t)=e^{-\beta t}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi^j(2l-at)+\frac{\psi^j(2l-at)}{aC}\right)\right)-$$

$$-e^{-\beta t}\left(\frac{\varphi^j(2l-at)}{2}+\frac{\psi^j(2l-at)}{2aC}\right)+e^{\beta(\frac{2l}{a}-t)}\left(\frac{\varphi_*^j(2l-at)}{2}+\frac{\psi_*^j(2l-at)}{2aC}\right).$$

Умножим теперь равенство (2) на aC и вычтем из него (3). Получим

$$aCe^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Phi^j(x+2l)+\Phi^j(x-2l)}{2}\right)-e^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Psi^j(x+2l)-\Psi^j(x-2l)}{2}\right)-$$

$$-2aC\underline{\mu}^j\left(\frac{x}{a}\right)e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}}+\frac{4aC}{n}e^{-\frac{\beta(2l-x)}{a}}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j\left(\frac{x}{a}\right)-$$

$$-e^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Psi^j(x+2l)+\Psi^j(x-2l)}{2}\right)+e^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\frac{\Phi^j(x+2l)-\Phi^j(x-2l)}{2aL}\right)=$$

$$=aC\varphi_*^j(x)-\psi_*^j(x). \qquad (5)$$

Введем замену $t=\dfrac{x}{a}$. Так как $0\leqslant x\leqslant l$, то $0\leqslant t\leqslant\dfrac{l}{a}$. С учетом представлений для функций Φ^j и Ψ^j из теоремы 1, равенство (5) примет вид

$$aCe^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\varphi^j(at)-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at)\right)-2aC\underline{\mu}^j(t)e^{-\frac{\beta(2l-at)}{a}}+$$

$$+\frac{4aC}{n}e^{-\frac{\beta(2l-at)}{a}}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j(t)-e^{-\frac{2\beta l}{a}}\left(\psi^j(at)-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at)\right)=$$
$$=aC\varphi_*^j(at)-\psi_*^j(at).$$

Умножим данное равенство на $\dfrac{1}{2aC}e^{\frac{\beta(2l-at)}{a}}$. Получим

$$\frac{e^{-\beta t}}{2}\left(\varphi^j(at)-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at)\right)-\underline{\mu}^j(t)+\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j(t)-$$
$$-\frac{1}{2aC}e^{-\beta t}\left(\psi^j(at)-\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at)\right)=\frac{e^{\frac{\beta(2l-at)}{a}}}{2}\varphi_*^j(at)-\frac{e^{\frac{\beta(2l-at)}{a}}\psi_*^j(at)}{2aC}, \tag{6}$$

где $j=1,2,\ldots,n$. Сложим все равенства в системе (6). Получим, что

$$-\frac{e^{-\beta t}}{2}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at)+\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j(t)+\frac{e^{-\beta t}}{2aC}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at)=$$
$$=\frac{e^{\frac{\beta(2l-at)}{a}}}{2}\sum_{j=1}^{n}\varphi_*^j(at)-\frac{e^{\frac{\beta(2l-at)}{a}}}{2aC}\sum_{j=1}^{n}\psi_*^j(at).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}^j(t)=\frac{e^{-\beta t}}{2}\sum_{j=1}^{n}\varphi^j(at)-\frac{e^{-\beta t}}{2aC}\sum_{j=1}^{n}\psi^j(at)+$$
$$+\frac{e^{\frac{\beta(2l-at)}{a}}}{2}\sum_{j=1}^{n}\varphi_*^j(at)-\frac{e^{\frac{\beta(2l-at)}{a}}}{2aC}\sum_{j=1}^{n}\psi_*^j(at).$$

Подставив данное представление в (6) и выразив из полученного равенства $\underline{\mu}^j(t)$, имеем

$$\mu_j(t)=e^{-\beta t}\left(\frac{\varphi^j(at)}{2}-\frac{\psi^j(at)}{2aC}\right)+e^{\beta(\frac{2l}{a}-t)}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_*^j(at)-\frac{\psi_*^j(at)}{aC}\right)+$$
$$+e^{\beta(\frac{2l}{a}-t)}\left(\frac{\psi_*^j(at)}{2aC}-\frac{\varphi_*^j(at)}{2}\right).$$

Таким образом, получили, что

$$\mu^j(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}\left(\dfrac{\varphi^j(at)}{2}-\dfrac{\psi^j(at)}{2aC}\right)+e^{\beta(\frac{2l}{a}-t)}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_*^j(at)-\dfrac{\psi_*^j(at)}{aC}\right)+\\ +e^{\beta(\frac{2l}{a}-t)}\left(\dfrac{\psi_*^j(at)}{2aC}-\dfrac{\varphi_*^j(at)}{2}\right),\quad t\in[0,\dfrac{l}{a}]\\ e^{-\beta t}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi^j(2l-at)+\dfrac{\psi^j(2l-at)}{aC}\right)\right)-\\ -e^{-\beta t}\left(\dfrac{\varphi^j(2l-at)}{2}+\dfrac{\psi^j(2l-at)}{2aC}\right)+\\ +e^{\beta(\frac{2l}{a}-t)}\left(\dfrac{\varphi_*^j(2l-at)}{2}+\dfrac{\psi_*^j(2l-at)}{2aC}\right),\quad t\in[\dfrac{l}{a},\dfrac{2l}{a}].\end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Успехи математических наук. — 2005.— Т. 60, вып. 6 (366). — С. 89–114.

2. Егоров, А. И. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, вып. 1. — С. 85–92.

3. Боровских, А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, вып. 1. — С. 64–89.

4. Провоторов, В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн / В. В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. — 2012. — Вып. 1. — С. 62–71.

5. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний сингулярной струны / М. Б. Зверева, Ф. О. Найдюк, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 111—119.

6. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134—142.

7. Kamenskii, M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization. — 2017. — V. 67, iss. 9. — P. 1321–1332.

8. Zvereva, M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions / M. Zvereva // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2017. — V. 72. — P. 141–150.

9. Зверева, М. Б. Математическая модель колебаний струны с нелинейным условием / М. Б. Зверева, М. И. Каменский, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 88–98.

10. Ильин, В. А. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // ДАН. — 2002. — Т. 387, № 5. — С. 600–603.

11. Знаменская, Л. Н. Управление упругими колебаниями / Л. Н. Знаменская. — М. : Физматлит, 2004. — 176 с.

12. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Издательство МГУ, 1999. — 797 с.

REFERENCES

1. Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimization of boundary controls of string vibrations. [Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimizaciya granichnyx upravlenij kolebaniyami struny]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 6 (366), pp. 89–114.

2. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. On the controllability of elastic oscillations connected in series objects with distributed parameters. [Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Ob upravlyaemosti uprugix kolebanij posledovatel'no soedinennyx ob'ektov s raspredelennymi parametrami]. *Trudy instituta matematiki i mexaniki UrO RAN — Supplement to Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 2011, vol. 17, iss. 1, pp. 85–92.

3. Borovskikh A.V. Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. [Borovskikh A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoj strunoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, vol. 43, iss. 1, pp. 64–89.

4. Provotorov V.V. Construction of boundary controls in the problem of oscillation of a system of strings. [Provotorov V.V. Postroenie granichnyx upravlenij v zadache o gashenii kolebanij sistemy strun]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika.*

Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg university. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2012, no. 1, pp. 62—71.

5. Zvereva M.B., Najdyuk F.O., Zalukaeva Zh.O. Modeling vibrations of a singular string. [Zvereva M.B., Najdyuk F.O., Zalukaeva Zh.O. Modelirovaniye kolebanij singulyarnoj struny]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 111—119.

6. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Najdyuk F.O., Zalukaeva Zh.O. Modelirovaniye kolebaniy razryvnoy struny dlya sluchaya tretyey krayevoy zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134—142.

7. Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type. Optimization, 2017, vol. 67, iss. 9, pp. 1321–1332.

8. Zvereva M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 2017, vol. 72, pp. 141–150.

9. Zvereva M.B., Kamenskii M.I., Shabrov S.A. A mathematical model of string oscillations with nonlinear condition. [Zvereva M.B., Kamenskii M.I., Shabrov S.A. Matematicheskaya model' kolebanij struny s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 88–98.

10. Il'in V.A., Moiseev E.I. On the boundary control at one end of the process described by the telegraph equation. [Il'in V.A., Moiseev E.I. O granichnom upravlenii na odnom kontse protsessom opisyvayemym telegrafnym uravneniyem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2002, vol. 387, no. 5, pp. 600–603.

11. Znamenskaya L.N. Control of elastic vibrations. [Znamenskaya L.N. Upravleniye uprugimi kolebaniyami]. Moscow, 2004, 176 p.

12. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Equations of mathematical physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Moscow State University, 1999, 797 p.

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Мартиросян Мэри Мартиросовна, аспирант, кафедра функционального анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: meri-martirosyan-91@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Martirosyan Mary Martirosovna, Postgraduate student of the Department of functional analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: meri-martirosyan-91@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шаброва Марина Вячеславовна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: koshka445@mail.ru

Shabrova Marina Vyacheslavovna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: koshka445@mail.ru