УДК 519.6

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА А. Н. ТИХОНОВА РЕШЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОРМ, ОТЛИЧНЫХ ОТ ЕВКЛИДОВОЙ*

В. И. Ерохин[1], В. В. Волков[2], М. Н. Хвостов[2]

[1] — *Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского,*
[2] — *Борисоглебский филиал Воронежского государственного университета*

Поступила в редакцию 14.03.2018 г.

Аннотация. В настоящей статье для метода А. Н. Тихонова решения приближенных систем линейных алгебраических уравнений предложена модификация с использованием векторных и матричных норм, отличных от евклидовой. Представлена обобщенная постановка задачи и доказан ряд лемм и теорем, позволяющих свести рассматриваемую задачу к задаче математического программирования определённого вида. Рассмотрены четыре задачи указанного класса, построенные с использованием полиэдральных норм, представлены их редукции к соответствующим задачам математического программирования. Две задачи рассмотрены более подробно. Для них доказаны теоремы, обосновывающие переход к совокупности задач линейного программирования. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: приближенные системы линейных алгебраических уравнений, регуляризованный метод наименьших квадратов А. Н. Тихонова, полиэдральные нормы, задачи линейного программирования.

MODIFICATION OF THE A. N. TIKHONOV'S METHOD FOR SOLVING APPROXIMATE SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS FOR NON-EUCLIDEAN NORMS

V. I. Erokhin, V. V. Volkov, M. N. KHvostov

Abstract. The modification of A. N. Tikhonov's method for solving approximate system of linear algebraic equations with using vector and matrix norms different from Euclidean is proposed in present article. A generalized formulation of the problem is presented and a series of lemmas and theorems are proved, which allow to reduce this problem to a certain type of mathematical programming problem. Four problems of this class, constructed using polyhedral norms, are described. Their reduction to the problems of mathematical programming are presented. Two problems are considered in more detail. Theorems have been proved that substantiate the reducing these problems to a set of linear programming problems. The results of computational experiments are presented.

Keywords: approximate system of linear algebraic equations, regularized A.N. Tikhonov least squares method, polyhedral norms, linear programming problems.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-31-00083

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим точную совместную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A_0 x = b_0, \tag{1}$$

где $A_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b_0 \in \mathbb{R}^m$, $b_0 \neq 0$, соотношения между размерами A_0 и ее рангом не оговариваются, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – решение указанной системы с минимальной векторной $\varphi(\cdot)$-нормой. Численные значения A_0, b_0 и x_0 неизвестны, а вместо них заданы приближенные матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0$, такие, что выполняются условия

$$\|A_0 - A\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu,$$
$$\psi(b_0 - b) \leqslant \delta < \psi(b),$$

где $\mu \geqslant 0$ и $\delta \geqslant 0$ – известные параметры, $\psi(\cdot)$ – произвольная векторная норма, $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ – матричная норма [1], определенная как

$$\|A\|_{\varphi,\psi} := \max_{x\neq 0} \frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}.$$

Полнота ранга матрицы A и совместность системы $Ax = b$ в общем случае не предполагаются.

Требуется найти матрицу $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и векторы $b_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\|A - A_1\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu, \psi(b - b_1) \leqslant \delta, A_1 x_1 = b_1, \varphi(x_1) \to \min.$$

Указанную задачу будем обозначать $Z_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$.

Приближенные СЛАУ могут возникать в большом числе прикладных задач науки и техники, таких как обработка наблюдений, анализ временных рядов, параметрическая идентификация линейных моделей физических и технических объектов (см., например, [2–5]). При этом источником погрешностей могут служить как погрешности экспериментальных данных, так и ошибки округления, возникающие при вычислениях в арифметике с конечной разрядной сеткой. Наличие указанных погрешностей нередко приводит к тому, что исследуемые СЛАУ становятся несовместными.

Задача $Z_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ является является модификацией (обобщением) задачи, рассмотренной А. Н. Тихоновым [6, 7] с использованием евклидовой матричной и векторной нормы и названной им *регуляризованным методом наименьших квадратов* (РМНК) [8, 9]. Исследованию задачи в исходной постановке посвящены, в частности, работы [10, 11].

В настоящей статье будет проведено исследование задачи $Z_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$, важным элементом которого является переход и последующее рассмотрение задачи

$$R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta) : \varphi(x) \to \min_{\psi(b-Ax)=\mu\cdot\varphi(x)+\delta} (=: \chi_{\varphi,\psi}).$$

Работа является продолжением исследований, представленных в статье [12], и обсуждавшихся ранее на VIII Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2016) [13], а также на семинаре СПбГУ по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации (CNSA&NDO).

Отметим, что задачи, подобные рассматриваемой в настоящей работе, исследовались и раньше. В частности, для решения некорректно поставленных задач в операторном виде (операторных уравнений с приближенными данными) может быть использован метод обобщенной невязки. Данный метод описывается, в частности, в книгах [14, 15]. Однако в рамках настоящего исследования нас будет интересовать только конечномерный случай.

ИНСТРУМЕНТАРИЙ

Важным инструментом исследования задачи $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ является задача о нахождении неизвестной матрицы с минимальной $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$-нормой, представляющая собой решение заданной СЛАУ $Ax = b$ с известными векторами x и b. Решение указанной задачи дает приведенная ниже теорема, которая является обобщением «основной леммы» А. Н. Тихонова [6, 7] на векторные и матричные нормы, отличные от евклидовой. Предпосылки, близкие по идеям и технике доказательства результаты были приведены в работе [16], без доказательства теорема впервые была сформулирована в работе [17], доказательство теоремы можно найти в работах [18, 19], но мы его все-таки приводим для удобства читателей.

Теорема 1. Система уравнений $Ax = b$, рассматриваемая относительно неизвестной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, при заданных $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^m$, разрешима. Решение $\widehat{A}$ этой системы, минимальное по $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$-норме, допускает представление

$$\widehat{A} = by^\top, \tag{2}$$

причем

$$\|\widehat{A}\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(b)}{\varphi(x)}, \tag{3}$$

где $y \in \mathcal{D}(x,\varphi(\cdot)) := \left\{y \mid y^\top x = \varphi^*(y)\cdot\varphi(x) = 1\right\}$ – вектор, двойственный к вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$, $\varphi^*(\cdot)$ – векторной норма, *двойственная* к норме $\varphi(\cdot)$ относительно скалярного произведения [20], определяемая соотношением

$$\varphi^*(x) := \max_{y\neq 0}\frac{\left|x^\top y\right|}{\varphi(y)}.$$

Доказательство. 1. Покажем, что матрица $\widehat{A}$, задаваемая формулой (2), является решением системы $Ax = b$ при фиксированных векторах $x \neq 0$ и b.

Действительно, $y^\top x = 1$ в силу условия $y \in \mathcal{D}(x,\varphi(\cdot))$, поэтому

$$\widehat{A}x = by^\top x \equiv b.$$

2. Покажем справедливость формулы (3).

Действительно, в силу определений $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$-нормы, $\varphi^*(\cdot)$-нормы и свойства $y \in \mathcal{D}(x,\varphi(\cdot))$ имеем

$$\left\|by^\top\right\|_{\varphi,\psi} = \max_{x\neq 0}\frac{\psi\left(b\cdot y^\top x\right)}{\varphi(x)} = \psi(b)\cdot\max_{x\neq 0}\frac{\left|y^\top x\right|}{\varphi(x)} = \psi(b)\cdot\varphi^*(y) = \frac{\psi(b)}{\varphi(x)}.$$

3. Покажем, что для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, являющейся решением системы $Ax = b$, выполняется условие

$$\|A\|_{\varphi,\psi} \geqslant \frac{\psi(b)}{\varphi(x)}.$$

Действительно, поскольку $\|A\|_{\varphi,\psi} = \max\limits_{x\neq 0}\frac{\psi(Ax)}{\varphi(x)}$, то

$$\psi(Ax) \leqslant \|A\|_{\varphi,\psi}\cdot\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(b) \leqslant \|A\|_{\varphi,\psi}\cdot\varphi(x) \Leftrightarrow \|A\|_{\varphi,\psi} \geqslant \frac{\psi(b)}{\varphi(x)}.$$

Теорема доказана. ■

Замечание 1. *В отличие от утверждения «основной леммы» о единственности матрицы, минимальной по евклидовой норме, утверждение о единственности матрицы, минимальной по $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$-норме в общем случае неверно.*

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ РМНК

Свойства обобщенной задачи РМНК раскрываются в приведенных ниже утверждениях.

Лемма 1. Обобщенная задача РМНК имеет решение.

Доказательство. Заметим, что допустимое множество обобщенной задачи РМНК не пусто, поскольку можно положить $A_1 = A_0$, $b_1 = b_0$, $x_1 = x_0$. Заметим также, что допустимое множество обобщенной задачи РМНК компактно по параметрам A_1 и b_1. В то же время, для произвольной точки $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдется такое число $M > 0$, что

$$\varphi(x) \geqslant M \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \varphi(x_1).$$

Следовательно, при решении обобщенной задачи РМНК параметр x можно также рассматривать заданным на компактном множестве $\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \leqslant M\}$. Таким образом, обобщенная задача РМНК имеет оптимальное решение в силу теоремы Вейерштрасса.

Лемма доказана. ■

Лемма 2. Для любого решения $\{A_1,b_1,x_1\}$ обобщенной задачи РМНК выполняется условие $x_1 \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, а именно: пусть решение обобщенной задачи РМНК $\{A_1,b_1,x_1\}$ существует, но $x_1 = 0$. В этом случае, в силу аксиомы невырожденности, $\varphi(x_1) = 0$ и другого значения x_1 в множестве $\{A_1,b_1,x_1\}$ быть не может. Так как система $A_1x_1 = b_1$ совместна, то $b_1 = 0$, откуда следует $\psi(b_1 - b) = \psi(b)$, что противоречит условию $\psi(b_1 - b) < \psi(b)$.

Получили противоречие. Лемма доказана. ■

Лемма 3. Пусть $\{\breve{A},\breve{b},\breve{x}\}$ – решение обобщенной задачи РМНК. Тогда выполняются условия

$$\begin{gathered} \|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} = \mu, \\ \psi(\breve{b} - b) = \delta. \end{gathered}$$

Доказательство. Заметим, что в силу леммы 2 $\breve{x} \neq 0$, откуда следует, что множество векторов, двойственных вектору $\breve{x}$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$, непусто.

Предположим, что условия леммы не выполняются. Рассмотрим три возможных случая.

Случай A: $\|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} < \mu$, $\psi(\breve{b} - b) = \delta$.

Пусть $\Delta A = \alpha\breve{b}y^\top$, где y – вектор, двойственный вектору $\breve{x}$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$), $\alpha > 0$ – скалярный параметр. Положим $z = \frac{1}{1+\alpha}\breve{x}$. Несложно убедиться, что вектор z принадлежит множеству решений системы $(\breve{A} + \Delta A)x = \breve{b}$. В силу того, что $\|\breve{A} + \Delta A - A\|_{\varphi,\psi} \leqslant \|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} + \|\Delta A\|_{\varphi,\psi} = \|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} + \alpha\frac{\psi(\breve{b})}{\varphi(\breve{x})}$, подходящим выбором значения $\alpha > 0$ можно добиться выполнения условия $\|\breve{A} + \Delta A - A\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu$. Таким образом, существует набор $\{\breve{A} + \Delta A,\breve{b},z\}$, который принадлежит допустимому множеству обобщенной задачи РМНК и, в то же время, $\varphi(z) = \frac{1}{1+\alpha}\varphi(\breve{x}) < \varphi(\breve{x})$, что противоречит предположению об оптимальности $\{\breve{A},\breve{b},\breve{x}\}$.

Случай B: $\|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} = \mu$, $\psi(\breve{b} - b) < \delta$.

Положим $z = \frac{1}{1+\beta}\breve{x}$, $\Delta b = -\frac{\beta}{1+\beta}\breve{b}$, где $\beta > 0$ – скалярный параметр. Заметим, что вектор z принадлежит множеству решений системы $\breve{A}x = \breve{b} + \Delta b$. В силу того, что $\psi(\breve{b} + \Delta b - b) \leqslant \psi(\breve{b} - b) + \psi(\Delta b) = \psi(\breve{b} - b) + \frac{\beta}{1+\beta}\psi(\breve{b})$, подходящим выбором значения $\beta > 0$ можно добиться выполнения условия $\psi(\breve{b} + \Delta b - b) \leqslant \delta$. Таким образом, существует набор $\{\breve{A},\breve{b} + \Delta b,z\}$, который принадлежит допустимому множеству обобщенной задачи РМНК и, в то же время, $\varphi(z) = \frac{1}{1+\beta}\varphi(\breve{x}) < \varphi(\breve{x})$, что противоречит предположению об оптимальности $\{\breve{A},\breve{b},\breve{x}\}$.

Случай C: $\|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} < \mu$, $\psi(\breve{b} - b) < \delta$.

Положим $\Delta A = \alpha \breve{b} y^\top$, $\Delta b = -\frac{\beta}{1+\beta}\breve{b}$, $z = \frac{1}{(1+\alpha)\cdot(1+\beta)}\breve{x}$, где y – вектор, двойственный вектору $\breve{x}$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$). Несложно убедиться, что вектор z принадлежит множеству решений системы $(\breve{A} + \Delta A)x = \breve{b} + \Delta b$. Поскольку

$$\|\breve{A} + \Delta A - A\|_{\varphi,\psi}\} \, \|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} + \|\Delta A\|_{\varphi,\psi} = \|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} + \alpha\tfrac{\psi(\breve{b})}{\varphi(\breve{x})},$$
$$\psi(\breve{b} + \Delta b - b) \leqslant \psi(\breve{b} - b) + \psi(\Delta b) = \psi(\breve{b} - b) + \tfrac{\beta}{1+\beta}\psi(\breve{b}),$$

подходящим выбором значений $\alpha > 0$, $\beta > 0$ можно добиться выполнения условий $\|\breve{A} + \Delta A - A\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu$, $\psi(\breve{b} + \Delta b - b) \leqslant \delta$. Таким образом, существует набор $\{\breve{A} + \Delta A, \breve{b} + \Delta b, z\}$, который принадлежит допустимому множеству обобщенной задачи РМНК и, в то же время, $\varphi(z) = \frac{1}{(1+\alpha)\cdot(1+\beta)}\varphi(\breve{x}) < \varphi(\breve{x})$, что противоречит предположению об оптимальности $\{\breve{A}, \breve{b}, \breve{x}\}$.

Во всех трех случаях получили противоречие.

Лемма доказана. ■

Лемма 4. Если при некоторых $\mu > 0$, $\delta > 0$ уравнение

$$\psi(b - Ax) - \mu \cdot \varphi(x) = \delta \tag{4}$$

имеет решение $x \neq 0$, то существует матрица $\bar{A}$ и вектор $\bar{b}$ такие, что $\bar{A}x = \bar{b}$, $\|A_0 - A\|_{\varphi,\psi} = \mu$, $\psi(b_0 - b) = \delta$.

Доказательство. Заметим, что в силу условий леммы, неотрицательности и невырожденности векторных норм, получаем $\psi(b - Ax) > 0$. Пусть

$$\breve{b} = b - \frac{\delta}{\psi(b - Ax)}(b - Ax), \quad \breve{A} = A + (\breve{b} - Ax)y^\top,$$

где y – вектор, двойственный вектору x относительно нормы $\varphi(\cdot)$. Несложно убедиться, что $\psi(\breve{b} - b) = \delta$, а вектор x принадлежит множеству решений системы $\breve{A}x = \breve{b}$. Кроме того, $\|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} = \mu$. Действительно,

$$\|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} = \|(\breve{b} - Ax)y^\top\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\breve{b} - Ax)}{\varphi(x)}.$$

Но

$$\psi(\breve{b} - Ax) \quad = \psi(b - Ax - \tfrac{\delta}{\psi(b-Ax)}(\breve{b} - Ax)) =$$
$$= |1 - \tfrac{\delta}{\psi(b-Ax)}| \cdot \psi(b - Ax) = |\psi(b - Ax) - \delta|.$$

В свою очередь, из условий леммы следует, что

$$\psi(b - Ax) - \delta = \mu \cdot \varphi(x) > 0,$$

откуда и получаем

$$\psi(\breve{b} - Ax) = \mu \cdot \varphi(x),$$
$$\|\breve{A} - A\|_{\varphi,\psi} = \tfrac{\psi(\breve{b}-Ax)}{\varphi(x)} = \mu.$$

Лемма доказана. ■

Теорема 2. Обобщенная задача РМНК имеет непустое множество решений тогда и только тогда, когда имеет решение задача $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$. Оптимальные значения целевых функций обеих задач совпадают. Если обобщенная задача РМНК имеет непустое множество решений, то к нему принадлежит решение, полученное следующим образом: x^* – решение задачи $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$,

$$y \in \mathcal{D}\left(x^*, \varphi\left(\cdot\right)\right), \tag{5}$$

$$b^* = b - \frac{\delta}{\psi(b - Ax^*)} \cdot (b - Ax^*), \tag{6}$$

$$A^* = A + (b^* - Ax^*)y^\top. \qquad (7)$$

Доказательство. 1. Покажем, что если обобщенная задача РМНК имеет некоторое решение $\{\breve{A},\breve{b},\breve{x}\}$, то имеет решение и задача $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$, причем

$$\min_{\psi(b-Ax)-\mu\cdot\varphi(x)=\delta} \varphi(x) = \varphi(\breve{x}) > 0. \qquad (8)$$

Действительно, пусть матрица $\breve{A} = A + \Delta A$ и векторы $\breve{b} = b + \Delta b$, $\breve{x}$ – решение обобщенной задачи РМНК. Тогда, в силу формулировки задачи и лемм 1 и 2 выполняются условия

$$\begin{gathered}\|\Delta A\|_{\varphi,\psi} = \mu,\\ \psi(\Delta b) = \delta,\end{gathered}$$

система $\breve{A}x = \breve{b}$ является совместной, для любого ее решения $\breve{x}$ выполняется условие $\breve{x} \neq 0$.

Покажем, что выполняется условие

$$\psi(b - A\breve{x}) \leqslant \mu \cdot \varphi(\breve{x}) + \delta.$$

Действительно, т. к. $\breve{x}$ – решение системы $\breve{A}x = \breve{b}$, то $b - A\breve{x} = \Delta A\breve{x} - \Delta b$, откуда следует, что

$$\psi(b - A\breve{x}) \leqslant \psi(\Delta A\breve{x}) + \psi(\Delta b) \leqslant \|\Delta A\|_{\varphi,\psi} \cdot \varphi(\breve{x}) + \psi(\Delta b) \leqslant \mu \cdot \varphi(\breve{x}) + \delta.$$

Покажем, что рассматриваемое нестрогое неравенство выполняется как равенство. Для этого предположим противное, а именно, пусть

$$\psi(b - A\breve{x}) < \mu \cdot \varphi(\breve{x}) + \delta.$$

Сформируем вектор h как

$$h = -\frac{\delta}{\psi(b - A\breve{x})}(b - A\breve{x})$$

и матрицу H как $H = (b + h - A\breve{x})y^\top$, где y – вектор, двойственный вектору x^* относительно нормы $\varphi(\cdot)$.

Как несложно заметить, вектор $\breve{x}$ является решением системы $(A + H)x = b + h$. Кроме того,

$$\begin{gathered}\psi(h) = \delta,\\ H = \tfrac{\psi(b-A\breve{x}-\delta)}{\psi(b-A\breve{x})}(b - A\breve{x})y^\top,\\ \|H\|_{\varphi,\psi} = \tfrac{\psi(b-A\breve{x}-\delta)}{\varphi(\breve{x})}.\end{gathered}$$

Но из принятого выше предположения и последнего условия следует, что $\|H\|_{\varphi,\psi} < \mu$. Таким образом, совокупность объектов $\{A+H, b+h, \breve{x}\}$ также является решением обобщенной задачи РМНК. Осталось заметить, что условие $\|H\|_{\varphi,\psi} < \mu$ противоречит лемме 3.

Таким образом, условие $\psi(b - A\breve{x}) \leqslant \mu\cdot\varphi(\breve{x}) + \delta$ выполняется как равенство, откуда следует, что допустимое множество задачи $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ не пусто. Опираясь на теорему Вейерштрасса и проводя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 1, можно показать, что задача $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ имеет решение x^*. Заметим, что $x^* \neq 0$, поскольку в противном случае получаем $\psi(b - Ax^*) = \psi(b) = \delta$, что противоречит условию $\psi(b) < \delta$.

Как следствие,

$$0 < \chi_{\varphi,\psi} = \min_{\psi(b-Ax)-\mu\cdot\varphi(x)=\delta} \varphi(x) \leqslant \varphi(\breve{x}) = \varphi(x^*) = \min_{\breve{A}x=\breve{b}, \|\breve{A}-A\|_{\varphi,\psi}\leqslant\mu, \psi(\breve{b}-b)\leqslant\delta} \varphi(x). \qquad (9)$$

2. Покажем, что если задача $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ имеет некоторое решение x^*, то и обобщенная задача РМНК имеет решение $\{A^*,b^*,x^*\}$, причем матрица A^* и вектор b^* могут быть определены по формулам (5)–(7).

Сперва покажем, что объекты, задаваемыми формулами (5)–(7), существуют для любого x^*, являющегося решением задачи $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$. Действительно, в силу (8) выполняется условие

$$\varphi(x^*) > 0 \Leftrightarrow x^* \neq 0,$$

из которого следует, что существует вектор y, двойственный вектору x^* относительно нормы $\varphi(\cdot)$. В то же время, из условий $\delta > 0$, $\mu > 0$, $\varphi(x^*) > 0$ и $\psi(b - Ax^*) - \mu \cdot \varphi(x^*) = \delta$ следует, что $\psi(b - Ax^*) > 0$. Таким образом, вектор b^* и матрица A^*, задаваемые формулами теоремы 3, действительно существуют.

Покажем, что выполняются условия

$$\begin{gathered} \|A^* - A\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu, \\ \psi(b^* - b) \leqslant \delta. \end{gathered}$$

Действительно, поскольку x^* – решение задачи $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$, указанный вектор является решением уравнения (4). Тогда, в силу леммы 4 и формул (5)–(7), выполняются условия $\|A^* - A\|_{\varphi,\psi} = \mu$, $\psi(b^* - b) = \delta$, являющиеся частным случаем рассматриваемых условий-неравенств.

Таким образом, действительно, если задача $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ имеет непустое множество решений, то совокупность объектов $\{A^*,b^*,x^*\}$, где x^* принадлежит множеству решений указанной задачи, матрица A^* и вектор b^* построены по формулам (5)–(7), принадлежит допустимому множеству обобщенной задачи РМНК. Следовательно, в силу леммы 3, обобщенная задача РМНК имеет решение. При этом

$$\min_{\breve{A}x=\breve{b}, \|\breve{A}-A\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu, \psi(\breve{b}-b) \leqslant \delta} \varphi(x) \leqslant \varphi(x^*) = \min_{\psi(b-Ax)-\mu\cdot\varphi(x)=\delta} \varphi(x). \tag{10}$$

3. Сопоставляя условия (9) и (10), заключаем, что

$$\min_{\breve{A}x=\breve{b}, \|\breve{A}-A\|_{\varphi,\psi} \leqslant \mu, \psi(\breve{b}-b) \leqslant \delta} \varphi(x) = \min_{\psi(b-Ax)-\mu\cdot\varphi(x)=\delta} \varphi(x).$$

Теорема доказана. ■

Замечание 2. *Совместность системы $Ax = b$ не является необходимым условием существования решения обобщенной задачи РМНК.*

Рассмотрим задачу

$$R'_{\varphi,\psi}(\mu,\delta): \qquad \varphi(x) \to \min_{\psi(b-Ax) \leqslant \mu\cdot\varphi(x)+\delta} \left(=: \chi'_{\varphi,\psi}\right).$$

Символом $X'_{\varphi,\psi}$ будем обозначать допустимое множество задачи $R'_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$.

Справедлива

Теорема 3. Задачи $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ и $R'_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ эквивалентны: они разрешимы или не разрешимы одновременно, причем в случае их разрешимости $\chi_{\varphi,\psi} = \chi'_{\varphi,\psi}$, $X'_{\varphi,\psi} = X_{\varphi,\psi}$, где $X_{\varphi,\psi}$ допустимое множество задачи $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$.

Доказательство. 1. Пусть задача $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ имеет решение, т.е. $X_{\varphi,\psi} \neq \varnothing$. Очевидно, что в этом случае $X_{\varphi,\psi} \subset X'_{\varphi,\psi} \Rightarrow X'_{\varphi,\psi} \neq \varnothing$, $\chi'_{\varphi,\psi} \leqslant \chi_{\varphi,\psi}$.

Предположим теперь, что мощность $X'_{\varphi,\psi}$ выше, чем $X'_{\varphi,\psi}$, т. е.

$$\exists z \in X'_{\varphi,\psi} \,\middle|\, z \notin X_{\varphi,\psi} \Rightarrow \psi(b - Az) < \mu \cdot \chi'_{\varphi,\psi} + \delta \,.$$

Однако в силу условия

$$\psi(b - Az) < \mu \cdot \chi'_{\varphi,\psi} + \delta \tag{11}$$

каждая из величин $\chi_{\varphi,\psi}$, $\chi'_{\varphi,\psi}$ может быть уменьшена, что противоречит допущению об ее оптимальности. Таким образом, $X_{\varphi,\psi} = X_{\varphi,\psi}$, и, следовательно, $\chi_{\varphi,\psi} = \chi'_{\varphi,\psi}$.

2. Пусть задача $R'_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ имеет решение, а задача $R_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ решения не имеет. Очевидно, что в этом случае существует $z \in X'_{\varphi,\psi}$ такой, что выполняется условие (11), которое, как уже было показано выше, противоречит предположению об оптимальности значения $\chi'_{\varphi,\psi}$.

Теорема доказана. ■

ОБОБЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ РМНК В ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ НОРМАХ

При использовании в качестве норм $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ норм Гельдера с показателями $p = 1,\infty$, являющихся *полиэдральными* [21], матричная $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ – норма также становится полиэдральной.

Приведем примеры [18]:

$$\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_1, \psi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty, \|A\|_{\varphi,\psi} = \max_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots n}} |a_{ij}|.$$

$$\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty,\ \psi(\cdot) = \|\cdot\|_1,\ \mathrm{rank} A = 1,\ \|A\|_{\varphi,\psi} = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty} = \sum_{i,j} |a_{ij}|.$$

$$\varphi(\cdot) = \psi(\cdot) = \|\cdot\|_1, \|A\|_{\varphi,\psi} = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

$$\varphi(\cdot) = \psi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty, \|A\|_{\varphi,\psi} = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

При выборе в качестве норм $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ в задаче $Z_{\varphi,\psi}(\mu,\delta)$ норм Гельдера с показателем $p = 1,\infty$, в силу теорем 2 и 3 получаем обобщенные задачи РМНК и их редукции к задачам математического программирования, в которых допустимые области и целевые функции построены с использованием полиэдральных норм (используемый ниже знак «$\mapsto$» – синоним фразы «сводится к»):

$$Z_{1,1}(\mu,\delta) \mapsto R_{1,1}(\mu,\delta) : \|b - Ax\|_1 \leqslant \mu \cdot \|x\|_1 + \delta,\ \|x\|_1 \to \min, \tag{12}$$

$$Z_{1,\infty}(\mu,\delta) \mapsto R_{1,\infty}(\mu,\delta) : \|b - Ax\|_\infty \leqslant \mu \cdot \|x\|_1 + \delta,\ \|x\|_1 \to \min, \tag{13}$$

$$Z_{\infty,1}(\mu,\delta) \mapsto R_{\infty,1}(\mu,\delta) : \|b - Ax\|_1 \leqslant \mu \cdot \|x\|_\infty + \delta,\ \|x\|_\infty \to \min, \tag{14}$$

$$Z_{\infty,\infty}(\mu,\delta) \mapsto R_{\infty,\infty}(\mu,\delta) : \|b - Ax\|_\infty \leqslant \mu \cdot \|x\|_\infty + \delta,\ \|x\|_\infty \to \min. \tag{15}$$

Задачи (12)-(13), несмотря на кажущуюся простоту формулировок, не имеют в общем случае очевидных методов и алгоритмов решения. Задачи (14)-(15) могут быть сведены к совокупности $2n$ задач линейного программирования (ЛП).

Рассмотрим задачу $Z_{\infty,1}(\mu,\delta)$:

Пусть известны матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0$.

Требуется найти $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$ такие, что $\|A - A_1\|_1 \leqslant \mu$, $\|b - b_1\|_1 \leqslant \delta$, $A_1 x_1 = b_1, \|x_1\|_\infty \to \min$, где $\mu,\delta \geqslant 0$- известные априорно, одновременно не равные нулю константы, символом $\|\cdot\|_1$ обозначена l_1 -норма (матричная, векторная), $\|\cdot\|_\infty$– l_∞-векторная норма.

В силу теорем 2 и 3 справедлива

Теорема 4. Задача $Z_{\infty,1}(\mu,\delta)$ имеет решение тогда и только тогда, когда разрешима задача математического программирования $R_{\infty,1}(\mu,\delta)$.

Доказательство. Если x^* — решение задачи $R_{\infty,1}(\mu,\delta)$, то решение задачи $Z_{\infty,1}(\mu,\delta)$ строится по формулам: $x_1 = x^*$, $b_1 = b - (b - Ax_1) \cdot \delta / \|b - Ax_1\|_1$, $A_1 = A + (b_1 - Ax_1)\, y^\top$, где $y \in \mathbb{R}^n$ – вектор, двойственный к вектору x_1 относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$, т.е., вектор, удовлетворяющий условиям $y^\top x_1 = \|y\|_1 \cdot \|x_1\|_\infty = 1$.

Рассмотрим $2n$ задач ЛП, порождаемых двухуровневым перебором двух параметров: индекса $j = 1,2,...,n$ (внешний уровень) и скалярного параметра $z = -1,1$ (внутренний уровень):

$$\begin{gathered} -p \leqslant b - Ax \leqslant p, \\ -\theta \cdot 1_n \leqslant x \leqslant \theta \cdot 1_n, \\ x_j = z \cdot \theta, \\ 1_m^\top p \leqslant \mu\theta + \delta, \\ p \geqslant 0, \quad \theta \geqslant 0, \quad \theta \to \min . \end{gathered} \tag{16}$$

Справедлива

Теорема 5. Если задача $R_{\infty,1}(\mu,\delta)$ имеет решение, то оно может быть получено как $x^* \in \operatorname{Argmin}\left\{\|x^1\|_\infty,...,\|x^k\|_\infty,...,\|x^K\|_\infty\right\}$, где $K \leqslant 2n$ – количество разрешимых задач ЛП вида (16), x^k – решение k-ой разрешимой задачи вида (16), $1_n \in \mathbb{R}^n$ и $1_m \in \mathbb{R}^m$ – векторы, составленные из единиц, $p \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим систему ограничений задачи (16). Несложно убедиться, что следствием совокупности условий $-p \leqslant b - Ax \leqslant p$, $p \geqslant 0$ является условие $1_m^\top p \geqslant \|b - Ax\|_1$. В то же время, следствием совокупности условий $z = -1,1$, $\theta \geqslant 0$, $-\theta \cdot 1_n \leqslant x \leqslant \theta \cdot 1_n$, $x_j = z \cdot \theta$ является условие $\|x\|_\infty = \theta$. С учетом вышесказанного, следствием условия $1_m^\top p \leqslant \mu\theta + \delta$ является условие $\|b - Ax\|_1 \leqslant \mu \cdot \|x\|_\infty + \delta$, а условие $\theta \to \min$ эквивалентно условию $\|x\|_\infty \to \min$.

2. Рассмотрим условие $\|x\|_\infty = \theta$, где $\theta \geqslant 0$. Очевидно, что указанное условие выполняется тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств $-\theta \cdot 1_n \leqslant x \leqslant \theta \cdot 1_n$ и существует индекс $j \in \{1,2,...,n\}$ такой, что $|x_j| = \theta$. Последнее условие, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда существует число $z \in \{-1,1\}$ такое, что $x_j = z \cdot \theta$.

3. Объединяя утверждения, полученные в пп. 1 и 2, приходим к выводу, что задача $R_{\infty,1}(\mu,\delta)$ эквивалентна совокупности $|\{1,2,...,n\} \times \{-1,1\}| = 2n$ задач ЛП вида (16), которые могут оказаться как разрешимыми, так и неразрешимыми. Следовательно, задача $R_{\infty,1}(\mu,\delta)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует хотя-бы одна разрешимая задача ЛП вида (16).

Рассуждая аналогичным образом, рассмотрим также задачу $Z_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$.

В силу теорем 2 и 3 справедлива

Теорема 6. Задача $Z_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$ имеет решение тогда и только тогда, когда разрешима задача математического программирования $R_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$.

Доказательство. Если x^* — решение задачи $R_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$, то решение задачи $Z_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$ строится по формулам: $x_1 = x^*$, $b_1 = b - (b - Ax_1) \cdot \delta / \|b - Ax_1\|_\infty$, $A_1 = A + (b_1 - Ax_1)\, y^\top$, где $y \in \mathbb{R}^n$ – вектор, двойственный к вектору x_1 относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$, т.е., вектор, удовлетворяющий условиям $y^\top x_1 = \|y\|_1 \cdot \|x_1\|_\infty = 1$.

Рассмотрим $2n$ задач ЛП, порождаемых двухуровневым перебором двух параметров: индекса $j = 1,2,...,n$ (внешний уровень) и скалярного параметра $z = -1,1$ (внутренний уровень):

$$\begin{gathered} -\pi \cdot 1_m \leqslant b - Ax \leqslant \pi \cdot 1_m, \\ -\theta \cdot 1_n \leqslant x \leqslant \theta \cdot 1_n, \\ x_j = z \cdot \theta, \\ \pi \leqslant \mu\theta + \delta, \\ \pi, \theta \geqslant 0, \quad \theta \to \min . \end{gathered} \tag{17}$$

Справедлива

Теорема 7. Если задача $R_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$ имеет решение, то оно может быть получено как $x^* \in Argmin\left\{\left\|x^1\right\|_\infty,...,\left\|x^k\right\|_\infty,...,\left\|x^K\right\|_\infty\right\}$, где $K \leqslant 2n$ – количество разрешимых задач ЛП вида (17), x^k – решение k-ой разрешимой задачи вида (17), $1_n \in \mathbb{R}^n$ и $1_m \in \mathbb{R}^m$ – векторы, составленные из единиц, $\pi, \theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим систему ограничений задачи (17). Несложно убедиться, что следствием совокупности условий $-\pi \cdot 1_m \leqslant b - Ax \leqslant \pi \cdot 1_m$, $\pi \geqslant 0$ является условие $\pi \geqslant \|b - Ax\|_\infty$. В то же время, следствием совокупности условий $z = -1{,}1$, $\theta \geqslant 0$, $-\theta \cdot 1_n \leqslant x \leqslant \theta \cdot 1_n$, $x_j = z \cdot \theta$ является условие $\|x\|_\infty = \theta$. С учетом вышесказанного, следствием условия $\pi \leqslant \mu\theta + \delta$ является условие $\|b - Ax\|_\infty \leqslant \mu \cdot \|x\|_\infty + \delta$, а условие $\theta \to \min$ эквивалентно условию $\|x\|_\infty \to \min$.

2. Рассмотрим условие $\|x\|_\infty = \theta$, где $\theta \geqslant 0$. Очевидно, что указанное условие выполняется тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств $-\theta \cdot 1_n \leqslant x \leqslant \theta \cdot 1_n$ и существует индекс $j \in \{1,2,...,n\}$ такой, что $|x_j| = \theta$. Последнее условие, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда существует число $z \in \{-1,1\}$ такое, что $x_j = z \cdot \theta$.

3. Объединяя утверждения, полученные в пп. 1 и 2, приходим к выводу, что задача $R_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$ эквивалентна совокупности $|\{1,2,...,n\} \times \{-1,1\}| = 2n$ задач ЛП вида (17), которые могут оказаться как разрешимыми, так и неразрешимыми. Следовательно, задача $R_{\infty,\infty}(\mu,\delta)$ имеет решение тогда и только тогда, когда существует хотя-бы одна разрешимая задача ЛП вида (17).

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В данном параграфе представлены результаты численного решения модельных задач вида (14) и (15), полученые с использованием среды Matlab. Соответствующие вспомогательные задачи ЛП были решены симплекс-методом (с помощью решателя linprog с опцией 'simplex'). Оптимальные векторы, являющиеся решениеми задач (14) и (15), можно было бы обозначить как x_{MRLS} – решения с помощью модифицированного РМНК. Однако для многочисленных обобщений МНК на нормы, отличные от евклидовой, традиционным является обозначение вида x_{LN} – решение по методу наименьшей нормы. Поэтому в представленных ниже примерах использованы обозначения $x_{RLN(1,\infty)}$ — для решения задачи (14) (регуляризованное решение с использованием норм ℓ_1 и ℓ_∞), и $x_{RLN(\infty,\infty)}$ — для решения задачи (15) (регуляризованное решение с использованием нормы ℓ_∞). Символ $||\cdot||_E$ использован для обозначения евклидовой (ℓ_2) матричной нормы (называемой также нормой Фробениуса, Шура или Гильберта-Шмидта [21]).

Пример 1

Рассмотрим задачу (14) со следующими исходными данными:

«Точная» СЛАУ с матрицей полного столбцевого ранга и её единственное решение:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \; b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -4 \\ 7 \\ -9 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \; x_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Погрешность:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mu = ||\Delta A||_{\infty,1} = 0.05, \ \delta = ||\Delta b||_1 = 1.$$

Решение задачи (14):

$$x_{RLN(1,\infty)} = \begin{bmatrix} -2.977667 \\ 1.029777 \\ -4.014888 \\ 2.044665 \\ 0.992556 \end{bmatrix}, \ \|x_{RLN(1,\infty)} - x_0\|_\infty = 0.044665, \ \|x_{RLN(1,\infty)} - x_0\|_2 = 0.060477.$$

Решение по методу наименьших квадратов:

$$x_{LS} = \begin{bmatrix} -2.886469 \\ 0.942589 \\ -3.911138 \\ 2.116785 \\ 1.078234 \end{bmatrix}, \ \|x_{LS} - x_0\|_\infty = 0.116785, \ \|x_{LS} - x_0\|_2 = 0.209383.$$

Решение по РМНК с параметрами $\widetilde{\mu} = ||\Delta A||_E = 0.05$, $\widetilde{\delta} = ||\Delta b||_2 = 1$:

$$x_{RLS} = \begin{bmatrix} -2.473459 \\ 0.511841 \\ -3.816171 \\ 1.748294 \\ 0.632340 \end{bmatrix}, \ \|x_{RLS} - x_0\|_\infty = 0.526541, \ \|x_{RLS} - x_0\|_2 = 0.864793.$$

Представленные результаты свидетельствуют о том, что решение $x_{RLN(1,\infty)}$ заданной приближённой СЛАУ $(A + \Delta A)x = b + \Delta b$, оказывается ближе (по евклидовой и ℓ_∞-норме) к решению «точной» СЛАУ, чем решения, полученные с помощью МНК и РМНК.

Пример 2

Для $i = 0{,}1, \ldots ,25$ рассмотрим серию задач вида (14) со следующими исходными данными: «точная» СЛАУ — та же, что и в примере 1, $\Delta A_i = e_i \Delta A$, $\Delta b_i = e_i \Delta b$, $\mu_i = e_i \mu$, $\delta_i = e_i \delta$, $e_i = 10^{-1-0.5 \cdot i}$. Каждую из указанных задач подвергнем исследованию, описанному в примере 1. Результаты выполненных подобным образом вычислительных экспериментов представлены ниже в виде зависимостей погрешностей решения $\varepsilon_{RLN(1,\infty)_i} = \|x_{RLN(1,\infty)_i} - x_0\|$, $\varepsilon_{RLS_i} = \|x_{RLS_i} - x_0\|$ и $\varepsilon_{LS_i} = \|x_{LS_i} - x_0\|$, от параметра погрешности e_i, оцениваемых в евклидовой норме (рис. 1) и в ℓ_∞-норме (рис. 2).

Представленные на рис. 1 и рис. 2 графики свидетельствуют о том, что, во-первых, для всех $i = 0{,}1, \ldots , 25$ решение $x_{RLN(1,\infty)_i}$ заданной приближённой СЛАУ $(A + \Delta A_i)x = b + \Delta b_i$, оказывается ближе (по евклидовой и ℓ_∞-норме) к решению «точной» СЛАУ, чем решения, полученные с помощью МНК и РМНК. Во-вторых, все три рассматриваемых метода решения приближённой СЛАУ являются устойчивыми, так как для всех $e_{k+1} < e_k$, $0 \leqslant k \leqslant 24$ как в евклидовой, так и в ℓ_∞-норме выполняются условия $\varepsilon_{RLS_{k+1}} < \varepsilon_{RLS_k}$, $\varepsilon_{LS_{k+1}} < \varepsilon_{LS_k}$, $\varepsilon_{RLN(1,\infty)_{k+1}} < \varepsilon_{RLN(1,\infty)_k}$.

Пример 3

Рассмотрим задачу (15) со следующими исходными данными:

«Точная» СЛАУ с матрицей полного столбцевого ранга и её единственное решение:

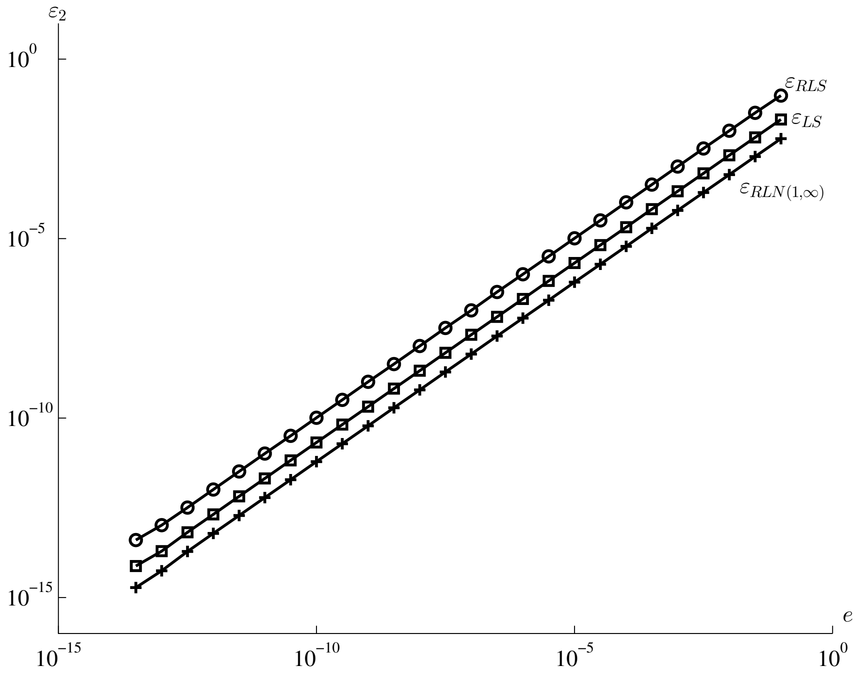

Рис. 1. *Зависимость евклидовой нормы погрешности решения задачи* (14) *от погрешности системы.*

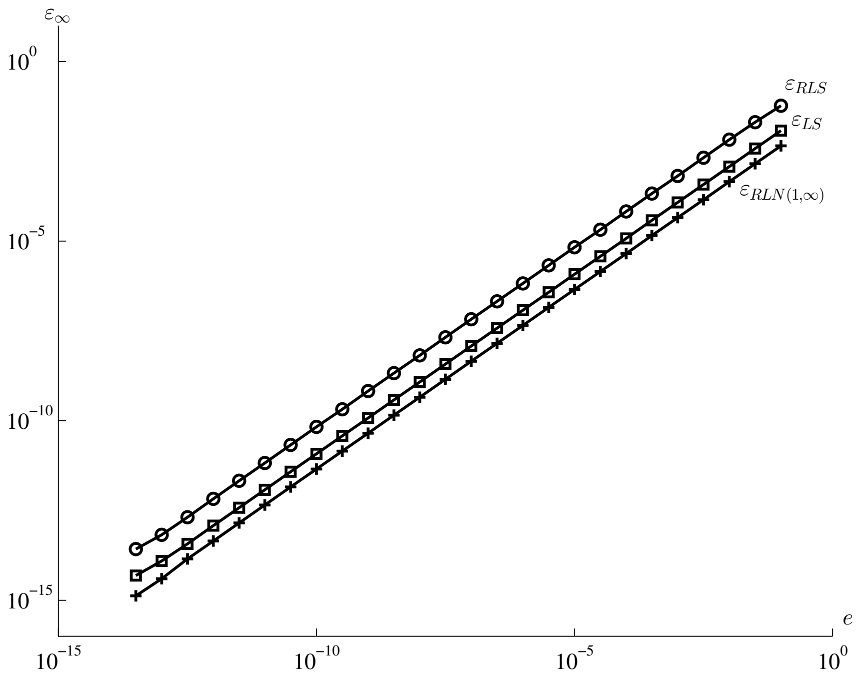

Рис. 2. *Зависимость l_∞-нормы погрешности решения задачи* (14) *от погрешности системы.*

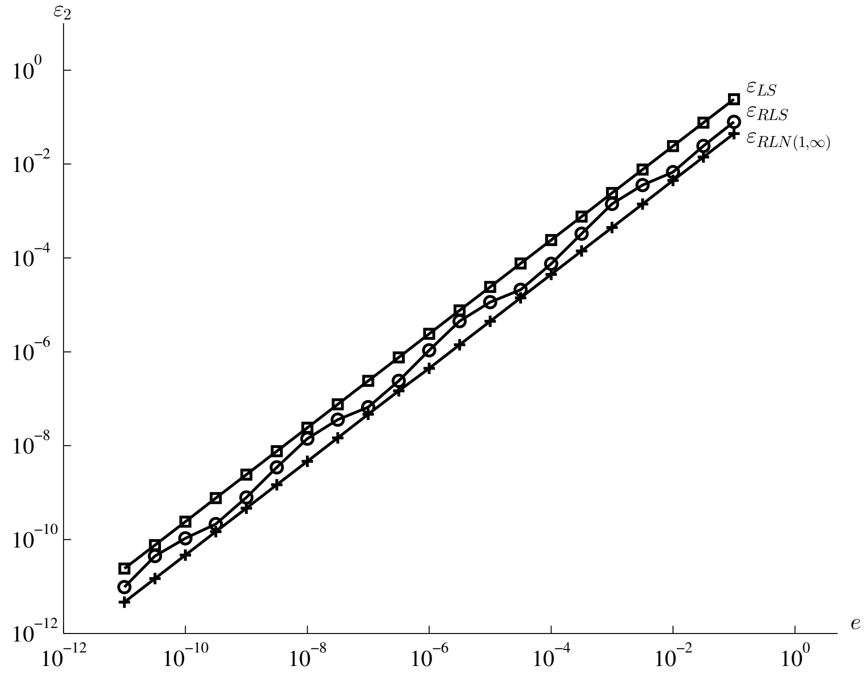

Рис. 3. *Зависимость евклидовой нормы погрешности решения задачи* (15) *от погрешности системы.*

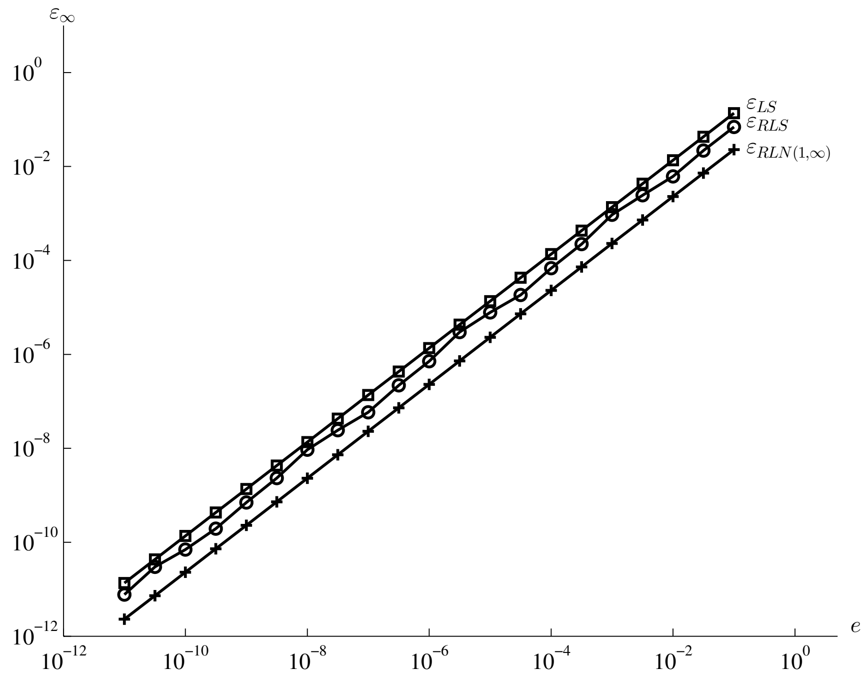

Рис. 4. *Зависимость* l_∞*-нормы погрешности решения задачи* (15) *от погрешности системы.*

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ b_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Погрешность:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 0.01,\ \Delta b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mu = ||\Delta A||_{\infty,\infty} = 0.5, \delta = ||\Delta b||_\infty = 1.$$

Решение задачи (15):

$$x_{RLN(\infty,\infty)} = \begin{bmatrix} 1.776249 \\ -4.799341 \\ 2.776249 \\ 4.799341 \\ 2.930853 \end{bmatrix},\ \|x_{RLN(\infty,\infty)} - x_0\|_\infty = 0.223751,\ \|x_{RLN(\infty,\infty)} - x_0\|_2 = 0.430625.$$

Решение по методу наименьших квадратов:

$$x_{LS} = \begin{bmatrix} 2.706729 \\ -6.373826 \\ 4.024537 \\ 6.018242 \\ 4.236812 \end{bmatrix},\ \|x_{LS} - x_0\|_\infty = 1.373826,\ \|x_{LS} - x_0\|_2 = 2.450114.$$

Решение по РМНК с параметрами $\widetilde{\mu} = ||\Delta A||_E = 0.054772$, $\widetilde{\delta} = ||\Delta b|| = 2.449490$.

$$x_{RLS} = \begin{bmatrix} 1.681258 \\ -4.977576 \\ 2.913912 \\ 4.403487 \\ 3.081869 \end{bmatrix},\ \|x_{RLS} - x_0\|_\infty = 0.596513,\ \|x_{RLS} - x_0\|_2 = 0.687052.$$

Пример 4

Для $i = 0{,}1,\ldots,20$ рассмотрим серию задач вида (15) со следующими исходными данными: «точная» СЛАУ — та же, что и в примере 3, $\Delta A_i = e_i\Delta A$, $\Delta b_i = e_i\Delta b$, $\mu_i = e_i\mu$, $\delta_i = e_i\delta$, $e_i = 10^{-1-0.5\cdot i}$. Каждую из указанных задач подвергнем исследованию, описанному в примере 3. Результаты выполненных подобным образом вычислительных экспериментов представлены ниже в виде зависимостей погрешностей решения $\varepsilon_{RLN(\infty,\infty)_i} = \|x_{RLN(\infty,\infty)_i} - x_0\|$, $\varepsilon_{RLS_i} = \|x_{RLS_i} - x_0\|$ и $\varepsilon_{LS_i} = \|x_{LS_i} - x_0\|$, от параметра погрешности e_i, оцениваемых в евклидовой норме (рис. 3) и в ℓ_∞-норме (рис. 4).

Представленные на рис. 3 и рис. 4 графики демонстрируют поведение погрешностей, аналогичное наблюдаемому в примере 2 при исследовании задачи (14).

Таким образом, из представленных численных примеров видно, что существуют задачи, для которых применение рассматриваемых методов, использующих неевклидовы нормы, позволяет получить решение приближённой системы, более близкое к решению точной системы, чем решения, найденные с использованием «классических» методов, основанных на использовании евклидовой нормы. В частности — это случаи погрешности специального вида: для задачи (14) погрешность накладывается только на отдельные элементы исходной системы (примеры 1, 2); для задачи (15) одинаковая по модулю погрешность накладывается на все элементы исходной системы (примеры 3, 4).

Кроме того, при подготовке указанных численных примеров экспериментально была проверена устойчивость рассматриваемых методов: как можно видеть из графиков, представленных в примерах 2 и 4, при уменьшении уровня погрешности в исходных данных найденное с помощью рассматриваемых методов решение приближенной системы стремится к точному решению точной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерохин, В. И. Приближенные линейные модели в задачах позиционирования с использованием глобальных спутниковых навигационных систем / В. И. Ерохин, В. В. Волков // Системы управления и информационные технологии. — 2010. — № 4.1(42). — С. 145–149.

2. Ерохин, В. И. Методы и модели восстановления линейных зависимостей по неточной информации / В. И. Ерохин, В. В. Волков // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). — 2011. — № 10. — С. 52–57.

3. Ерохин, В. И. О применении отрицательного параметра регуляризации в регуляризованном методе наименьших квадратов А. Н. Тихонова / В. И. Ерохин, В. В. Волков, А. А. Будаев // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). — 2014. — № 24(50). — С. 86–92.

4. Erokhin, V. I. Recovering images, registered by device with inexact point-spread function, using tikhonov's regularized least squares method / V. I. Erokhin, V. V. Volkov // Intern. Journal of Artificial Intelligence. — 2015. — V. 13, № 1. — 12 p.

5. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

6. Тихонов, А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений / А. Н. Тихонов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1980. — Т. 20, № 6. — С. 1373–1383.

7. Тихонов, А. Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 254, № 3. — С. 549–554.

8. Тихонов, А. Н. О методах автоматизации обработки наблюдений / А. Н. Тихонов // Вестн. АН СССР. — 1983. — № 1. — С. 14–25.

9. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1986. — 288 с.

10. Волков, В. В. О тихоновских решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений при конечных возмущениях их матриц / В. В. Волков, В. И. Ерохин // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2010. — Т. 50, № 4. — С. 618–635.

11. Ерохин, В. И. О регуляризованном методе наименьших квадратов А. Н. Тихонова / В. И. Ерохин, В. В. Волков // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2017. — Вып. 1. — С. 4–16.

12. Обобщения регуляризованного метода наименьших квадратов А. Н. Тихонова на векторные нормы, отличные от евклидовой / В. В. Волков, В. И. Ерохин, В. В. Какаев, А. Ю. Онуфрей // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2017. — Т. 57, № 9. — С. 33–44.

13. Ерохин, В. И. Обобщение регуляризованного метода наименьших квадратов А.Н. Тихонова на l_1-норму / В. И. Ерохин, А. В. Рассадин, А. С. Гоголевский // VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Москва, 17–22 октября 2016 г.: Труды. Т. II. — Москва, 2016. — С. 36–37.

14. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. — М. : Наука, 1978. — 206 с.

15. Танана, В. П. Методы решения операторных уравнений / В. П. Танана. — М. : Наука, 1981. — 156 с.

16. Ерохин, В. И. Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей / В. И. Ерохин // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2002. — Т. 9, № 2. — С. 41–77.

17. Ерохин, В. И. Лемма А. Н. Тихонова и ее обобщения / В. И. Ерохин // Тихонов и современная математика: Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. Междунар. конф. — Москва, 2006. — С. 52–53.

18. Горелик, В. А. Минимаксная матричная коррекция несовместимых систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов / В. А. Горелик, В. И. Ерохин, Р. В. Печенкин // Изв. РАН. ТИСУ. — 2006. — № 5. — С. 52–62.

19. Горелик, В. А. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений / В. А. Горелик, В. И. Ерохин, Р. В. Печенкин. — М. : ВЦ РАН, 2006. — 153 с.

20. Икрамов, Х. Д. Задачник по линейной алгебре / Х. Д. Икрамов. — М. : Наука, 1975. — 320 с.

21. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир, 1989. — 655 с.

REFERENCES

1. Erokhin V.I., Volkov V.V. Approximate linear models in problems of positioning using global satellite navigation systems. [Erokhin V.I., Volkov V.V. Priblizhennye linejnye modeli v zadachah pozicionirovanija s ispol'zovaniem global'nyh sputnikovyh navigacionnyh sistem]. *Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii — Automation and Remote Control*, 2010, no. 4.1(42), pp. 145–149.

2. Erokhin V.I., Volkov V.V. Methods and models of recovering linear dependencies from inaccurate information. [Erokhin V.I., Volkov V.V. Metody i modeli vosstanovlenija linejnyh zavisimostej po netochnoj informacii]. *Izvestija Sankt Peterburgskogo Gosudarstvennogo Technologicheskogo Instituta (Technicheskogo Universiteta) —* , 2011, no. 10, pp. 52–57.

3. Erokhin V.I., Volkov V.V., Budaev A.A. Using negative regularization parameter in Tikhonov's regularized least squares method. [Erokhin V.I., Volkov V.V., Budaev A.A. O primenenii otricatelnogo parametra regulyarizacii v regulyarizovannom metode naimenshih kvadratov A.N. Tihonova]. *Izvestija Sankt Peterburgskogo Gosudarstvennogo Technologicheskogo Instituta (Technicheskogo Universiteta) — News of the St. Petersburg state technological Institute (technical University)*, 2014, no. 24(50), pp. 86–92.

4. Erokhin V.I., Volkov V.V. Recovering images, registered by device with inexact point-spread function, using tikhonov's regularized least squares method. International Journal of Artificial Intelligence, 2015, vol. 13, no. 1, 12 p.

5. Golub Gene H., Van Loan Charles F. Matrix computations. [Golub Dzh., Van Loun Ch. Matrichnye vychisleniya]. Moscow, 1999. 548 p.

6. Tikhonov A.N. About approximate systems of linear algebraic equations. [Tikhonov A.N. O priblizhennyh sistemah linejnyh algebraicheskih uravnenij]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1980, vol. 20, no. 6, pp. 1373–1383.

7. Tikhonov A.N. About normal solutions of approximate systems of linear algebraic equations. [Tikhonov A.N. O normalnyh resheniyah priblizhennyh sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij]. *Doklady Akademii Nauk SSSR — Doklady of Academy of sciences of USSR*, 1980, vol. 254, no. 3, pp. 549–554.

8. Tikhonov A.N. About methods of automation of processing observations. [Tikhonov A.N. O metodah avtomatizacii obrabotki nablyudenij]. *Vestnik Akademii Nauk SSSR — Vestnik of*

Academy of sciences of USSR, 1983, no. 1, pp. 14–25.

9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Methods of solving incorrect problems. [Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Metody resheniya nekorrektnyh zadach]. Moscow, 1986, 288 p. 10. Volkov V.V., Erokhin V.I. About Tikhonov solutions of approximately given systems of linear algebraic equations under finite perturbations of their matrices. [Volkov V.V., Erokhin V.I. O tihonovskih resheniyah priblizhennyh sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij pri konechnyh vozmushcheniyah ih matric]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 618–635.

11. Erokhin V.I., Volkov V.V. About A. N. Tikhonov's regularized least squares method. [Erokhin V.I., Volkov V.V. O reguljarizovannom metode naimen'shih kvadratov A.N. Tihonova]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya — Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes*, 2017, iss. 1, pp. 4–16.

12. Volkov V.V., Erokhin V.I., Kakaev V.V., Onufrej A.Ju. Generalization of the A. N. Tikhonov's regularized least-squares method to vector norms different from Euclidean. [Volkov V.V., Erokhin V.I., Kakaev V.V., Onufrej A.Ju. Obobshhenija reguljarizovannogo metoda naimen'shih kvadratov A.N. Tihonova na vektornye normy, otlichnye ot evklidovoj]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 9, pp. 33–44.

13. Erokhin V.I., Rassadin A.V., Gogolevskij A.S. Generalization of the F. N. Tikhonov's regularized least-squares method on the l_1-norm. [Erokhin V.I., Rassadin A.V., Gogolevskij A.S. Obobshhenie reguljarizovannogo metoda naimen'shih kvadratov A.N. Tihonova na l_1-normu]. VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Moscow, 2016, pp. 36–37.

14. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of linear ill-posed problems and its applications. [Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Teoriya linejnyh nekorrektnyh zadach i ee prilozheniya]. Moscow, 1978, 206 p.

15. Tanana V.P. Methods for solving operator equations. [Tanana V.P. Metody resheniya operatornyh uravnenij]. Moscow, 1981, 156 p.

16. Erokhin V.I. Optimal matrix correction and regularization of incompatible linear models. [Erokhin V.I. Optimal'naja matrichnaja korrekcija i reguljarizacija nesovmestnyh linejnyh modelej]. *Diskretnyyj analiz i issledovanie operaciyj — Discrete Analysis and Operations Research*, 2002, vol. 9, no. 2, pp. 41–77.

17. Erokhin V.I. A.N. Tikhonov's lemma and its generalizations. [Erokhin V.I. Lemma A.N. Tihonova i ee obobshhenija]. Tikhonov and modern mathematics: Inverse and incorrectly posed problems]: Abstracts of the International Conference. Moscow, 2016, pp. 52–53.

18. Gorelik V.A., Erokhin V.I., Pechenkin R.V. Minimax matrix correction of incompatible systems of linear algebraic equations with block matrices of coefficients. [Gorelik V.A., Erokhin V.I., Pechenkin R.V. Minimaksnaja matrichnaja korrekcija nesovmestimyh sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij s blochnymi matricami kojefficientov]. *Izv. RAN. TISU — Izv. RAN. TISU*, 2006, no. 5, pp. 52–62.

19. Gorelik V.A., Erokhin V.I., Pechenkin R.B. Numerical methods for correction of improper problems of linear programming and structural systems of equations. [Gorelik V.A., Erokhin V.I., Pechenkin R.B. Chislennye metody korrekcii nesobstvennyh zadach linejnogo programmirovanija i strukturnyh sistem uravnenij]. Moscow: Computing Center of the Russian Academy of Sciences, 2006, 153 p.

20. Ikramov H.D. Book of problems on linear algebra. [Ikramov H.D. Zadachnik po linejnoj algebre]. Moscow: Nauka, 1975, 320 p.

21. Horn R.A., Johnson Ch.R. Matrix analysis. [Xorn R., Dzhonson Ch. Matrichnyyj analiz]. Moscow: Mir, 1989, 655 p.

Ерохин Владимир Иванович, старший научный сотрудник Военно-космической академии имени А. Ф. Можайского, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: erohin_v_i@mail.ru

Erokhin Vladimir Inanovich, Professor, Doctor of physical and mathematical sciences, Senior researcher of Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russian Federation
E-mail: erohin_v_i@mail.ru

Волков Владимир Викторович, доцент кафедры прикладной математики, информатки, физики и методки их преподавания Борисоглебского филиала Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, Борисоглебск, Воронежская область, Россия
E-mail: volkov@bsk.vsu.ru

Volkov Vladimir Viktirovich, PhD of physical and mathematical sciences, Associate Professor of Borisoglebsk branch of Voronezh State University, Borisoglebsk, Russian Federation
E-mail: volkov@bsk.vsu.ru

Хвостов Михаил Николаевич, доцент кафедры прикладной математики, информатики, физики и методики их преподавания Борисоглебского филиала Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, Борисоглебск, Воронежская область, Россия
E-mail: khvostov@bsk.vsu.ru

Khvostov Mikhail Nikolaevich, PhD of physical and mathematical sciences, Associate Professor of Borisoglebsk branch of Voronezh State University, Borisoglebsk, Russian Federation
E-mail: khvostov@bsk.vsu.ru