

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СВИФТА-ХОЕНБЕРГА И ТРАССЫ СПУСКА К ПРИТЯГИВАЮЩИМ ТОЧКАМ

И. А. Гнеушев, И. В. Колесникова, А. С. Мызников

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.01.2017 г.

Аннотация. Рассмотрено стационарное СХ-уравнение (уравнение Свифта-Хоенберга) при двойном краевом условии Дирихле. Изложена методика приближенного вычисления бифурцирующих решений при малых и конечных значениях закритического приращения параметра. Представленные в статье вычисления проведены на основе модифицированной процедуры Ляпунова-Шмидта, использующей ритцевскую аппроксимацию функционала энергии по заранее заданному набору собственных функций (мод) главной линейной части уравнения с последующей редукцией Пуанкаре к функции двух ключевых переменных. В случае локального анализа вычислена главная часть ключевой функции и вычислены приближенные аналитические представления ветвей бифурцирующих решений. Приведены графические иллюстрации ветвей решений и трасс спуска из произвольной начальной точки в окрестность устойчивой точки (точки минимума функционала энергии).

Ключевые слова: уравнение Свифта-Хоенберга, краевые условия Дирихле, функционал энергии, моды бифуркации, вариационный метод Ляпунова-Шмидта, ключевая функция, аппроксимация Галеркина-Ритца, редукция Пуанкаре, трассы спуска.

BRANCHING OF SOLUTIONS OF THE SWIFT-HOHENBERG EQUATION AND DESCENT PATHS TO ATTRACTING POINTS

I. A. Gneushev, I. V. Kolesnikova, A. S. Myznikov

Abstract. The stationary CX-equation (Swift-Hohenberg equation) is considered under the double Dirichlet condition. A technique for the approximate calculation of bifurcation solutions for small and finite values of the supercritical parameter increment is described. The calculations presented in this paper are based on a modified Lyapunov-Schmidt procedure using the Ritz approximation of the energy functional using a predetermined set of eigenfunctions (modes) of the main linear part of the equation, followed by Poincare reduction to the function of two key variables. In the case of local analysis, the main part of the key function is computed and the approximate analytic representations of the branches of bifurcating solutions are calculated. The graphic illustrations of the decision branches and descent routes from an arbitrary starting point to a stable point (the minimum of the energy functional) are given.

Keywords: Swift-Hohenberg equation, boundary conditions Dirichlet, energy functional, bifurcation modes, variational method Lyapunov-Schmidt, key function, Galerkin-Ritz approximation, reduction of Poincare, slopes.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что задача исследования посткритических структурных перестроек весьма актуальна и требует привлечения разнообразных методов современного математического анализа

и новых вычислительных средств. В этой же связи следует отметить особую востребованность в развитии новых методов функционального анализа для нелинейных начально-краевых задач, соответствующих новым запросам практики математического моделирования и современным достижениям вычислительных технологий. Особый интерес представляет применение таких технологий к задачам бифуркационного анализа, связанного и изучением влияния изменений параметров внешнего воздействия (температуры, электромагнитного поля, механического сжатия и пр.) на сложную физическую систему (раствор, смесь, сплав и т.п.). В некоторых случаях такие изменения приводят к потере устойчивости исходной фазы и, как следствие, к ее переходу в новое состояние с новыми структурными свойствами. Структурную перестройку физической среды часто объясняют на основе нелинейных диффузионных уравнений «реакция-диффузия» (с кубической нелинейностью), Свифта-Хойенберга [1]–[2], Кана-Хилларда [3]–[6] и др.

Один из базовых принципов исследования бифуркаций решений начально-краевых задач для нелинейных параболических и более общих уравнений основан на том, что уравнение вида

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v) \quad (0 < t \leq t_0), \quad v(0) = v_0,$$

где $f(t, x)$ при каждом $t \in [0, t_0]$ — нелинейный оператор, при условии, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, сводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, v(s))ds$$

(метод Дюамеля).

В настоящей статье рассмотрен прямой и более простой подход, основанный на том, что рассмотренные в статье бесконечномерные динамические системы являются вариационными. Это обстоятельство дает возможность использования прямого подхода к построению дискретных аналогов траекторий спуска динамической системы в точки минимума функционала энергии. Такой подход требует предварительного изучения бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения (в порождающей точке минимума). В качестве основного модельного уравнения, используемого в статье, рассмотрено уравнение Свифта-Хойенберга

$$\dot{w} + \Delta^2(w) + \lambda_2 \Delta(w) + \lambda_1 w + w^3 = 0, \\ w = w(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega := [0, 1] \times [0, 1].$$

1. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К УРАВНЕНИЮ СВИФТА–ХОЕНБЕРГА

Близким к широко известному модельному уравнению Кана-Хилларда [3]–[6] является динамическое уравнение Свифта-Хойенберга [1]–[2] с кубической нелинейностью

$$\dot{w} + \Delta^2(w) + \lambda_2 \Delta(w) + \lambda_1 w + w^3 = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 := [0, 1] \times [0, 1], \quad (1)$$

при двойном граничном условии Дирихле

$$w(x, t) = \Delta(w)(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Данная начально-краевая задача порождает градиентную динамическую систему. Настоящий раздел посвящен описанию бифурцирующих ветвей устойчивых (притягивающих) стационарных решений этой динамической системы. Наличие второго параметра в этой задаче приводит к эффекту 3-модового вырождения в точке минимума функционала энергии.

Обратимся к функциональным пространствам $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_4$, где $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_k$ — замыкание по норме $\|w\|_k$ ($k = 0, 2, 4$) множества тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{p+q \geq 2}^m \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad p, q \geq 1,$$

$e_{p,q}(x_1, x_2)$ — собственная функция оператора Δ (при двойном условии Дирихле на границе:

$$e_{p,q}(x_1, x_2) = 2 \sin(p\pi x_1) \sin(q\pi x_2), \quad p, q \neq 0.$$

Собственная функция $e_{p,q}$ отвечает собственному значению $\lambda_{p,q} = -\pi^2(p^2 + q^2)$, совокупность функций $\{e_{p,q}\}$ является ортонормированной системой векторов в $L_2(\Omega)$. Для тригонометрического полинома w норма $\|w\|_k$ определена следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \|w\|_2^2 &:= \iint_{\Omega} w \Delta^2(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Delta(w))^2 dx_1 dx_2, \\ \|w\|_4^2 &:= \iint_{\Omega} w \Delta^4(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Delta^2(w))^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Для $k = 2, 4$ линейный оператор $\mathcal{A} := -\Delta : \mathcal{H}_k \mapsto \mathcal{H}_{k-2}$ ($\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$) является изоморфизмом. При этом оператор $\mathcal{A}$ положительный и диагонализированный:

$$\mathcal{A} : \sum_{p,q} \xi_{p,q} e_{p,q} \mapsto \sum_{p,q} |\lambda_{p,q}| \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad p, q \geq 0, \quad p + q > 1.$$

Уравнение Свифта-Хуэна допускает представление в «операторном» виде

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -\text{grad } V(w), \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_4, \\ V(w) &:= \iint_{\Omega} \left(\frac{|\Delta w|^2 - \lambda_2 |\nabla w|^2 + \lambda_1 w^2}{2} + \frac{w^4}{4} \right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, для исследования траекторий динамической системы Свифта-Хуэна можно привлекать вариационный подход и, в частности, использовать метод прямого (градиентного) спуска (см. [7]–[10]).

2. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ИЗ НУЛЕВОЙ ТОЧКИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПО ПЕРВЫМ ТРЕМ МОДАМ

Обратимся к стационарному СХ-уравнению

$$\Delta^2(w) + \lambda_2 \Delta(w) + \lambda_1 w + w^3 = 0, \quad (4)$$

при граничном условии (2), где $w = w(x)$, $x = x(x_1, x_2) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

При исследовании бифуркаций экстремалей будем использовать ритцевскую аппроксимацию функционала V (см. [9], [10]):

$$V_R(\widehat{\xi}) := V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n), \quad \widehat{\xi} := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Здесь $\{e_k\}$ — указанные выше собственные функции, пронумерованные в порядке возрастания собственных значений с учетом «лексико-графического правила». Анализ бифурцирующих решений можно осуществить перейдя к конечномерной задаче $\text{grad } W(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, где

$$W(\xi) := \inf_{\xi_4, \dots, \xi_n} V_R(\widehat{\xi}) \quad (5)$$

— приближенная нелокальная ключевая функция Ляпунова-Шмидта.

Рассмотрим случай $\lambda_1 = 7\pi^2$ и $\lambda_2 = 10\pi^4$, в котором имеет место трехмерное вырождение нулевой экстремали: уравнение (4) допускает вырождение по трем модам:

$$e_1 = 2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad e_2 = 2 \sin(2\pi x) \sin(\pi y), \quad e_3 = 2 \sin(\pi x) \sin(2\pi y).$$

Рассмотрим сначала локальную редукцию Ляпунова-Шмидта для функционала энергии V к модам e_1, e_2, e_3 (аппроксимацию Ритца):

$$W_R(\xi) := V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3). \quad (6)$$

Теорема 1. *Главная часть ключевой функции W имеет следующий вид:*

$$W_R(\xi) = \frac{1}{2} (\delta_1 \xi_1^2 + \delta_2 \xi_2^2 + \delta_3 \xi_3^2) + \frac{9}{16} \xi_1^4 + \frac{9}{4} \xi_1^2 \xi_2^2 + \frac{9}{4} \xi_1^2 \xi_3^2 + \frac{9}{16} \xi_2^4 + \frac{3}{2} \xi_2^2 \xi_3^2 + \frac{9}{16} \xi_3^4; \quad (7)$$

где

$$\delta_1 = \lambda_1 - 2\pi^2 \lambda_2 + 4\pi^4, \quad \delta_2 = \delta_3 = \lambda_1 - 5\pi^2 \lambda_2 + 25\pi^4. \quad (8)$$

Доказательство. Известно, в силу теорем о конечной определенности особенности 3-мерной сборки (см. [7]), что главная часть ключевой функции в рассмотренной ситуации определяется ритцевской аппроксимацией функционала энергии по трем рассмотренным модам. Непосредственные вычисления в системе *Maple* дают следующий результат

$$W_R(\xi) = \frac{1}{2} (\pi^4 (4\xi_1^2 + 25\xi_2^2 + 25\xi_3^2) - \pi^2 \lambda_2 (2\xi_1^2 + 5\xi_2^2 + 5\xi_3^2) + \lambda_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)) + \frac{9}{16} \xi_1^4 + \frac{9}{4} \xi_1^2 \xi_2^2 + \frac{9}{4} \xi_1^2 \xi_3^2 + \frac{9}{16} \xi_2^4 + \frac{3}{2} \xi_2^2 \xi_3^2 + \frac{9}{16} \xi_3^4.$$

Из него следуют соотношения (7)-(8).

Для отыскания ветви экстремалей рассмотрим уравнение $\text{grad } W(\xi) = 0$ или, что то же самое, систему уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_1 \xi_1 + \frac{9}{4} \xi_1^3 + \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2^2 + \frac{9}{2} \xi_1 \xi_3^2 &= \delta_2 \xi_2 + \frac{9}{2} \xi_1^2 \xi_2 + \frac{9}{4} \xi_2^3 + 3 \xi_2 \xi_3^2 = \\ &= \delta_3 \xi_3 + \frac{9}{2} \xi_1^2 \xi_3 + 3 \xi_2^2 \xi_3 + \frac{9}{4} \xi_3^3 = 0. \end{aligned}$$

Этой системе удовлетворяют перечисленные ниже четыре группы решений.

- 1) Нулевое решение $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ (критическая точка M_0).
- 2) Одномодовые решения $\xi_j = \xi_k = 0, \xi_l \neq 0$. Им соответствуют следующие критические точки:

$M_{2,3} = (\pm \frac{2}{3} \sqrt{-\delta_1}, 0, 0)$, ($\delta_1 < 0$) (точки, для которых $\xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_1 \neq 0$);

$M_{1,3} = (0, \pm \frac{2}{3} \sqrt{-\delta_2}, 0)$ (точки, для которых $\delta_2 < 0, \xi_1 = \xi_3 = 0, \xi_2 \neq 0$);

$M_{1,2} = (0, 0, \pm \frac{2}{3} \sqrt{-\delta_3})$ (точки, для которых $\delta_3 < 0, \xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 \neq 0$);

- 3) Двухмодовые решения. К ним относятся критические точки:

$M_1 = (0, \pm \frac{2}{21} \sqrt{(-63\delta_2 + 84\delta_3)}, \pm \frac{2}{21} \sqrt{(84\delta_2 - 63\delta_3)})$ и другие.

- 4) Трехмодовые решения: $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0, \xi_3 \neq 0$. К ним относятся точки $M = (\pm \frac{2}{51} \sqrt{a_1}, \pm \frac{2}{51} \sqrt{a_2}, \pm \frac{2}{51} \sqrt{a_3})$; $a_1 = 119\delta_1 - 102\delta_2 - 102\delta_3 > 0, a_2 = -102\delta_1 + 459\delta_2 - 408\delta_3 > 0, a_3 = -102\delta_1 - 408\delta_2 + 459\delta_3 > 0$.

Заметим, что матрица Гессе для уравнения $W_R(\xi)$ представима в виде

$$\begin{pmatrix} \delta_1 + \frac{9}{2}(\frac{3}{2}\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) & 9\xi_1\xi_2 & 9\xi_1\xi_3 \\ 9\xi_1\xi_2 & \delta_2 + \frac{9}{2}(\xi_1^2 + \frac{3}{2}\xi_2^2 + \frac{2}{3}\xi_3^2) & 6\xi_2\xi_3 \\ 9\xi_1\xi_3 & 6\xi_2\xi_3 & \delta_3 + \frac{9}{2}(\xi_1^2 + \frac{3}{2}\xi_2^2 + \frac{2}{3}\xi_3^2) \end{pmatrix}.$$

Анализируя спектр этой матрицы в бифурцирующих критических точках, можно перечислить допустимые *bif*-расклады ветвей критических точек (см. примеры характеристических комплексов в [7], [14]). Накладывая ограничения в виде условий положительности подкоренных выражений в координатных выражениях указанных выше ветвей критических точек, можно выделить области изменений параметров, которым соответствуют те или иные расклады бифурцирующих критических точек. В некоторых случаях существует двенадцать 2-модовых критических точек индекса (Морса) 2, восемь 3-модовых критических точек индекса 3. При этом все 1-модовые критические точки (6 точек) являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 3. Таким образом, ветвями притягивающих точек будут ветви одномодовых экстремалей вида

$$\pm \frac{2}{3} \sqrt{\delta_k} e_k + o(\delta_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

3. О ПРИБЛИЖЕНИЯХ К НЕЛОКАЛЬНОЙ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ И ТРАССАХ С ПУСКА

При построении нелокальной ключевой функции можно также воспользоваться прямой процедурой кратчайшего спуска в точку минимума функционала V . Первым шагом этой процедуры является выбор величины сдвига вдоль градиента из начальной (порождающей) точки, с целью уменьшения значения функционала энергии.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — фиксированный базис ритцевской аппроксимации (базис Ритца), составленный из собственных функции оператора Лапласа (в порядке возрастания номеров собственных функций без пропусков отдельных функций), и пусть e_1, e_2, e_3 — моды бифуркации (по которым допускается вырождение). Пусть при этом $V_R(\xi) := V\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right)$ — ритцевская аппроксимация функционала энергии (по базису Ритца).

В качестве нулевого приближения к функции

$$W(\tilde{\xi}) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j, j=1,2,3} \overline{V_R}(w), \quad \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

рассматривается функция $W_0(\tilde{\xi}) := V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)$ (ритцевская аппроксимация по модам e_1, e_2, e_3).

Первый шаг заключен в выборе «поправки» к W_0 , дающей первое приближение к $W(\tilde{\xi})$ в виде

$$W_1(\hat{\xi}) := V_R(a_0 - s_0 g_0),$$

где

$$a_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0, \dots, 0), \quad g_0 := \text{grad}_{\xi_4, \dots, \xi_n} V_R(a_0),$$

$$s_0 = \frac{\|g_0\|^2}{\langle G_0 g_0, g_0 \rangle},$$

где $G_0 = \text{hess}_{\xi_4, \dots, \xi_n} V_R(a_0)$ — матрица Гессе (в нулевой порождающей точке a_0) функции V_R по переменным $\xi_4, \dots, \xi_n$.

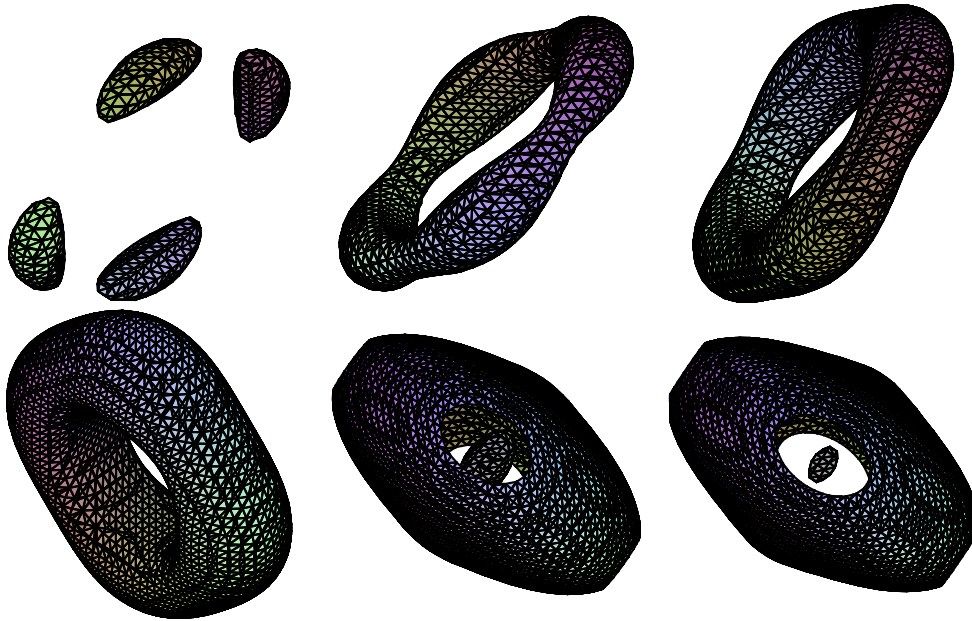


Рис. 1. Поверхности монотонно возрастающих уровней для первого приближения ключевой функции.

Второй шаг — повторение первого шага для новой порождающей точки a_1 и т. д. На шаге с номером k делается выбор функциональной величины сдвига $s_k = s_k(\hat{\xi})$ вдоль антиградиента посредством формулы

$$s_k = \frac{\|g_k\|^2}{\langle G_k g_k, g_k \rangle}, \quad (21)$$

где $G_k = \text{hess}_{\xi_4, \dots, \xi_n} V_R(a_0)$ — матрица Гессе (в точке a_k) функции V_R по переменным $\xi_4, \dots, \xi_n$.

К сожалению, выбор функциональной величины $s_k = s_k(\hat{\xi})$ сдвига (вдоль антиградиента) в виде (21) приводит к повышенному росту объема информации, сопровождающего вычисления, и, как следствие, к существенному замедлению работы алгоритма, к быстрому достижению предела возможностей вычислительных устройств. Это препятствие можно несколько снизить, заменив функциональный множитель числовым множителем σ , служащим универсальной оценкой снизу указанных выше функциональных множителей. Подбор числового ограничителя снизу можно осуществить, используя следующие легко проверяемые неравенства (для произвольной симметричной матрицы $G = (g_{j,k})$):

$$\|G\|_1 \leq \|G\|_2 \leq \|G\|_3,$$

где

$$\begin{aligned} \|G\|_1 &:= \max\{\mu : \mu \in \text{spec}(G)\}, \\ \|G\|_2 &:= \sqrt{\text{tr}(G^T G)}, \quad \|G\|_3 := \sum_{j,k} |g_{j,k}|. \end{aligned}$$

Вычисления, проведенные на основе изложенных выше теоретических положений, дают возможность визуализации критических точек. Можно вычислить сколь угодно точно координаты, определить их характер и расположение (см. [11]). А также можно определить нелокальные ветви притягивающих точек. Завершающим этапом является вычисление трассы спуска к точке минимума для ключевой функции, а затем по связывающей формуле определяются трасса спуска к притягивающей точке для исходного динамического уравнения Свифта-Хогенберга.

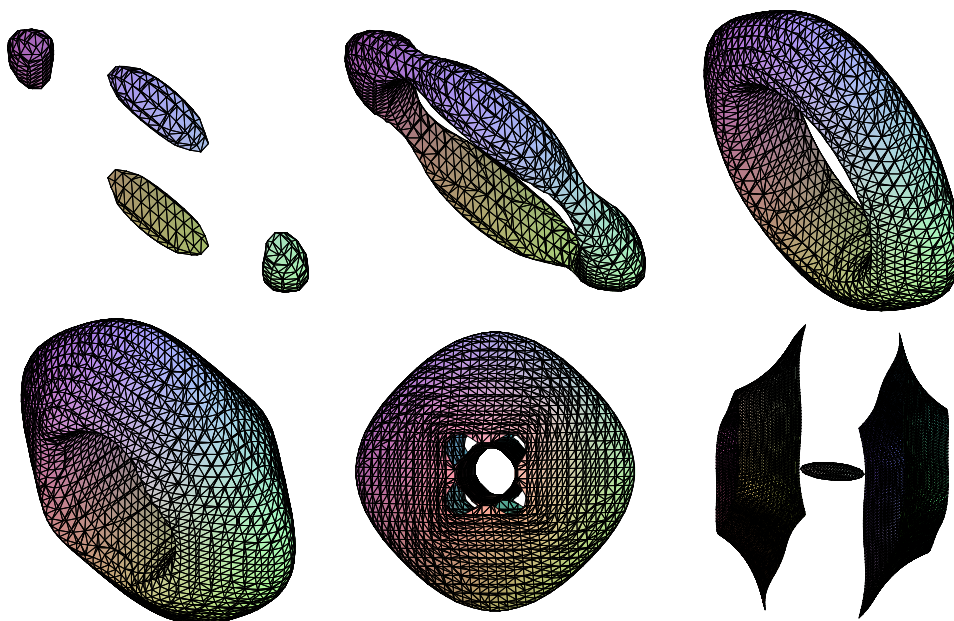


Рис. 2. Поверхности монотонно возрастающих уровней для второго приближения ключевой функции.

Некоторые характерные поверхности уровней многочлена $W1$ (первого приближения для ключевой функции) изображены на рис. 1.

На рис. 2 характерные поверхности уровней многочлена $W2$ (второго приближения для ключевой функции).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cahn, J. W. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. W. Cahn, J. E. Hilliard // J. Chem. Phys. — 1958. — V. 28. — P. 258–267.
2. Cahn, J. W. On spinodal decomposition / J. W. Cahn // Acta Metall. — 1961. — V. 9. — P. 795–801.
3. Скрипов, В. П. Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) / В. П. Скрипов, А. В. Скрипов // Успехи физических наук. — 1979. — Т. 123, № 2. — С. 193–231.
4. Cahn, J. W. The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature / J. W. Cahn, C. M. Elliott, A. Novick-Cohen // Eur. J. Appl. Math. — 1996. — V. 7. — P. 287–301.
5. Swift, J. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability / J. Swift, P. S. Hohenberg // Physical Review A. — 1977. — V. 15, № 1. — P. 319–328.
6. Кулагин, Н. Е. Фронты, бегущие волны и их устойчивость в обобщенном уравнении Свифта-Хогенберга / Н. Е. Кулагин, Л. М. Лерман, Т. Г. Шмакова // ЖВМ. — 2008. — Т. 48, № 4. — С. 693–712.
7. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.
8. Красносельский, М. А. Итерационный процесс с минимальными невязками / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // Матем. сборник. — 1952. — Т. 31(73), вып. 2. — С. 315–334.
9. Лемешко, А. А. О равномерной сходимости с производными галеркинских приближений к решениям уравнений с параметрами / А. А. Лемешко // Математические модели и

операторные уравнения. — 2003. — Т. 2. — С. 94–103.

10. Лемешко, А. А. О равномерной сходимости ньютоновских приближений к решениям уравнений с параметрами / А. А. Лемешко // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ. — 2003. — С. 74–83.

11. Коротких, А. С. Стационарные точки уравнения «реакция-диффузия» и переход в стабильные состояния / А. С. Коротких // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2017. — Т. 10, № 1. — С. 125–137.

12. Коротких, А. С. Бифуркации стационарных решений уравнения «реакция-диффузия» и переход концентраций в стабильное состояние / А. С. Коротких // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 1. — С. 115–127.

13. Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ / А. С. Коротких. — Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2017660700, 25.09.2017.

14. Ветвление экстремалей в точках минимума с однородными особенностями четвертого и шестого порядков / Б. М. Даринский, И. В. Колесникова, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 249–260.

REFERENCES

1. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. J. Chem. Phys., 1958, vol. 28, pp. 258–267.

2. Cahn J.W. On spinodal decomposition. Acta Metall., 1961, vol. 9, pp. 795–801.

3. Skripov V.P., Skripov A.V. Spinodal decay (Phase transfer with non-stable conditions.). [Skripov V.P., Skripov A.V. Spinodal'nyj raspad (fazovyy perexod s uchastiem neustojchivyx sostoyaniy)]. *Uspehi fizicheskix nauk — Physics-Uspekhi*, 1979, vol. 123, iss. 2, pp. 193–231.

4. Cahn J.W., Elliott C.M., Novick-Cohen A. The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature. Eur. J. Appl. Math., 1996, vol. 7, pp. 287–301.

5. Swift J., Hohenberg P.S. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. Phys. Rev., 1977, vol. 15, no. 1, pp. 319–328.

6. Kulagin H.E., Lerman L.M., Shmakov T.G. Fronts, traveling waves and their stability in generalized Swift-Khoienbera. [Kulagin H.E., Lerman L.M., Shmakov T.G. Fronty, begushhie volny i ix ustojchivost' v obobshhennom uravnenii Svifta-Xoyjenberga]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 4, pp. 693–712.

7. Darinsky B.M., Sapronov Yu.I., Tsaryov S.L. Bifurcations of extremals of Fredholm functionalities. [Darinsky B.M., Sapronov Yu.I., Tsaryov S.L. Bifurkacii ekstremaley fredgol'movyx funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

8. Krasnoselky M.A., Krejn S.G. The iterative process minimal residuals. [Krasnoselky M.A., Krejn S.G. Iteracionnyy process s minimal'nymi nevyazkami]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1952, vol. 31 (73), iss. 2, pp. 315–334.

9. Lemeshko A.A. Uniform convergence with derivatives Galerkin approximations to the solutions of equations with parameters. [Lemeshko A.A. O ravnomernoj sxodimosti s proizvodnymi galerkinskix priblizhenij k resheniyam uravnenij s parametrami]. *Matematicheskie modeli i operatornye uravneniya — Mathematical models and operator equations*, 2003, vol. 2, pp. 94–103.

10. Lemeshko A.A. Uniform convergence of Newton's approximations to solutions of equations with parameters. [Lemeshko A.A. O ravnomernoj sxodimosti n'yutonovskix priblizhenij k resheniyam uravnenij s parametrami]. *Sbornik trudov molodyx uchenyx matematicheskogo fakul'teta VGU — Proceedings of young scientists mathematical faculty of VSU*, 2003, pp. 74–83.

11. Korotkih A.S. Stationary points of the «reaction-diffusion» equation and transition to stable

states. [Korotkikh A.S. Stacionarnye tochki uravneniya «reakciya-diffuziya» i perexod v stabil'nye sostoyaniya]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye* — *Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical modeling, programming & computer software*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 125–137.

12. Korotkih A.S. Stable concentrations defined by two-dimensional equation of diffusion with cubic nonlinearity. [Korotkikh A.S. Bifurkacii stacionarnyx resheniy uravneniya «reakciya-diffuziya» i perexod koncentraciy v stabil'noe sostoyanie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* — *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 115–127.

13. Korotkikh A.S. Certificate of registration of computer programs. [Korotkikh A.S. Svidetel'stvo o registracii programm dlya EVM]. Registered in the Register of computer programs, № 2017660700, 25.09.2017.

14. Darinsky B.M., Kolesnikova I.V., Kostin D.V., Sapronov Yu.I. Branching of extremals at minimum points with homogeneous singularities of the fourth and sixth orders. [Darinsky B.M., Kolesnikova I.V., Kostin D.V., Sapronov Yu.I. Vetvlenie ekstremaley v tochkax minimuma s odnorodnymi osobennostyami chetvertogo i shestogo poryadkov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* — *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2008, no. 1, pp. 249–260.

Гнеушев Илья Андреевич, аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: wtn70@yandex.ru
Тел.: +7(473)220-83-64

Gneushev I. A., Post-graduate student of the Department of mathematical modeling, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: wtn70@yandex.ru
Tel.: +7(473)220-83-64

Колесникова Инна Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kolinna@inbox.ru
Тел.: +7(473)220-86-90

Kolesnikova Inna Viktorovna, Associate Professor, Department of mathematical analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kolinna@inbox.ru
Tel.: +7(473)220-86-90

Мызников Александр Сергеевич, магистрант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: a.s.myznikov@ya.ru
Тел.: +7(473)220-83-64

Myznikov Alexandr Sergeevich, undergraduate of the Department of mathematical analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: a.s.myznikov@ya.ru
Tel.: +7(473)220-83-64