УДК 517.9

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ*

Ж. И. Бахтина, И. В. Колесникова, Ф. О. Найдюк, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.12.2016 г.

Аннотация. В настоящей работе приводится продолжение исследования проблем математического моделирования объектов и явлений, описываемых англоязычными авторами в теории динамических уравнений на временных шкалах, актуальность которой они мотивируют различными интерпретациями в области пульсирующих и эпизодически замирающих процессов в биологии и экономики, а также в области космологии. В ранних работах нами была доказана возможность корректного взгляда на проблемы интегрального исчисления в данной теории, которые были вызваны несвязностью самих временных шкал. Авторы теории ориентировались лишь на асимптотические свойства решений. О качественных свойствах решений на конечных отрезках речь не шла. Благодаря распространению на изучаемую теорию метода дифференциала Стилтьеса, предложенного Ю. В. Покорным, появилась возможность попасть в зону действия корректной теории Штурма-Лиувилля для импульсных задач. Настоящая работа посвящена распределению нулей решений однородных динамических уравнений на временных шкалах. Приведены аналоги теорем Штурма о перемежаемости нулей разных решений одного уравнения, а также аналог теоремы сравнения Штурма.

Ключевые слова: динамические уравнения, временная шкала, дырка, функция влияния, распределение нулей, импульсная задача, метод Штурма.

ABOUT THE DISTRIBUTION OF ZEROS OF SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

Zh. I. Bakhtina, I. V. Kolesnikova, Ph. O. Naydyuk, S. A. Shabrov

Abstract. In this paper, we continue the study of the problems of mathematical modeling of objects and phenomena described by English-speaking authors in the theory of dynamic equations on time scales, the urgency of which they motivate by various interpretations in the field of pulsating and episodically fading processes in biology and economics, as well as in the field of cosmology. In earlier works, we proved the possibility of a correct view of the problems of integral calculus in this theory, which were caused by the incoherence of the time scales themselves. The authors of the theory focused only on the asymptotic properties of solutions. Qualitative properties of solutions on finite segments were not discussed. Owing to the extension to the theory studied of the method of the Stieltjes differential proposed by Yu.V. Pokorny, it became possible to get into the action zone of the correct Sturm-Liouville theory for impulse problems. The present paper is devoted to the distribution of zeros of solutions of homogeneous dynamic equations on time scales. Analogues of Sturm's theorems on the interchangeability of zeros of different solutions of the same equation are given, as well as an analogue of the Sturm comparison theorem.

Keywords: dynamic equations, time scale, hole, influence function, zero distribution, impulse problem, Sturm method.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16–01–00386–а

Как известно, обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$(pu')' + qu = f(= \lambda mu) \tag{0.1}$$

с непрерывными параметрами $q(x)$,$f(x)$,$m(x)$ является основой для построения математических моделей процессов или явлений различной природы. С течением времени возникла необходимость распространения уравнения (0.1) на более широкие классы объектов с нерегулярными параметрами, в связи с чем воронежцами было предложено вместо уравнения (0.1) рассматривать уравнение вида

$$\int\limits_0^x d(pu') + \int\limits_0^x udQ = \int\limits_0^x dF(= \lambda \int\limits_0^x udM), \tag{0.2}$$

где $Q(x)$,$F(x)$ и $M(x)$ - поточечно определяемые функции ограниченной вариации, а интегралы понимаются по Стилтьесу. Еще Ю. В. Покорный предложил придать уравнению (0.2) аналогичный (0.1) вид

$$D(pu') + uDQ = DF(= \lambda uDM), \tag{0.3}$$

используя дифференциал Стилтьеса от функции ограниченной вариации $g(x)$, под которым понимается непрерывный на $C[a,b]$ функционал:

$$(Dg)(u) = \int\limits_a^b udg.$$

Тщательная проработка такого подхода к уравнениям (0.3) и (0.2) позволила перенести на случай импульсных задач осцилляционную теорию Штурма (см. [1]). Далее была поставлена задача о распространении метода дифференциала Стилтьеса на новые классы задач, одной из которых стала теория динамических уравнений на временных шкалах ([ДУВШ]).

1. О ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ И КОРРЕКТНЫЙ ВЗЛЯД С ПОЗИЦИИ ТЕОРИИ МЕРЫ

В теории [ДУВШ] (см. [2]–[6]) изучаются функции, аргументами которых являются точки временных шкал (временная шкала — любое замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$). Для фиксированной временной шкалы $\mathbb{T}$ в [ДУВШ] ставится и изучается динамическое уравнение вида

$$(p(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle} + q(t)x(\sigma(t)) = f(t), \tag{1.1}$$

где под $\triangle$-производной $x^{\triangle}(t)$ функции $x(t)$ понимается

$$x^{\triangle}(t_0) = \lim_{s \to t_0} \frac{x(\sigma(t_0)) - x(s)}{\sigma(t_0) - s}, t_0 \in \mathbb{T}. \tag{1.2}$$

Под $\sigma(t)$ понимается величина

$$\sigma(t) := inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.3}$$

Как выше было сказано, Ю. В. Покорным было предложено распространить метод дифференциала Стилтьеса на теорию [ДУВШ], что положило начало ряду работ (см., например, [7]–[10]). Напомним необходимые сведения из данной теории.

Дополнение шкалы $\mathbb{T}$ до всей числовой оси состоит из объединения конечного или счетного числа интервалов. Каждый такой интервал мы назвали дыркой шкалы $\mathbb{T}$. Строгое неравенство $\sigma(t) > t$ по определению $\sigma(t)$ имеет место тогда и только тогда, когда t является левым краем какой-либо дырки. $\triangle$-производная не отличается от обычной производной, если t не является левым краем какой-либо дырки. Если t - левый край какой-либо дырки, то $x^{\triangle}(t) \neq x'(t-0)$, а ведь для осмысления второй производной $(x^{\triangle}(t))^{\triangle}$ необходимо иметь однозначно определенное значение $x^{\triangle}(t)$ в точке t. Смысл последнего становится корректным лишь в предположении $x^{\triangle}(t) = x'(t-0)$, а это нигде англоязычные авторы теории [ДУВШ] не оговаривали, но пользовались этим фактом.

Корректный взгляд на объекты теории [ДУВШ] стал возможен лишь с позиции теории меры и теории интеграла. Этот подход позволил строить и изучать аналог уравнения (1.1) в классе абсолютно непрерывных функций без дырок в области определения аргумента, что стало возможным благодаря непрерывному распространению динамического уравнения на всю числовую ось. Мы оказались в зоне действия теории импульсных задач, что позволило обеспечить для основного уравнения качественные свойства.

В $\triangle$-производных основное уравнение, определенное на временной шкале $\mathbb{T}$, выглядит следующим образом:

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = f(x). \tag{1.4}$$

$\mathfrak{N}$ — множество левых краев дырок из $\mathbb{T}$. Динамическое уравнение отличается от обычного только на множестве $\mathfrak{N}$ (об этом упоминалось выше).

В теории [ДУВШ] предполагается непрерывность коэффициентов p и q и непрерывность решений уравнения (1.4) вместе с производными $u^{\triangle}(x)$ и $(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle}$. Эти условия мы назвали допустимыми условиями [ДУВШ].

Далее термины нами были введены как локальные, т.е. определяемые по каждому отрезку $[a,b] \subset R$. Так, функция $u(x)$ называется имеющей ограниченную вариацию на R, если она имеет конечную вариацию на каждом $[a,b] \subset R$. Естественно говорить о функции ограниченной вариации на временной шкале $\mathbb{T} \subset R$, кладя в основу этого свойства ограниченность вариации $u(x)$ на пересечении каждого отрезка $[a,b]$ с данной временной шкалой $\mathbb{T}$. $BV(\mathbb{T})$ — множество таких функций.

Напомним, что в классической ситуации через $BV_0[a,b]$ обозначается пространство всех функций ограниченной вариации, непрерывных слева (или справа). Именно такое пространство играет решающую роль в определении интеграла по Стилтьесу, так как для каждой функции из BV_0 любой ее скачок является простым. Этот скачок $\triangle u(\xi) = u(\xi+0) - u(\xi-0)$ однозначно определяет соответствующую меру точки ξ, а это важно при задании интеграла Стилтьеса (и Лебега-Стилтьеса). Если $u(x)$ — произвольная функция из BV, то кроме односторонних пределов $u(\xi-0)$,$u(\xi+0)$ она должна иметь собственное значение $u(\xi)$ в точке ξ, т. е. она имеет в точке ξ левый $\triangle^{-}u(\xi) = u(\xi) - u(\xi-0)$ и правый $\triangle^{+}u(\xi) = u(\xi+0) - u(\xi)$ скачки. Именно из-за этого у интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b u(x)d\sigma(x)$ с произвольной функцией $\sigma(x) \in BV$ отсутствует аддитивность по множеству интегрирования. Это свойство наверняка нарушается, если функция $\sigma(x)$ имеет в точке ξ самостоятельное значение $\sigma(\xi)$, отличное от $\sigma(\xi-0)$ и $\sigma(\xi+0)$, когда σ-мера точки ξ расщеплена на две — левую и правую. Тем самым без дополнительного предположения об отсутствии у σ промежуточных значений в точках разрыва (т. е. $\sigma \in BV_0$) мы лишаемся права на дифференцирование по верхнему пределу интеграла $\int\limits_a^t u(x)d\sigma(x)$. Такое право мы получаем при анализе подобных интегралов на временных шкалах. Здесь под $BV_0(\mathbb{T})$ понимается совокупность функций, для каждой из которых на любом $[a,b] \subset R$ ее вариация на пересечении $[a,b] \bigcap \mathbb{T}$ ограничена и эти функции непрерывны слева на $\mathbb{T}$, то есть $u(\xi-0) = u(\xi)$ для каждой функции $u \in BV_0(\mathbb{T})$.

Основной является следующая теорема.

Теорема. *Пусть для уравнения (1.4) выполняются допустимые условия [ДУВШ]. Тогда существуют функции $P(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ с локально ограниченным изменением на $\mathbb{R}$ и такие,* *что каждому из допустимых решений $u(x)$ уравнения (1.4) соответствует определенное и непрерывное на всем $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ решение $\widehat{u}(x)$ уравнения*

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ(x) = \int\limits_r^s dF(x),$$

совпадающее с $u(x)$ на шкале $\mathbb{T}$. Здесь интегралы понимаются по Стилтьесу.

В последнем уравнении функция $Q(x)$ берется в виде

$$Q(x) = \int\limits_a^x q_0 ds + \sum_{\tau\in\mathfrak{N},\tau\leqslant x} q(\tau)\mu(\tau)\theta(x-\sigma(\tau)),$$

где $q_0 = q(x)$ при $x = \sigma(x)$ и $q_0 \equiv 0$ на $\mathbb{W}$ (дополнении $\mathbb{T}$ до всей оси), $\theta(x)$ - функция Хевисайда, $\mu(\tau) = \sigma(\tau) - \tau$.

Уравнение

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ(x) = \int\limits_r^s dF(x)$$

в терминах дифференциала Стилтьеса принимает вид:

$$D(pu') + uDQ = DF.$$

$\mathbb{E}$ ($\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$) — множество абсолютно непрерывных на $\mathbb{R}$ (соответственно на $\mathbb{T}$) функций, производные которых имеют локально ограниченное изменение на $\mathbb{R}$ (на $\mathbb{T}$). Тогда верно, что пространство $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ полно по норме:

$$\|u(x)\| = \sup_{\mathbb{T}} |u(x)| + V_{\mathbb{T}}[u'(x)]. \tag{1.5}$$

Через $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ нами было обозначено пространство функций из $\mathbb{E}$, совпадающих на $\mathbb{T}$ с элементами из $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ и линейных на каждой дырке $\mathbb{T}$.

Через S_A обозначим множество всех точек, в которых $p(x)$,$q(x)$ имеют ненулевые простые скачки. Выбрасываем S_A из $[a,b]$ и заменяем каждую точку $\xi \in S_A$ парой символов $\{\xi{-}0,\xi{+}0\}$. Получаем множество $[\overline{a,b}]_A$.

Функции $q(x)$ и $p(x)$ из (1.1) принадлежит $BV(\mathbb{T})$, $\widehat{P}(x)$,$\widehat{Q}(x)$,$\widehat{F}(x)$ — их продолжения на $\mathbb{W}$ равенствами

$$\widehat{P}(x) = p(\alpha-0),\widehat{Q}(x) \equiv 0,\widehat{F}(x) \equiv 0, \tag{1.6}$$

где α — левый край дырки.

Если $u(x)$ — произвольная функция из $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ и $[u(x)]$ — ее сужение на $\mathbb{T}$, то все локальные дифференциалы Стилтьеса от обеих этих функций совпадают. Тогда исходное уравнение на $\mathbb{T}$ можно сразу рассматривать на множестве расширенных функций, определенных на всей числовой оси, и наоборот.

Весь разговор данной тематики ведется на компактных подмножествах $\mathbb{R}$ (пересечении $[a,b]$ с временной шкалой $\mathbb{T}$). Если шкала неограничена, можно вести аналогичный разговор локально на каждом отрезке, поэтому формулировки результатов я буду озвучивать на $\mathbb{T}$, подразумевая детализацию на каждом отрезке. Например, в пространстве $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ введена (см.[11]) топология на каждом сужении $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ на компактный интервал. На каждом конечном интервале соответствующее расширение $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ является нормированным пространством, так что в целом на всей оси пространство $\widehat{\mathbb{E}}_{\mathbb{T}}$ счетномерно.

2. О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения*

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0.$$

Тогда между двумя соседними нулями $\varphi_1(x)$ находится по крайней мере один нуль решения $\varphi_2(x)$, и наоборот.

Доказательство (приводим в расширенном пространстве). Пусть $\xi_1 < \xi_2$ - какие-либо соседние нули решения $\varphi_1(x)$. Будем считать, что для всех $x \in (\xi_1,\xi_2)$ функция $\varphi_1(x) > 0$.

Предположим следующее: $\varphi_2(x) > 0$ для всех $x \in [\xi_1,\xi_2]$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}.$$

Тогда $h'(x) = \frac{W[\varphi_1,\varphi_2](x)}{\varphi_2^2(x)}$. Теорема 2.2.7 из [11] гласит о том, что для любых двух решений $\varphi_1(x)$,$\varphi_2(x)$ однородного уравнения

$$(p(x)u^{\triangle}(x))^{\triangle} + q(x)u(\sigma(x)) = 0$$

следующие свойства эквивалентны:

(a) определитель

$$W[\varphi_1,\varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1^{\triangle}(x & \varphi_2^{\triangle}(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в каждой точке $\overline{[a,b]}_A$;

(b) $W(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $\overline{[a,b]}_A$;

(c) функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы.

Тогда функция $h'(x)$ сохраняет знак, что противоречит условию $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$. А это значит, что функция $\varphi_2(x)$ имеет по крайней мере один нуль на $[\xi_1,\xi_2]$. Следует отметить, что $\varphi_2(\xi_i) \neq 0 (i = 1,2)$. Иначе вронскиан $W[\varphi_1,\varphi_2]$ обращался бы в нуль в ξ_i, что противоречит линейной независимости $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$. Теорема доказана.

Теорема 2 . *Рассмотрим уравнения*

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ_1(x) = 0, \tag{2.1}$$

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ_2(x) = 0. \tag{2.2}$$

Пусть функция $Q_1 - Q_2$ не убывает и отлична от константы на $\overline{[a,b]}$ и $\xi_1 < \xi_2$ — соседние нули нетривиального решения $u(x)$ уравнения (2.1). Тогда между ними найдется нуль неколлинеарного $u(x)$ решения $v(x)$ уравнения (2.2).

Доказательство (приводим в расширенном пространстве). Пусть $u(x) > 0$ для всех $x \in (\xi_1,\xi_2)$. Пусть $v(x) > 0$ пр всех $x \in [\xi_1,\xi_2]$. Рассмотрим случай, когда в точке ξ_1 функции P, Q_1,Q_2 непрерывны, а в точке ξ_2 одна из функций P, Q_1,Q_2 терпит разрыв (все остальное — аналогично).

Так как

$$[Pu']_r^s + \int\limits_r^s u(x)dQ_1(x) = 0,$$

то для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ имеем

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2-0} \varphi d(Pu') = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2-0} \varphi u dQ_1.$$

Если $\varphi(x) = v(x)$, то

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2-0} v d(Pu') = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2-0} uv dQ_1.$$

Совершенно аналогично,

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2-0} u d(Pv') = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2-0} uv dQ_2.$$

В результате преобразований получаем:

$$v(\xi_2)P(\xi_2-0)u'(\xi_2-0) = v(\xi_1)P(\xi_1)u'(\xi_1) + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2-0} uv d(Q_1 - Q_2).$$

Заметим, что $u'(\xi_1) > 0$. Поэтому правая часть последнего равенства строго больше нуля. А с другой стороны, $u'(\xi_2 - 0) < 0$. Пришли к противоречию, поэтому $v(x)$ наверняка имеет нуль на $[\xi_1,\xi_2]$.

Из последнего равенства также следует, что функция $v(x)$ имеет нуль на интервале (ξ_1,ξ_2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

2. Saker, S. H. Oscillation of Second-Order Forced Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales / S. H. Saker// Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2005. — № 23, iss. 1–17. P. 57–64.

3. Hilger, S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus / S. Hilger // Results Math. — 1990. — Iss. 18. — P. 18–56.

4. Bohner, M. Dynamic Equations on Time Scales / M. Bohner, A. Peterson // An Introduction with Applications. — Birkh user Boston, MA, 2001. — 369 p.

5. Dosly, O. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales / O. Dosly, S. Hilger // J. Comp. Appl. Math. — 2002. — V. 141. — P. 147–158.

6. Erbe, L. Riccati equations on a measure chain / L. Erbe, A. Peterson // Dynamic systems and applications 3. — (Atlanta, GA, 1999), Dynamic, Atlanta, GA, 2001. — P. 193–199.

7. Покорный, Ю. В. О стилтьесовском заглаживании временных шкал / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы конференции Воронежской зимней математической школы. — Воронеж, 2009. — С. 140–141.

8. Покорный, Ю. В. Метод дифференциалов Стилтьеса в некоторых задачах с импульсными особенностями / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Давыдова // Международная научная конференция "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики посвященная памяти академика А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. Серия Дифференциальные уравнения и математическая физика, 2009.

9. Бахтина, Ж. И. О задаче Штурма-Лиувилля на несвязных компактах / Ж. И. Бахтина // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XX". — Воронеж, 2009. — С. 20–22.

10. Бахтина, Ж. И. Метод интеграла Стилтьеса в теории динамических уравнений на временных шкалах / Ж. И. Бахтина // Актуальные проблемы математики и информатики (труды математического факультета). — 2009. — № 1. — С. 3–8.

11. Бахтина, Ж. И. Метод дифференциала Стилтьеса в моделировании некоторых динамических задач с прерывистым или ветвящимся аргументом / Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 2009. — 100 с.

REFERENCES

1. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

2. Saker S.H. Oscillation of Second-Order Forced Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2005, no. 23, iss. 1–17, pp. 57–64.

3. Hilger S. Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math., 1990, iss. 18, pp. 18–56.

4. Bohner M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Birkh user Boston, MA, 2001, 369 p.

5. Dosly O., Hilger S. A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales. J. Comp. Appl. Math. 2002, vol. 141, pp. 147–158.

6. Erbe L., Peterson A. Riccati equations on a measure chain. Dynamic systems and applications 3, (Atlanta, GA, 1999), Dynamic, Atlanta, GA, 2001, pp. 193–199.

7. Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I. On Stiltesov smoothing of time scales. [Pokornyyj Yu.V., Baxtina Zh.I. O stilt'esovskom zaglazhivanii vremennyx shkal]. Modern methods function theory and related problems. Proceedings of the conference of the Voronezh Winter Mathematical School, 2009, pp. 140–141.

8. Pokorny Yu.V., Bakhtina Zh.I., Davydova M.B. The Stieltjes differential method in some problems with impulse singularities. [Pokornyyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Davydova M.B. Metod differencialov Stilt'esa v nekotoryx zadachax s impul'snymi osobennostyami]. International Scientific Conference "Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics" dedicated to the memory of Academician AA Samarskiy in connection with the 90th anniversary of his birth, Series Differential Equations and Mathematical Physics, 2009.

9. Bakhtina Zh.I. On the Sturm-Liouville problem on disconnected compacts. [Baxtina Zh.I. O zadache Shturma-Liuvillya na nesvyaznyx kompaktax]. Modern methods of the theory of boundary value problems. Materials of the Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin Readings–XX", 2009, pp. 20–22.

10. Bakhtina Zh.I. The Stieltjes Integral Method in the Theory of Dynamic Equations on Time Scales. [Baxtina Zh.I. Metod integrala Stilt'esa v teorii dinamicheskix uravneniyj na vremennyx shkalax]. *Aktual'nye problemy matematiki i informatiki (trudy matematicheskogo fakul'teta) — Actual problems of mathematics and Informatics (proceedings of the Faculty of Mathematics)*, 2009, no. 1, pp. 3–8.

11. Bakhtina Zh.I. Stieltjes differential method in modeling some dynamic problems with intermittent or branching argument. [Baxtina Zh.I. Metod differenciala Stilt'esa v modelirovanii nekotoryx dinamicheskix zadach s preryvistym ili vetvyashhimsya argumentom]. Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical Sciences, Voronezh, 2009, 100 p.

Бахтина Жанна Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bakhtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Колесникова Инна Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kolinna@inbox.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Kolesnikova Inna Viktorovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kolinna@inbox.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Найдюк Филипп Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: olegna@vmail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Naydyuk Philip Olegovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: olegna@vmail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru

Shabrov Sergey Alexandrovich, Doctor of physico-mathematical sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru