УДК 517.956

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.01.2017 г.

Аннотация. Статья посвящена построению регуляризаторов и доказательству теорем о существовании решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений высокого порядка. Рассматриваются вырождающиеся эллиптические уравнения с переменными коэффициентами, зависящими еще от комплексного параметра. Уравнения содержат весовые дифференциальные операторы, представляющие собой суперпозицию оператора умножения на функцию, которая обращается в нуль на границе, и оператора дифференцирования. На границе рассматриваются условия общего вида. Построены регуляризаторы и доказаны теоремы о существовании решений общих граничных задач в полупространстве для рассматриваемых задач. Оценки получены в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, граничная задача, коэрцитивная априорная оценка, регуляризатор, весовое пространство С. Л. Соболева.

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF COMMON BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN A HALF-SPACE FOR DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS

A. D. Baev, R. A. Kovalevsky, A. A. Babaytsev, V. D. Kharchenko

Abstract. The article is devoted to the construction of regularizers and the proof of theorems on the existence of solutions of common boundary value problems in a half space for degenerate elliptic differential equations of high order. Degenerate elliptic equations with variable coefficients, which also depend on the complex parameter, are considered. The equations contain weighted differential operators, which are the superposition of the multiplication operator on a function that vanishes on the boundary, and the differentiation operator. At the border, general conditions are considered. Regularizers are constructed and theorems on the existence of solutions of common boundary value problems in a half-space for the considered problems are proved. Estimates are obtained in special weighted spaces of the S. L. Sobolev.

Keywords: degenerating equation, boundary problem, coercive a priori estimate, regularizer, weight space S. L. Sobolev.

ВВЕДЕНИЕ

Вырождающиеся уравнения в настоящее время используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском государственном университете.

процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции — диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. Вслед за этим появился ряд работ, в которых методами, близкими к методу М. И. Вишика, изучались вырождающиеся уравнения второго порядка. Метод "эллиптической регуляризации" был применен О. А. Олейник [5], а затем Дж. Коном и Л. Ниренбергом [6] для изучения эллиптико–параболических уравнений второго порядка. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [7]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [8], А. Д. Баевым [9]–[12].

В этой работе доказываются строятся регуляризаторы и доказываются теоремы о существовании оценки решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Метод доказательства основан на построении разделяющего оператора типа оператора Лере–Сакамото. Формулировка полученных результатов содержится в работе [12].

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [9]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau$, $\eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(y) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}\,. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(y)\in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j=1,2,...,\ \text{где}\quad D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R^n_+)$; $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^s\,|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]|^2\,d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s\geqslant 0,\ q>1$) состоит из всех функций $v(x,y)\in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_y v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu\in(0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)|\leqslant c<\infty$ при всех $t\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y)\in C^{s_1}[0,+\infty)$для некоторого $s_1\geqslant 2N-|\sigma|$, где $N\geqslant\max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1+\frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu}+1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{l}{2}\}$, $\sigma=s+q$, $l=1,2,...,[\frac{s}{q}]$, где $q>1, s\geqslant 0$ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $\sigma\in\mathrm{R}^1, p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,1,2,\dots$, $l=0,1,2,\dots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta)|\leqslant c_{jl}(|p|^2+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

В R^n_+ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y)v(x, y) = F(p, x, y), \tag{8}$$

где

$$A(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y)v = \sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3 \leqslant 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y) p^{j_3} D_x^\tau D_{\alpha,y}^{j_1} \partial_y^{j_2} v. \tag{9}$$

Здесь m, k, l натуральные числа $q = \frac{2m}{k} > 1$, $r = \frac{2m}{l} > 1$, $a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)$ — некоторые ограниченные на $\bar{R}^1_+$ функции, $a_{00k0}(y) \neq 0$ при всех$y \in \bar{R}^1_+$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(y) = 1$ при всех $y \in \bar{R}^1_+$.

На границе $y = 0$ полупространства R^n_+задаются граничные условия вида

$$B_j(p, D_x, \partial_y)\, v|_{y=0} = \sum_{|\tau|+rj_3+qj_2 \leqslant m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} D_x^\tau \partial_y^l\, v|_{y=0} = G_j(p, x), j = 1, 2, ..., \mu. \tag{10}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 2. Уравнение

$$\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3=2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y) \xi^\tau \eta^{j_1} z^{j_2} p^{j_3} = 0. \tag{11}$$

не имеет z — корней, лежащих на мнимой оси при всех $y \geqslant 0$ $(\xi, \eta) \in R^n$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $|p| + |\eta| + |\xi| > 0$.

Пусть $z_1(p, y, \xi, \eta), ..., z_{r_3}(p, y, \xi, \eta)$ $(1 \leqslant r_3 \leqslant k)$ — корни, лежащие в левой полуплоскости, а $z_{r_3+1}(p, y, \xi, \eta), ..., z_k(p, y, \xi, \eta)$ лежат в правой полуплоскости.

Условие 3. Функции $z_j(p, y, \xi, \eta)$, $j = 1,\ 2, ...,\ k$, при всех $\xi \in R^{n-1}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по переменным $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$ и $\eta \in R^1$. Причем, при всех $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $j_1 = 0,\ 1,\ 2,\ ..., l = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$$\left|(\alpha(y)\partial_y)^{j_1} \partial_\eta^{j_2} z_j(y, \xi, \eta)\right| \leqslant c_{j_1,l}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{q-j_2}, \quad |p| + |\xi| + |\eta| > 0, \tag{12}$$

с константами $c_{j_1,l} > 0$, не зависящими от $p, y,\ \xi,\ \eta$.

Из условия 3 следует, что при всех $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$$Re z_j(p, y, \xi, \eta) \leqslant -c_1(|p| + |\xi| + |\eta|)^q,\ \ j = 1, ..., r_3; \tag{13}$$

$$Re z_j(p, y, \xi, \eta) \geqslant c_2(|p| + |\xi| + |\eta|)^q,\ \ j = r_3 + 1, ..., k, \tag{14}$$

с некоторыми константами $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, не зависящими от p, y, ξ, η.

Условие 4. Число граничных условий (10) равно числу z — корней уравнения (11), лежащих в левой полуплоскости, и при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| > 0$ многочлены $B_j^0(\xi, z) = \sum\limits_{|\tau|+qj_2+rj_3=m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} \xi^\tau z^{j_2}$ линейно независимы по модулю многочлена $P(\xi, z) = \prod\limits_{j_1=1}^{r_3} (z - z_{j_1}(0, \xi, 0))$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant \max\{2m,\ \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} m_j + q\}$ — действительное число и выполнены условия 1–4. Тогда существует правый регуляризатор задачи (8), (10) , то есть такой оператор $R : H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod\limits_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \to H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$, что

$$\widetilde{A}R(F, \bar{G}) = (F, \bar{G}) + \widetilde{T}(F, \bar{G}), \tag{15}$$

где $\widetilde{A}$ — оператор, порожденный задачей (8), (10),

$$\widetilde{A} : H_{s,\alpha,q}(R^n_+) \to H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}),$$

а оператор $\widetilde{T}$ является ограниченным оператором из

$$H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \text{ в } H_{s-2m+1,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q+1-m_j}(R^{n-1}),$$

$\bar{G} = (G_1,\ G_2,\ ...G_r)$.

Правый регуляризатор задачи является одновременно и левым регуляризатором.

Заметим, что утверждение теоремы 1 справедливо для оператора $A(p, t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v$ следующего вида

$$A(p, t, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = \prod_{j=1}^{k} (\partial_t - K_j(p, t, D_x, D_{\alpha,t}))v,$$

где $K_j(p, t, D_x, D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $z_j(p, t, \xi, \eta)$, $j = 1, 2, ..., k$.

Теорема 2. Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r_3} m_j + q\}$, выполнены условия 1–4 при $p \in Q_{p_0} = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| \geqslant p_0 > 0\}$. Пусть$F(p, x, y) \in H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+), G_j(p, x) \in H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$, $j = 1, 2, ...r_3$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что при всех $p \in Q_{p_0}$существует единственное решение $v(x, t) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (8), (10).

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим теперь оператор

$$\widehat{A}_j(p, t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t) = \widetilde{K}_j(p, t, \xi, D_{\alpha,t}) - \partial_t,\ \ j = 1, 2, ..., k, \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{K}_j(p, t, \xi, D_{\alpha,t}) = F_\alpha^{-1}\left[\lambda_j(p, t, \xi, \eta)F_\alpha[\cdot]\right], \\ &\lambda_j(p, t, \xi, \eta) = z_j(p, t, \xi, \eta + \sqrt{-1}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$z_j(p, t, \xi, \eta)$ — z–корни уравнения (11).

Рассмотрим функции, построенные по формулам

$$w_{j+1}(p, \xi, t) = \widehat{A}_j(p, t, \xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)w_j(p, \xi, t), \quad j = 1,\ 2, ..., k, \tag{1.3}$$

где функция $w_1(p, \xi, t)$при всех $\xi \in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R^1_+)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. Пусть при всех $\xi \in R^{n-1}$, $p \in Q$ функция $w_1(p, \xi, t)$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R^1_+)$. Тогда справедливо равенство

$$\partial_t^s w_1(p, \xi, 0) = \widetilde{T}_{s,r_1}(w_1, ..., w_{r_1}) + \widetilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) + \widetilde{I}_{s,r_1}(w_1, ..., w_{r_1}), \tag{1.4}$$

где $s = 1, 2, ...,\ \ r_1 = 1, 2, ..., k$; функции $\widetilde{T}_{s,r_1}(w_1, ..., w_{r_1})$ строятся по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{s,r_1}(w_1, ..., w_{r_1}) = \widetilde{T}_{s,r_-1}(w_1, ..., w_{r_1-1}) + \\ + {\sum}'_{r_1-1,s} \lambda_1^{l_1}(p, 0, \xi, 0) \cdot ... \cdot \lambda_{r_1-1}^{l_{r-1}}(p, 0, \xi, 0) \cdot \lambda_{r_1}^{s-|l|_{r_1}-(r_1-1)}(p, 0, \xi, 0) w_{r_1}(p, \xi, 0), \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\widetilde{T}_{s,1}(w_1) = \lambda_1^s(p,0,\xi,0)w_1(p,\xi,0). \tag{1.6}$$

Здесь

$$|l|_j = l_1 + l_2 + ... + l_j, \ \ \sum\nolimits'_{j,s} = \sum_{l_1=0}^{s-1}\sum_{l_2=0}^{s-l_1-2}\dots\sum_{l_j=0}^{s-|l|_j-j},$$

$$\widetilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) = \sum\nolimits'_{r_1,s}\lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0)\cdot ... \cdot \lambda_{r_1}^{l_{r_1}}(p,0,\xi,0)\partial_t^{s-|l|_{r_1}-r_1}w_{r_1+1}(p,\xi,0). \tag{1.7}$$

$$\widetilde{I}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1}) = \widetilde{I}_{s,r_1-1}(w_1,...,w_{r_1-1})+$$
$$+\sum\nolimits'_{r_1,s-1}\lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0)\cdot ... \cdot \lambda_{r_1}^{l_{r_1}}(p,0,\xi,0)M_{s-|l|_{r_1}-r_1,r_1}w_{r_1}(p,\xi,0), \tag{1.8}$$

$$\widetilde{I}_{s,1}(w_1) = \sum_{l_1=0}^{s-2}\lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0)M_{s-l_1-1,1}w_1(p,\xi,0). \tag{1.9}$$

Здесь $M_{s,j}$ — коммутатор операторов ∂_t^s и $K_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$. По определению считается, что $\widetilde{T}_{s,r}\equiv 0$, при $s\leqslant 0,\ r_1\leqslant 0$, $\widetilde{I}_{s,r_1}=0$ при $s\leqslant 2,\ r_1\leqslant 0$; $\widetilde{F}_{s,r_1}=0$ при $s\leqslant 2,\ r_1\leqslant 0$.

Доказательство. Учитывая обозначение (1.1), получим равенство

$$\partial_t^s w_j(p,\xi,0) = \lambda_j^s(p,0,\xi,0)w_j(p,\xi,0) - \sum_{l_1=0}^{s-1}\lambda_j^{l_1}(p,0,\xi,0)\partial_t^{s-l_1-1}w_{j+1}(p,\xi,0)+$$
$$+\sum_{l_1=0}^{s-2}\lambda_j^{l_1}(p,0,\xi,0)M_{s-l_1-1,j}w_j(p,\xi,t)|_{t=0}, \tag{1.10}$$

где $M_{s-l_1-1,j}$ — коммутатор операторов $\partial_t^{s-l_1-1}$ и $\widetilde{K}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$. Положив в (1.10) $j=1$, получим равенство (1.4) при $r_1=1$. Предположим далее, что формула (1.4) справедлива при некотором $r_1\geqslant 1$, то есть

$$\partial_t^s w_1(\xi,0) = \widetilde{T}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1}) + \widetilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) + \widetilde{I}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1}), \tag{1.11}$$

где $\widetilde{T}_{s,r_1},\ \widetilde{F}_{s,r_1},\ \widetilde{I}_{s,r_1}$ находятся по формулам (1.4)–(1.9). С помощью формулы (1.10) находим равенство

$$\widetilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) = \sum\nolimits'_{r_1,s}\lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0)\cdot ... \cdot \lambda_{r_1}^{l_{r_1}}(p,0,\xi,0)\{\lambda_{r_1+1}^{s-|l|_{r_1}-l}w_{r_1+1}(p,\xi,0)+$$
$$+\sum_{l_{r_1+1}=0}^{s-l_1-...-l_{r_1}-r_1-2} M_{s-|l|_{r_1+1}-(r_1+1),\,r_1+1}w_{r_1+1}(\xi,0)+$$
$$+\sum_{l_{r_1+1}=0}^{s-l_1-...-l_1-r_1-1}\lambda_{r_1+1}^{l_{r_1+1}}(p,0,\xi,0)\partial_t^{s-l_{r_1+1}-(r_1+1)}w_{r_1+2}(p,\xi,0)\}. \tag{1.12}$$

Применяя (1.12) в правой части (1.11), устанавливаем справедливость равенства (1.3) при r_1+1.

Следствие 1.1. При выполнении условий леммы 1.1 справедливо равенство

$$\partial_t^s w_1(p,\xi,0) = \sum_{l=1}^{r_1}\widetilde{T}_{s+1-l}(z_1(p,0,\xi,0),...,z_l(p,0,\xi,0))w_l(p,\xi,0)+$$
$$+\widetilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) + \widetilde{I}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1}) + \sum_{l=1}^{r_1}\widetilde{E}_{s,l}(\xi)w_l(p,\xi,0), \tag{1.13}$$

где функции $\widetilde{F}_{s,r_1}$, $\widetilde{I}_{s,r_1}$ находятся из рекуррентных соотношений (1.7)–(1.9),

$$\widetilde{T}_j(z_1,...,z_l)=\sum_{|\beta|_l=j} z_1^{\beta_1}(p,0,\xi,0)\cdot...\cdot z_l^{\beta_l}(p,0,\xi,0), \tag{1.14}$$

$$\widetilde{E}_{s,l}(\xi)=\widetilde{T}_{s+1-l}(\lambda_1,...,\lambda_l)-\widetilde{T}_{s+1-l}(z_1,z_2,...,z_l), \tag{1.15}$$

$z_j(p,t,\xi,\eta)$ — z–корни уравнения (11), $\lambda_j(p,t,\xi,\eta)=z_j(p,t,\xi,\eta+\sqrt{-1})$.

Для доказательства равенства (1.13) достаточно заметить, что с помощью индукции по числу r_1 из рекуррентных соотношений (1.5) - (1.5) вытекает равенство

$$\widetilde{T}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1})=\sum_{l=1}^{r_1} T_{s+1-l}(\lambda_1,...,\lambda_l)w_l(p,\xi,0). \tag{1.16}$$

После этого формула (1.4) может быть записана в виде (1.13).

Определение 1.1. Будем говорить, что $Q(z)=0(\mathrm{mod}P(z))$, если многочлен $Q(z)$ делится без остатка на многочлен $P(z)$.

Нам понадобится следующая алгебраическая лемма, доказанная в работе [8].

Лемма 1.2. Пусть $\widetilde{Q}(z)=\sum\limits_{\widetilde{s}_1=0}^{j} a_{\widetilde{s}_1} z^{\widetilde{s}_1}$, $P(z)=\prod\limits_{i=1}^{r_3}(z-z_i)$. Положим $\widetilde{Q}_i(z_1,...,z_i)=\sum\limits_{\widetilde{s}_1=i-1}^{j} a_{\widetilde{s}_1}\sum\limits_{|\beta|_i=\widetilde{s}_1-i+1} z_1^{\beta_1}\cdot...\cdot z_i^{\beta_i}$, $1\leqslant i\leqslant r_3$. Тогда $\widetilde{Q}(z)=0(\mathrm{mod}P(z))$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{Q}_i(z_1,...,z_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant r_3$.

Запишем граничные операторы $B_i(p,\xi,\partial_t)=F_{x\to\xi}[B_i(p,D_x,\partial_t)]$ в виде

$$B_i(p,\xi,\partial_t)=\sum_{j=0}^{\mu_i}\Lambda_{i,j}(p,\xi)\partial_t^j;\ \Lambda_{i,j}(p,\xi)=\sum_{|\tau|+rj_3\leqslant m_i-qj} b_{\tau ji}p^{j_3}\xi^\tau, \tag{1.17}$$

где $\mu_i=[m_i/q]$. Рассмотрим также операторы

$$B_i^0(p,\xi,\partial_t)=\sum_{j=0}^{\mu_i}\Lambda_{i,j}^0(p,\xi)\partial_t^j;\Lambda_{i,j}^0(\xi)=\sum_{|\tau|+rj_3=m_i-qj} b_{\tau ji}p^{j_3}\xi^\tau. \tag{1.18}$$

Обозначим

$$B_{i,l}(p,\xi)=\sum_{\widetilde{s}_1=l^*-1}^{\mu_i} T_{\widetilde{s}_1+1-l}(z_1(p,0,\xi,0),...,z_l(p,0,\xi,0))\Lambda_{i,\widetilde{s}_1}^0(\xi), \tag{1.19}$$

где $l,\ i=1,2,...,r_3$, r_3 — число z–корней уравнения (11), лежащих в левой полуплоскости, величины $T_{\widetilde{s}_1-l+1}(z_1(p,0,\xi,0),...,z_l(p,0,\xi,0))$ определены в (1.14). $l^*=\min\{l,\mu_i+2\}$.

Лемма 1.3. Условие 4 эквивалентно условию

$$\det\{B_{i,l}(p,\xi)\}_{i,l=1}^{r_3}\neq 0 \tag{1.20}$$

при всех $\xi\in R^{n-1}, |\xi|>0$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен вида

$$\widetilde{Q}(p,\xi,z)=\sum_{i=1}^{r_3}\beta_i B_i^0(p,\xi,z)=\sum_{i=1}^{r_3}\beta_i\sum_{i=0}^{\mu_i}\Lambda_{i,j}^0(p,\xi)z^j, \tag{1.21}$$

который построен по произвольному набору чисел $\beta_1,\ \beta_2,\ ...,\ \beta_{r_3}$.

Если обозначить $\mu^* = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r_3} \mu_i$ и положить $\Lambda_{i,\widetilde{s}_1}(p,\xi) \equiv 0$ при $\mu_i + 1 \leqslant \widetilde{s}_1 \leqslant \mu^*$, $i = 1, 2, ..., r_3$, то многочлен $\widetilde{Q}(p,\xi,z)$ можно записать в виде

$$\widetilde{Q}(p,\xi,z) = \sum_{\widetilde{s}_1=0}^{\mu^*} \left(\sum_{i=1}^{r_3} \beta_i \Lambda^0_{i,\widetilde{s}_1}(p,\xi) \right) z^{\widetilde{s}_1}.$$

По лемме 1.2 условие $\widetilde{Q}(p,\xi,z) = 0(\mathrm{mod} P(p,\xi,z))$ эквивалентно условию

$$\widetilde{Q}_l(p,\xi,z_1,...,z_l) = \sum_{\widetilde{s}_1=l-1}^{\mu^*} \left(\sum_{i=1}^{r_3} \beta_i \Lambda^0_{i,\widetilde{s}_1}(p,\xi) T_{\widetilde{s}_1-l+1}(p,\xi) \right) = 0 \tag{1.22}$$

для всех $l = 1, 2, ..., r_3$. Здесь мы обозначили $T_{\widetilde{s}_1-l+1}(p,\xi) = T_{\widetilde{s}_1+1-l}(z_1(p,0,\xi,0), z_2(p,0,\xi,0), ..., z_l(p,0,\xi,0))$ (см. (1.14)). Учитывая (1.19), выводим из (1.22) равенство

$$\widetilde{Q}_l(p,\xi,z_1,...,z_l) = \sum_{i=1}^{r_3} \beta_i B_{i,j}(p,\xi) = 0, \ l = 1, 2, \ ..., r_3.$$

Отсюда и из леммы 1.2 вытекает утверждение леммы 1.3.

Лемма 1.4. Пусть $\widetilde{s}_1 \geqslant 0$ — действительное число, $s > 2$ — целое число, выполнено условие 1(с заменой s на $s+\widetilde{s}_1$). Пусть функция $\lambda_1(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяет оценкам (13). Тогда для оператора $\widetilde{I}_{s,1}(w_1)$, определённого в (1.9), справедливо неравенство

$$\left\langle \widetilde{I}_{s,1}(w_1), |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} \leqslant c||w_1, |p|\,||_{\widetilde{s}_1+q(s+1)-1,\alpha,q,|\xi|}, \tag{1.23}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ и функции $w_1(\xi,t)$.

Здесь
$$\langle w|_{t=0}, |p|\rangle^2_s = (|p|^2 + |\xi|^2)^s |\, w|_{t=0}\,|^2, \tag{1.24}$$
$||\cdot, |p|\,||_{s,\alpha,q,|\xi|}$ — норма в пространстве $\widetilde{H}_{s,\alpha,q}(R^1_+)$.

Доказательство. Из (1.9) с помощью свойств коммутаторов весовых псевдодифференциальных операторов и операторов дифференцирования, установленных в [10], устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} &\left\langle \widetilde{I}_{s,1}(w_1), |p| \right\rangle^2_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} \leqslant \\ &\leqslant c \sum_{p_1=0}^{s-2} |Re(\partial_t M_{s-l_1-1,1} w_1, M_{s-l_1-1,1} w_1)| \cdot (|p| + |\xi|^2)^{(\widetilde{s}_1+qp_1+\frac{q}{2})} \leqslant \\ &\leqslant c_1 \sum_{p_1=0}^{s-2} ||M_{s-l_1-1,1} w_1, |p|\,||_{\widetilde{s}_1+q(p_1+1),\alpha,q,|\xi|}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

где $M_{s-l_1-1,1}$ — коммутатор операторов $\partial_t^{s-l_1-1}$ и $\widetilde{K}_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$, $\widetilde{K}_1(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_1(p,t,\xi,\eta)$.

Заметим, что из свойств коммутаторов весовых псевдодифференциальных операторов и операторов дифференцирования, установленных в [10], вытекает оценка

$$||M_{s-l_1-1,1} w_1, |p|\,||_{\widetilde{s}_1,\alpha,q,|\xi|} \leqslant c||w_1, |p|\,||_{\widetilde{s}_1+(s-l_1)q-1,\alpha,q,|\xi|} \tag{1.26}$$

при $\widetilde{s}_1 \geqslant 0,\ \ s \geqslant p_1 + 1$.

Используя (1.26) в правой части (1.25), устанавливаем оценку (1.23).

Лемма 1.5. Пусть $\widetilde{s}_1 \geqslant 0$ — действительное число, $s > 2$ – целое число, выполнено условие 1 (с заменой s на $s + \widetilde{s}_1$), функции $\lambda_i(p,t,\xi,\eta),\ \ i = 1,2,...,r_3$ удовлетворяют оценкам (13). Тогда для оператора $\widetilde{I}_{s,r_3}(w_1,...,w_{r_3})$, определённого в (1.8)–(1.9), при произвольной функции $w_1(\xi,t) \in \widetilde{H}_{\widetilde{s}_1+(s+1)q,\alpha,q}(R^1_+)$ справедлива оценка

$$\left\langle \widetilde{I}_{s,r_3}(w_1,...,w_{r_3}), |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} \leqslant c||w_1,|p|\,||_{\widetilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,q,|\xi|}, \tag{1.27}$$

где функции $w_j,\ j = 2,...,r_3$ определяются по функции $w_1(\xi,t)$ с помощью формулы (1.2), постоянная $c > 0$ не зависит от ξ и функции w_1.

Доказательство. Воспользуемся для доказательства (1.27) методом математической индукции по числу r_3. При $r_3 = 1$ справедливость неравенства (1.27) вытекает из леммы 1.4.

Предположим, что оценка (1.27) справедлива при некотором $r_3 = j-1 \geqslant 1$ и покажем, что она справедлива и при $r_3 = j$. Учитывая формулу (1.8), получим

$$\left\langle \widetilde{I}_{s,j}(w_1,...,w_j), |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} \leqslant \left\langle \widetilde{I}_{s,j-1}(w_1,...,w_{j-1}), |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} +$$
$$+ \sum\nolimits'_{j,s-1} \left\langle \lambda_1^{l_1}(p,\xi,0)\cdot ...\cdot \lambda_j^{l_j}(p,\xi,0) M_{s-|l|_j-j,j} w_j|_{t=0}, |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}}, \tag{1.28}$$

где $\sum'_{j,s-1}$; $\ |l|_j$ определены в (1.6).

Оценивая последнюю сумму в правой части (1.28) с помощью свойств коммутаторов, установленных в работе [10] и неравенства Коши–Буняковского, устанавливаем с учётом (1.26) неравенство

$$\left\langle \lambda_1^{l_1}(p,\xi,0)\cdot ...\cdot \lambda_j^{l_j}(p,\xi,0) M_{s-|l|_j-j,j} w_j\Big|_{t=0}, |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant c||w_j,|p|\,||_{\widetilde{s}_1+q+(s-j+1)q-1,\alpha,q,|\xi|} \leqslant c_1||w_1,|p|\,||_{\widetilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,q,|\xi|}.$$

Используя последнее неравенство в правой части (1.28), находим с учётом предположения индукции оценку (1.27).

Лемма 1.6. Пусть $\widetilde{s}_1 \geqslant 0$ — действительное число, $s \geqslant 1$ — целое число, $w_1(\xi,t) \in \widetilde{H}_{\widetilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,|\xi|}(R^1_+)$. Тогда для оператора $\widetilde{E}_{s,l}(\xi)$ справедлива оценка

$$\left\langle \sum_{l=1}^{r_3} \widetilde{E}_{s,l}(\xi) w_l|_{t=0}, |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} \leqslant c||w_1,|p|\,||_{\widetilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,q,|\xi|}, \tag{1.29}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ и функции w_1; величины $\widetilde{E}_{s,l}(\xi)$ определены в (1.15).

Доказательство. С помощью формулы Тейлора устанавливаем неравенство $|z_i(p,\xi,\sqrt{-1}) - z_i(p,\xi,0)| \leqslant c(|p|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}$ для любого $\xi \in R^{n-1}$.

Отсюда и из (1.14)–(1.15) выводим

$$\left\langle \sum_{l=1}^{r_3} \widetilde{E}_{s,l}(\xi) w_l|_{t=0}, |p| \right\rangle_{\widetilde{s}_1+\frac{q}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant c\sum_{l=1}^{r_3} \langle w_l|_{t=0}, |p|\rangle_{\widetilde{s}_1+(s+1-l)q+\frac{q}{2}-1} \leqslant c_1 \sum_{l=1}^{r_3} ||w_l,|p|\,||_{\widetilde{s}_1+(s+2-l)q-1,\alpha,q,|\xi|}.$$

Из последнего неравенства получаем с помощью (1.2) оценку (1.29).

Рассмотрим операторы

$$R_i(w_1,...,w_{r_3})=\sum_{s=0}^{\mu_i}\Lambda^0_{i,s}(p,\xi)(\widetilde{I}_{s,r_3}(w_1,...,w_{r_3})+\sum_{l=1}^{r_3}\widetilde{E}_{s,l}(\xi)w_l(\xi,0)), \tag{1.30}$$

где операторы $\widetilde{I}_{s,r_3}$, $\widetilde{E}_{s,l}$, $\Lambda^0_{i,s}$ определены соответственно в (1.8), (1.15), (1.16), $i=1,2,...,r_3$.

Следствие 1.2. При выполнении условий леммы 1.5 для оператора $R_i(w_1,...,w_{r_3})$ справедлива оценка

$$\langle R_i(w_1,...,w_{r_3}),|p|\rangle_{\widetilde{s}_1-m_i-\frac{q}{2}}\leqslant c||w_1,|p|\,||_{\widetilde{s}_1-1,\alpha,q,|\xi|}, \tag{1.31}$$

где $\widetilde{s}_1\geqslant m_i+q$ — действительное число, постоянная $c>0$ не зависит от w_1, ξ,p.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что из (1.30) вытекает неравенство

$$\langle R_i,|p|\rangle_{\widetilde{s}_1-m_i-\frac{q}{2}}\leqslant c\sum_{s=0}^{\mu_i}\left\{\left\langle \widetilde{I}_{s,r_3},|p|\right\rangle_{\widetilde{s}_1-qs-\frac{q}{2}}+\sum_{l=1}^{r_3}\left\langle \widetilde{E}_{s,l}(\xi)w_l|_{t=0},|p|\right\rangle_{\widetilde{s}_1-qs-\frac{q}{2}}\right\}.$$

Применив теперь в правой части последнего неравенства оценки (1.27), (1.29) получим искомое неравенство (1.31).

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗАТОРА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

Пусть $z_i(p,t,\xi,\eta)$ $(i=1,2,...,k)$ — z–корни уравнения (11). Тогда из условия 3 следует, что функции $\lambda_i(p,t,\xi,\eta)=z_i(p,t,\xi,\eta+\sqrt{-1})$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 2.1 Функции $\lambda_i(p,t,\xi,\eta)$ принадлежат $C^\infty(R^n)$ и при всех $t\in R^1_+$, $(\xi,\eta)\in R^n$, $|\xi|+|\eta|>0$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$ справедливы неравенства

$$\left|\partial^j_\eta\lambda_i(p,t,\xi,\eta)\right|\leqslant c_1(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(q-j)},\ \ i=1,\ 2,...,\ k,\ \ j=0,\ 1,\ 2,...,$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i(p,t\xi,\eta)\geqslant c_2(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}q},\ \ i=r_3+1,...,k,$$

$$-\operatorname{Re}\lambda_i(p,t,\xi,\eta)\geqslant c_3(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}q},\quad i=1,\ ...,\ r_3,$$

где постоянные $c_i>0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ не зависят от (p,t,ξ,η).

По функциям $\lambda_i(p,t,\xi,\eta)$, $i=1,2,...,k$ построим операторы $\widetilde{A}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)$ с помощью формулы (1.1). Обозначим

$$\widehat{A}_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=F^{-1}_{\xi\to x}[\widetilde{A}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)].$$

Обозначим через $\widehat{R}_j(W_{j+1},\Psi_j)$, $j=1,2,...,\ r_1$ — регуляризатор задачи

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{A}_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)W_j(x,t)=W_{j+1}(x,t)\\ W_j\ (x,t)|_{t=0}=\psi_j(x);\ \lim\limits_{t\to+\infty}W_j(x,t)=0,\end{array}\right. \tag{2.1}$$

а через $\widehat{R}_j(W_{j+1})$, $\quad j=r_1+1,...,k$ — регуляризатор задачи

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{A}_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)W_j(x,t)=W_{j+1}(x,t)\\ \lim\limits_{t\to+\infty}W_j(x,t)=0.\end{array}\right. \tag{2.2}$$

Операторы $\widehat{R}_j, \quad j = 1, ..., k$ существуют в силу результатов. Доказанных в [11].

Доказательство теоремы 1. Правый регуляризатор задачи (8), (10), будем искать в виде

$$\widehat{R}(F, \vec{G}) = W_1(x, t), \tag{2.3}$$

где $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+)$, $\vec{G} = (G_1, G_2, .., G_{r_3})$, $G_i(x) \in H_{s-m_i-\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$, $i = 1, 2, ..., r_3$, а функция $W_1(x,t)$ находится по формулам

$$W_j(x,t) = \widehat{R}_j(W_{j+1}(x,t), \Psi_j(x)), \quad j = 1, ..., r_3, \tag{2.4}$$

$$W_j(x,t) = \widehat{R}_j(W_{j+1}(x,t)), \quad j = r_3 + 1, ..., k, \tag{2.5}$$

$$W_{k+1} = F(x,t), \tag{2.6}$$

где функции Ψ_j, $j = 1, ..., r_3$ будут указаны ниже. Обозначим $w_j(\xi, t) = F_{x\to\xi}[W_j(x,t)]$, $\psi_j(\xi) = F_{x\to\xi}[\Psi_j(x)]$, $g_i(\xi) = F_{x\to\xi}[G_i(x)]$,

$$\widetilde{B}_{i,l}(p,\xi) = \frac{(|p|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}(m_j - q(l-1))}}{|\xi|^{m_i - q(l-1)}} B_{i,l}(p,\xi), \tag{2.7}$$

где функции $B_{i,l}(p,\xi)$ определены в (1.19).

Выберем теперь функции $\psi_l(\xi)$, $l = 1, 2, ..., r_3$ как решения при $|\xi| > 0$ системы

$$\sum_{l=1}^{r_1} \widetilde{B}_{i,l}(p,\xi)\psi_l(\xi) = g_i(\xi), \quad i = 1, 2, ..., r_1, \tag{2.8}$$

где $\widehat{g}_i(\xi) = g_i(\xi) - \sum\limits_{j=0}^{\mu_i} \Lambda^0_{i,j}(p,\xi)\widetilde{F}_{j,r}(w_{r_1+1})$, а функции $\widetilde{F}_{j,r}$, $\Lambda^0_{i,j}$ определены в (1.7), (1.18).

Из (2.7), условия 4 и леммы 1.3. получим, что $\det\{\widetilde{B}_{i,l}(\xi)\}^{r_1}_{i,l=1} \neq 0$ при $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \neq 0$. Значит, при каждом $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \neq 0$ существует единственное решение системы (2.8). Это решение запишем в виде

$$\psi_l(\xi) = \sum_{l=1}^{r_3} d_{l,i}(\xi)\widehat{g}_i(\xi), \quad l = 1, 2, ..., r_3. \tag{2.9}$$

Так как при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \neq 0$ справедлива оценка

$$c_1(|p|^2 + |\xi|^2)^{m_i - q(l-1)} \leqslant \left|\widetilde{B}_{i,l}(\xi)\right|^2 \leqslant c_2(|p|^2 + |\xi|)^{m_i - q(l-1)},$$

то при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \neq 0$ справедливы оценки

$$\widetilde{c}_1(|p|^2 + |\xi|)^{q(l-1) - m_i} \leqslant |d_{i,l}(\xi)| \leqslant \widetilde{c}_2(|p|^2 + |\xi|)^{q(l-1) - m_i} \tag{2.10}$$

с некоторыми константами $\widetilde{c}_1 > 0$ и $\widetilde{c}_2 > 0$.

Из (2.4)–(2.6) следует, что функция $W_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{A}_k\widehat{A}_{k-1}...\widehat{A}_1 W_1(x,t) + \widehat{T}W_1(x,t) = F(x,t), \tag{2.11}$$

где $\widehat{T}$ — оператор, порядок которого в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ не превосходит $2m - 1$ (то есть его порядок меньше порядка оператора $\widehat{A}_k\widehat{A}_{k-1}...\widehat{A}_1$)

Причём, $\lim\limits_{t\to+\infty} W_1(x,t) = 0$.

Из (1.13), (1.17), (1.18) и (2.7) получим

$$B_i^0(p,\xi,\partial_t)\; w_1(\xi,t)|_{t=0} = \sum_{l=1}^{r_3} \widetilde{B}_{i,l}(p,\xi)\psi_l(\xi)+$$
$$+\sum_{l=1}^{r_3}(B_{i,l}(p,\xi)-\widetilde{B}_{i,l}(p,\xi))\psi_l(\xi)+\sum_{j=0}^{\mu_i}(\widetilde{I}_{j,r_1}(w_1,w_2,....,\,w_{r_3})+$$
$$+\widetilde{F}_{j,r_3}(w_{r_3+1})+\sum_{l=1}^{r_3}\widetilde{E}_{i,l}(\xi)\Lambda^0_{i,j}(p,\xi).$$

Отсюда и из (2.10) получим

$$B_i^0(p,\xi,\partial_t)\; w_1|_{t=0} = g_i(\xi)+R_i(w_1,w_2,...,\,w_{r_3})+\sum_{l=1}^{r_3}(B_{i,l}(p,\xi)-\widetilde{B}_{i,l}(p,\xi))\psi_l(\xi), \tag{2.12}$$

где оператор $R_i(w_1,w_2,...,w_{r_3})$ определен в (1.30).

Из (2.12) вытекает, что

$$B_i^0(p,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\; W_1(x,t)|_{t=0} = G_i(x)+\widetilde{T}_i(F,\vec{G}), \tag{2.13}$$

где

$$\widetilde{T}_i(F,\vec{G}) = F^{-1}_{\xi\to x}[R_i(w_1,w_2,...,\,w_{r_3})+\sum_{l=1}^{r_3}(B_{i,l}(p,\xi)-\widetilde{B}_{i,l}(p,\xi))\psi_l(\xi)]. \tag{2.14}$$

Покажем, что справедлива оценка

$$\left\|\widetilde{T}_i(F,\vec{G}),|p|\right\|_{s-m_i-\frac{q}{2}+1}\leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q}+\sum_{j=1}^{r_3}\|G_i,|p|\|_{s-m_i-\frac{q}{2}}+\|W_1,|p|\|_{s-1,\alpha,q}). \tag{2.15}$$

Действительно, из (2.7) и (1.17) с помощью формулы Тейлора выводим оценку

$$\left\|F^{-1}_{\xi\to x}[(B_{i,l}(\xi,p)-\widetilde{B}_{i,l}(\xi,p))],|p|\right\|_{s-m_1-\frac{q}{2}+1}\leqslant c\,\|\Psi_l,|p|\|_{s-q(l-1)-\frac{q}{2}}\,.$$

Отсюда и из следствия 1.2 получим

$$\left\|\widetilde{T}(F,\vec{G}),|p|\right\|_{s-m_i-\frac{q}{2}+1}\leqslant c(\|W_1(x,t),|p|\|_{s,\alpha,q}+\sum_{l=1}^{r_3}\|\Psi_l,|p|\|_{s-q(l-1)-\frac{q}{2}}). \tag{2.16}$$

Из оценки (2.16) получим с учётом (2.4) - (2.6) оценку

$$\left\|\widetilde{T}_i(F,\vec{G}),|p|\right\|_{s-m_i-\frac{q}{2}+1}\leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q}+\sum_{i=1}^{r_3}\|\Psi_i,|p|\|_{s-q(i-1)q-\frac{1}{2}q}+\|W_1,|p|\|_{s-1,\alpha,q}). \tag{2.17}$$

Применяя в правой части (2.17) равенство (2.9) и оценку (2.10), получим оценку

$$\left\|\widetilde{T}_i(F,\vec{G}),|p|\right\|_{s-m_i+1-\frac{q}{2}}\leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q}+\sum_{l=1}^{r_3}\|G_l,|p|\|_{s-m_l-\frac{1}{2}q}+$$
$$+\sum_{l=1}^{r_3}\sum_{j=0}^{\mu}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}[\Lambda^0_{l,j}(p,\xi)\widetilde{F}_{j,r_1}(w_{r_1+1})]\right\|_{s-m_l-\frac{q}{2}}+\|W_1\|_{s-1,\alpha,q}). \tag{2.18}$$

Применяя в правой части неравенства (2.18) неравенства (1.7), (2.5), (2.6) оценку (2.15).

Из (2.11), (2.13) и (2.15) следует, что оператор, построенный в (2.4)–(2.6), является правым регуляризатором задачи (2.11), (10). Отсюда получаем, что этот оператор является правым регуляризатором для задачи (8), (10). Аналогично показывается, что этот оператор является и левым регуляризатором.

Замечание 2.1. Из доказательства теоремы 1 следует, что существует регуляризатор для вырождающегося псевдодифференциального уравнения вида (2.11) при граничных условиях (10).

Доказательство теоремы 2. В теореме 1 было доказано существование такого оператора

$$\widehat{R} : H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \to H_{s,\alpha,q}(R^n_+),$$

что

$$\widetilde{A}\widehat{R}(F,\bar{G}) = (F,\bar{G}) + \widetilde{T}(F,\bar{G}),$$

где $\widetilde{A}$ — оператор, порожденный задачей (8), (10), а $\widetilde{T}$ является ограниченным оператором из $H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$ в $H_{s-2m+1,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j+1}(R^{n-1})$.

То есть $T(F,\bar{G}) = \{\widehat{T}(F,\bar{G}), \widetilde{T}_1(F,\bar{G}), ..., \widetilde{T}_{r_3}(F,\bar{G})\}$, где оператор $\widehat{T}(F,\bar{G})$ определен в (2.11), а операторы $\widetilde{T}_j(F,\bar{G}),\ j=1,2,...,r_3$ определены в (2.14).

Рассмотрим пространство $\widehat{H}^s_{\alpha,q} = H_{s,\alpha,q}(R^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{\sigma_j}(R^{n-1})$, где $\sigma_j = s - m_j - \frac{q}{2}$.

Из (2.11) и (2.15) получим оценку

$$\left\|T(F,\bar{G}), |p|\right\|_{\widehat{H}^{s-2m}_{\alpha,q}} = \left\|\widehat{T}(F,\bar{G}), |p|\right\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3} \left\langle\left\langle \widetilde{T}_j(F,\bar{G}), |p| \right\rangle\right\rangle_{s-m_j-\frac{q}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m-1,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3} \langle\langle G_j), |p|\rangle\rangle_{s-m_j-\frac{q}{2}-1} + \|w_1,|p|\|_{s-1,\alpha,q}).$$

Из результатов работы [12] следует, что при достаточно большом $p_0 > 0$ и $|p| \geqslant p_0$ справедливо неравенство

$$\left\|T(F,\bar{G}), |p|\right\|_{\widehat{H}^{s-2m}_{\alpha,q}} \leqslant c_1 \left\|(F,\bar{G}), |p|\right\|_{\widehat{H}^{s-2m-1}_{\alpha,q}} \leqslant \frac{c_2}{|p|} \left\|(F,\bar{G}), |p|\right\|_{\widehat{H}^{s}_{\alpha,q}}.$$

Так как $|p| \geqslant p_0 > 0$. То выбирая $p_0 > 0$ так, чтобы $\frac{c_2}{|p|} < \frac{1}{2}$, получим, что норма оператора $T : \widehat{H}^s_{\alpha,q} \to \widehat{H}^s_{\alpha,q}$ меньше единицы. Значит, существует обратный оператор $(I+T)^{-1} : \widehat{H}^s_{\alpha,q} \to \widehat{H}^s_{\alpha,q}$. Положим $R(F,\bar{G}) = \widehat{R}(F,\bar{G})(I+T)^{-1}$. Тогда

$$\widetilde{A}R(F,\bar{G}) = \widetilde{A}\widehat{R}(I+T)^{-1}(F,\bar{G}) = (I+T)(I+T)^{-1}(F,\bar{G}) = (F,\bar{G}).$$

Таким образом, существование решения доказано.

Кроме того, справедлива оценка

$$\left\|R(F,\bar{G}), |p|\right\|_{s-2m,\alpha,q} \leqslant c\left\|(I+T)^{-1}(F,\bar{G}), |p|\right\|_{\widehat{H}^s_{\alpha,q}} \leqslant c_1 \left\|(F,\bar{G}), |p|\right\|_{\widehat{H}^s_{\alpha,q}} \leqslant$$

$$\leqslant c_2(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_1} \langle\langle G_j), |p|\rangle\rangle_{s-m_j-\frac{q}{2}}).$$

Из этой оценки следует единственность решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук СССР. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

3. Михлин, С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

4. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

5. Олейник, О. А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник // Математический сб. — 1966. — Т. 69 (111), вып. 1. — С. 111–140.

6. Кон, Д. Некоэрцитивные краевые задачи / Д. Кон, Л. Ниренберг // Пседодифференциальные операторы : сб. науч. тр. — 1967. — С. 88–165.

7. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

8. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : Труды семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

9. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

10. Баев, А. Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 7–10.

11. Баев, А. Д. Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 461, № 1. — С. 7–9.

12. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. On some cases of degeneracy of elliptic type equations at the boundary of the domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravneniyj ellipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Oleinik O.A. On the equations of the elliptic type, which are degenerate on the boundary of the domain. [Oleinik O.A. Ob uravneniyax ellipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

3. Mikhlin S.G. Degenerate elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya]. *Vestnik Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the Leningrad State University*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

4. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the

boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

5. Oleynik O.A. On linear second order equations with nonnegative characteristic form. [Oleyjnik O.A. O lineyjnyx uravneniyax vtorogo poryadka s neotricatel'noyj xarakteristicheskoyj formoyj]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1966, vol. 69 (111), iss. 1, pp. 111–140.

6. Con D., Nirenberg L. Non-coercive boundary value problems. [b]. *o — u*, n. dary value problems / J. Kohn // Kon D., Nirenberg L. Nekoercitivnye kraevye zadachi Psedodifferencial'nye operatory Pseudodifferential operators 1967, pp. 88–165

7. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

8. Glushko V.P. The theorems of solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: Trudy seminara akad. S.L. Soboleva — Differential equations with partial derivatives. Acad seminar. S.L. Sobolev*, 1978, no. 2, pp. 49–68.

9. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

10. Baev A.D., Kovalevsky R.A. On one class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A. Ob odnom klasse psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 7–10.

11. Baev A.D., Kowalewski R.A. Boundary value problem for a class of degenerate pseudo-differential equations. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A. Kraevye zadachi dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2015, vol. 461, no. 1, pp. 7–9.

12. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Kobylinsky P.A. On degenerate high-order elliptic equations and pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A., Kobylinskiyj P.A. O vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyax vysokogo poryadka i psevdodifferencial'nyx operatorax s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 471, no. 4, pp. 387–390.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Ковалевский Ростислав Александрович, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Kovalevsky Rostislav A., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: 259608@mail.ru
Тел.: +7(951)554–45–44

Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 259608@mail.ru
Tel.: +7(951)554–45–44

Харченко Виктория Дмитриевна, студент Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
Тел.: +7900–932–70–50

Kharchenko Victoria Dmitrievna, student of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: +7900–932–70–50