УДК 539.2

НЕОДНОРОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОКУСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ДЕФЕКТОМ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОТКЛИКОМ

С. Е. Савотченко

Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова

Поступила в редакцию 26.03.2018 г.

Аннотация. Рассмотрена модель плоского дефекта с нелинейными свойствами, разделяющего среды с отрицательной нелинейностью керровского типа. В основе предложенной модели лежит одномерное нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью и нелинейным самосогласованным потенциалом. Установлено, что в среде с дефокусировкой возникают новые типы стационарных состояний, существование которых обусловлено нелинейностью дефекта. В случае, когда характеристики сред по обе стороны от дефекта одинаковы, возникают синфазные и противофазные колебательные состояния. Получены энергии таких состояний в явном аналитическом виде. Проанализированы условия существования таких состояний в зависимости от характеристик дефекта и среды. Указаны условия локализации состояний.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, граница раздела сред, плоский дефект, стационарные состояния, нелинейный дефект.

INHOMOGENEOUS STATES IN A NON-LINEAR DEFOCUSING MEDIUM GENERATED BY A DEFECT WITH NON-LINEAR RESPONSE

S. E. Savotchenko

Abstract. The model of a plane defect with non-linear properties that separates a medium with a negative Kerr nonlinearity is considered. The proposed model is based on the one-dimensional non-linear Schrödinger equation with a cubic non-linearity and a non-linear self-consistent potential. It is established that in the defocusing medium new types of stationary states are arise. The existence of such states is due to the non-linear response of the defect. The in-phase and anti-phase vibration states arise in the case of the same media characteristics at the both sides from interface. The energy of such states is obtained in an explicit analytical form. The conditions for the existence of such states are analyzed depending on the characteristics of the defect and the medium. The conditions of states localization are derived.

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, media boundary, plane defect, stationary states, nonlinear defect.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования особенностей распространения волн, образования локальных состояний и пространственно-неоднородных состояний типа сверхрешеток в нелинейных средах с дефектами активно проводятся с теоретическими и экспериментальными методами [1–3]. Актуальность таких исследований обусловлена широким применением свойств нелинейных локализованных состояний (поверхностных волн), возникающих вдоль границ раздела сред с различными физическими характеристиками, в различных электронно-оптических устройствах и оптических системах хранения данных.

Создание моделей подобных систем зачастую основано на нелинейных дифференциальных уравнениях, одним из которых является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [4]. Наиболее распространенной формой НУШ является уравнение с кубическим относительно искомого поля слагаемым, которое применятся для описания оптических сред с эффектом Керра [1], называемое керровской нелинейностью. НУШ с керровской нелинейность применяется также для описания звуковых нелинейных поверхностных волн и солитонов в кристаллах [5], возбуждений магнитной природы (поляритонов) и спиновых волн [6, 7], электронно-деформационных импульсов в молекулярных цепочках [4].

Особое значение при разработке моделей имеет анализ особенностей взаимодействия нелинейных возбуждений с границами раздела кристаллических сред. Часто модель границ представляется плоским дефектом, описываемым короткодействующим потенциалом [8, 9]. В [10] рассмотрено взаимодействие вблизи дефекта связанных солитонных состояний, относящихся к различным состояниям двухуровневой системы в нелинейных средах, а в [11] — для границы раздела линейных и нелинейных сред. В [12–14] рассмотрены особенности локализации состояний вблизи границ раздела нелинейных сред и линейной и нелинейной сред с учетом внутренней структуры дефекта.

Основной целью данной работы является нахождение новых типов нелинейных стационарных состояний и их энергии, которые неоднородно распределены в пространстве и возникают исключительно вследствие нелинейности плоского дефекта как границы раздела дефокусирующих кристаллов с керровской нелинейностью, а также анализ условий их существования.

УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим простую модель границы раздела двух дефокусирующих сред, характеризующихся отрицательной нелинейностью керровского типа. Границу будем считать тонкой, по сравнению с расстояниями локализации возмущений характеристик среды, ей создаваемыми, а также плоской. Выберем систему координат так, что бы плоскость дефекта проходила через ее начало и совпадала с плоскостью yOz перпендикулярно оси Ox. Будем рассматривать распределение вдоль оси Ox возбуждений на основе одномерной модели, описываемые одномерным НУШ:

$$i\psi_t' = -\frac{1}{2m}\psi_{xx}'' + \Omega(x)\psi + g(x)\left|\psi\right|^2\psi + U(x)\psi, \tag{1}$$

m — эффективная масса возбуждения,

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1, \ x < 0; \\ \Omega_2, \ x > 0; \end{cases}$$

$\Omega_{1,2}$ — постоянные величины. Параметр нелинейности в НУШ имеет вид:

$$g(x) = \begin{cases} g_1, \ x < 0; \\ g_2, \ x > 0. \end{cases}$$

где $g_{1,2}$ — постоянные положительные величины.

Если рассматривать только стационарные состояния с энергией E, то подстановка волновой функции в виде $\psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt)$ в (1) приводит к стационарному НУШ:

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\psi'' + \Omega(x)\psi + g(x)\left|\psi\right|^2\psi + U(x)\psi. \tag{2}$$

Как отмечалось в [8], функция ψ может описывать поля разнообразной физической природы в силу широкого использования НУШ при описании нелинейных явлений.

Для описания нелинейного отклика плоского дефекта будем использовать одномерный потенциал [2, 15–17]:

$$U(x) = \{U_0 + W_0 |\psi|^2\}\delta(x), \tag{3}$$

где $\delta(x)$ — дельта функция Дирака, U_0 — интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом, W_0 — параметр, характеризующий учет нелинейных свойств дефекта, положительное значение которого соответствует дефокусировке, а отрицательное — самофокусировке в тонком дефектном слое. Как было показано в [15], НУШ (2) с потенциалом (3) эквивалентно контактной краевой задачи для НУШ без потенциала:

$$\psi'' + 2m(E - \Omega(x) - g(x) |\psi|^2)\psi = 0, \tag{4}$$

с двумя граничными условиями сопряжения в точке $x = 0$:

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi_0, \tag{5}$$

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = 2m\psi_0 \left\{U_0 + W_0 |\psi_0|^2\right\}. \tag{6}$$

Интегрирование обеих частей уравнения (2) с потенциалом (3) по x на малом интервале получить нелинейное граничное условие (6).

При положительной и всюду постоянной нелинейности g в различных энергетических диапазонах существуют два частных решения НУШ ($\Omega(x) \equiv 0$), соответствующих локализованным состояниям [4]:

1) при $E < 0$: $\psi(x) = q(mg)^{-1/2}/\operatorname{sh} q(x - x_0)$, $q^2 = -2mE$,

2) при $E > 0$: $\psi(x) = q(mg)^{-1/2} \operatorname{th} q(x - x_0)$, $q^2 = mE$.

В присутствие простого точечного дефекта локализованные состояния, порожденные первым решением, были рассмотрены в [8], а вторым — в [11].

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В СРЕДЕ С ДЕФОКУСИРУЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Положим:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x < 0, \\ \psi_2(x), & x > 0. \end{cases}$$

В дефокусирующей среде при значениях энергии $E > \max\{\Omega_1, \Omega_2\}$ НУШ (4) имеет пространственно-периодическое решение в виде:

$$\psi_j(x) = A_j \mathrm{sn}(q_j(x - x_j), k), \tag{7}$$

где k — модуль эллиптической функции sn ($0 < k < 1$). Здесь и далее значение индекса $j = 1$ соответствует величинам, относящимся к характеристикам кристалла слева от плоскости дефекта при $x < 0$, а значение индекса $j = 2$ — справа от плоскости дефекта при $x > 0$.

Подстановка решения (7) в уравнение (4) позволяет получить выражения для волновых чисел и амплитуд в виде:

$$q_j^2 = 2m(E - \Omega_j)/(1 + k^2), \tag{8}$$

$$A_j^2 = q_j^2/(mg_j), \tag{9}$$

Подстановка решения (7) в условие непрерывности (5) приводит к выражению:

$$\eta q_1 \mathrm{sn}(q_1 x_1, k) = q_2 \mathrm{sn}(q_2 x_2, k), \tag{10}$$

где $\eta^2 = g_2/g_1$.

Подстановка решения (7) в нелинейное граничное условие (6) приводит к выражению:

$$D_2 - D_1 = mU_0 + W_0 q_1^2 \mathrm{sn}^2(q_1 x_1, k)/g_1, \tag{11}$$

где

$$D_j = k_1 q_j \mathrm{cn}(q_j x_j, k)/\mathrm{cn}(q_j x_j + K(k), k)/2,$$

$K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $k_1^2 = 1 - k^2$ — дополнительный модуль эллиптических функций.

Пару соотношений (10) и (11) далее будем называть дисперсионными. К примеру, из (10) можно определить, например x_2, и подставить в (11), тем самым исключив его. Тогда из (11) находится энергия как функция параметров системы: $E = E(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_1, k)$. В результате после нахождения E из (10) определяется x_2 как функция параметров системы: $x_2 = x_2(m, U_0, W_0, \gamma_{1,2}, \Omega_{1,2}, x_1, k)$. Поэтому в общем случае (7) является двухпараметрическим решением НУШ с двумя свободными параметрами, в качестве которых выбраны k и x_1.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В явном виде можно получить энергию стационарного состояния в различных частных случаях.

1) Одинаковые все параметры сред слева и справа от границы раздела: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ и $g_1 = g_2 = g$.

Тогда из (8) следует, что $q_1 = q_2 = q$. В этом случае возможны два типа состояний: синфазные при $\eta = 1$ ($A_1 = A_2$) и когда $x_2 = x_1 = x_0$, и противофазные при $\eta = -1$ ($A_1 = -A_2$) и когда $x_2 = -x_1 = x_0$. Заметим, что возможность наличия противоположных знаков параметра η (амплитуд) следует из (10).

1.1) Сначала рассмотрим синфазные состояния ($A_1 = A_2$ и $x_2 = x_1 = x_0$), для которых из (11) получается дисперсионное соотношение:

$$mgU_0/W_0 = -q^2 \mathrm{sn}^2(qx_0, k). \tag{12}$$

Следует отметить, что при W_0 0 такого вида состояние не существует. Следовательно, существование состояния рассматриваемого вида обусловлено исключительно нелинейным откликом дефекта.

Из (12) в явном аналитическом виде энергию можно найти в “длинноволновом” приближении при $qx_0 << 1$. Условие “длинноволнового” приближения означает близость энергии возбуждения к краю спектра, когда выполняется требование $|E - \Omega| << (1 + k^2)/2mx_0^2$. В пределе в основном приближении из (12) получается:

$$q = (-mgU_0/W_0 x_0^2)^{1/4}. \tag{13}$$

Подстановка (13) в (8) позволяет получить энергию в явном виде:

$$E = \Omega + \frac{(1 + k^2)}{2x_0} \left(-\frac{gU_0}{mW_0} \right)^{1/2}. \tag{14}$$

Амплитуда “длинноволновых” синфазных колебаний дефекта определяется выражением:

$$\psi_0 = (-U_0/W_0)^{1/2}. \tag{15}$$

Следовательно, что такое состояние возможно только при противоположных знаках параметров дефекта U_0 и W_0.

1.2) Теперь рассмотрим противофазные состояния ($A_1 = -A_2$ и $x_2 = -x_1 = x_0$), для которых из (12) получается дисперсионное соотношение:

$$k_1 q \mathrm{cn}(qx_0, k)/\mathrm{cn}(qx_0 + K(k), k) = mU_0 + W_0 q^2 \mathrm{sn}^2(qx_0, k)/g. \tag{16}$$

В "длинноволновом" приближении при $qx_0 << 1$ из (16) получается:

$$q = \{-g(1 + mx_0 U_0)/W_0 x_0^3\}^{1/4}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что такое состояние возможно при выполнении одной из пар условий: 1) $U_0 > -1/mx_0$, $W_0 x_0 < 0$, 2) $U_0 < -1/mx_0$, $W_0 x_0 > 0$.

Подстановка (16) в (8) позволяет получить энергию в явном виде:

$$E = \Omega + \frac{(1+k^2)}{2m}\left(-\frac{g(1+mU_0x_0)}{W_0x_0^3}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Амплитуда длинноволновых колебаний дефекта:

$$\psi_0 = \left(-\frac{(1+mU_0x_0)}{mW_0x_0}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

В отличие от состояния с энергией (14), состояние с энергией (17) может возникать как при различных, так и при одинаковых знаках обоих параметров дефекта U_0 и W_0.

2) Одинаковые параметры сред $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, но нелинейности теперь слева и справа от плоскости дефекта различны: $g_1 \neq g_2$.

В этом случае возможны несимметричные состояния, когда $x_2 \neq x_1$.

В явном аналитическом виде энергию можно найти в "длинноволновом" приближении при $q_j x_j << 1$, означающим выполнения условий $|E - \Omega_j| << (1+k^2)/2mx_j^2$. Тогда из (10) следует, что $x_2 = \eta x_1$, а из (11) получается:

$$q = (g_1\{(\eta - 1)/\eta x_1 - 2mU_0\}/2W_0 x_1^2)^{1/4}. \tag{20}$$

Подстановка (20) в (8) позволяет получить энергию в явном виде:

$$E = \Omega + \frac{(1+k^2)}{2mx_1}\left(g_1\frac{\eta(1-2mU_0x_1)-1}{2\eta W_0 x_1}\right)^{1/2}. \tag{21}$$

Амплитуда "длинноволновых" колебаний дефекта определяется выражением:

$$\psi_0 = (\{(\eta - 1)/\eta - 2mU_0\}/2mW_0)^{1/2}. \tag{22}$$

Состояние такого вида возможно при выполнении одной из пар условий: 1) $U_0 > (\eta - 1)/2m\eta x_1$, $W_0 x_1 < 0$, 2) $U_0 < (\eta - 1)/2m\eta x_1$, $W_0 x_1 > 0$.

3) Все параметры сред слева и справа от плоскости дефекта различны: $\Omega_1 \neq \Omega_2$, $g_1 \neq g_2$.

В этом случае при $x_2 \neq x_1$ в "длинноволновом" приближении из (11) можно найти энергию в явном виде:

$$E = \Omega_1^+ \Omega_0\{1 \pm (1 - \Omega_a/\Omega_0)^{1/2}\}, \tag{23}$$

где

$$\Omega_0 = g_1(\eta - 1)(1+k^2)/4m\eta W_0 x_1^3,$$
$$\Omega_a = 4\eta^2 x_1\{U_0 + 2\eta(\Omega_1 - \Omega_2)/(1+k^2)\}/(\eta - 1).$$

С учетом (23) из (10) можно получить выражение:

$$x_2 = \eta\frac{E - \Omega_1}{E - \Omega_2}, \tag{24}$$

Из (24) следует, что $x_2 > 0$. Состояния такого типа с энергией (23) могут существовать при выполнении условия $U_0 < g_1(\eta-1)^2/16m\eta^2W_0x_1^4 - 2\eta(\Omega_1-\Omega_2)/(1+k^2)$. Знаки параметров дефекта могут быть противоположными.

4) Локализация стационарного состояния при $k \to 1$.

Решение в виде (7), помимо пространственно-неоднородных периодических состояний, позволяет описать состояние, локализованное вблизи границ раздела дефокусирующих сред. При $k \to 1$ (7) переходит в решение НУШ типа кинк:

$$\psi_j(x) = A_{tj}\,\mathrm{th}(q_{tj}(x - x_j)), \tag{25}$$

где $q_j^2 \to q_{tj}^2 = m(E - \Omega_j)$, $A_j^2 \to A_{tj}^2 = q_{tj}^2/mg_j$. Дисперсионные соотношения (10) и (11) в пределе $k \to 1$ для локализованных состояний принимают вид:

$$\eta q_{t1}\,\mathrm{th}\,q_{t1}x_1 = \mathrm{th}\,q_{t2}x_2, \tag{26}$$

$$q_{t1}/\,\mathrm{sh}\,2q_{t1}x_1 - q_{t2}/\,\mathrm{sh}\,2q_{t2}x_2 = mU_0 + W_0q_{t1}^2\,\mathrm{th}^2\,q_{t1}x_1/g_1, \tag{27}$$

Дисперсионные соотношения (26) и (27) определяют энергию локализованного состояния, описываемого функцией (26).

Из (26) и (27) в случае, когда все параметры сред слева и справа от границы раздела одинаковы для синфазных колебаний ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, $g_1 = g_2 = g$ и $x_2 = x_1 = x_0$), получается дисперсионное уравнение:

$$mgU_0 = -W_0q_t^2\,\mathrm{th}^2\,q_tx_0. \tag{28}$$

Из (27) следует, что локализация стационарного состояния такого вида может происходить только при противоположных знаках параметров дефекта U_0 и W_0.

В “длинноволновом” приближении при $q_tx_0 << 1$ из (27) получается, что величина q_t определяется выражением (13), и тогда энергия локализованного состояния будет иметь вид:

$$E = \Omega + (-gU_0/mW_0)^{1/2}/x_0. \tag{29}$$

Следует отметить, что (29) получается напрямую из (14) при $k = 1$.

Амплитуда “длинноволновых” локальных синфазных колебаний дефекта определяется выражением (15).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках рассмотренной в данной работе модели удалось получить новые типы стационарных состояний, существование которых в нелинейной дефокусирующей среде с простым дефектом без нелинейного отклика не возможно. Новый тип состояний возникают в случае, когда знаки параметров дефекта U_0 и W_0 противоположные. Физически это означает, что в дефокусирующей среде с керровской нелинейностью пространственно-неоднородное периодическое состояние нового типа возникает в случае притягивающего дефекта ($U_0 < 0$) с дефокусирующей нелинейности дефекта ($W_0 > 0$) или отталкивающего дефекта ($U_0 > 0$) с самофокусирующей нелинейностью дефекта ($W_0 < 0$). Для других видов состояний знаки параметров дефекта могут быть различными.

Следует отметить принципиальное отличие кристаллов с дефокусировкой от кристаллов с самофокусировкой: в них для пространственно-неоднородных периодических состояний не могут равняться нулю параметры x_j, характеризующие распределение положения максимумов амплитуд возмущения в пространстве.

Полученные в данной работе результаты дополняют исследования, проведенные в [15–17], и могут найти применение при разработке электронных и оптических систем, имеющих слоистую структуру и использующих управляющие свойства границ раздела слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалаке, Д. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах / Д. Михалаке, Р. Г. Назмитдинов, В. К. Федянин // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1989. — Т. 20, № 1. — С. 198–253.

2. Sukhorukov, A. A. Nonlinear Localized Waves in a Periodic Medium / A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar // Physical Review Letters. — 2001. — V. 87, iss. 8. — P. 083901.

3. Нелинейные поверхностные волны на границе фоторефрактивного кристалла / Б. А. Усиевич, Д. Х. Нурлигареев, В. А. Сычугов и др. // Квантовая электроника. — 2010. — Т. 40, № 5. — С. 437–440.

4. Давыдов, А. С. Солитоны в молекулярных системах / А. С. Давыдов. — Киев : Наукова думка, 1984. — 288 с.

5. Самоиндуцированные нелинейные сдвиговые поверхностные акустические волны в кристаллах / В. И. Горенцвейг, Ю. С. Кившарь, А. М. Косевич, Е. С. Сыркин // ФНТ. — 1990. — Т. 16. — С. 1472–1482.

6. Дикштейн, И. Е. Нелинейные самолокализованные поверхностные магнитные поляритоны в ферромагнитной среде / И. Е. Дикштейн, Д. С. Никитов, С. А. Никитов // Физика твердого тела. — 1998. — Т. 40, № 10. — С. 1885–1889.

7. Герасимчук, И. В. Нелинейное уравнение Шредингера для описания малоамплитудных спиновых волн в многослойных магнитных материалах / И. В. Герасимчук, Ю. И. Горобец, В. С. Герасимчук // Journal of nano- and electronic physics. — 2016. — Т. 2. — С. 02020–1–7.

8. Kivshar, U. S. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces / U. S. Kivshar, A. M. Kosevich, O. A. Chubykalo // Phys. Rev. A. — 1990. — V. 41, № 3. — P. 1677–1688.

9. Богдан, М. М. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами / М. М. Богдан, И. В. Герасимчук, А. С. Ковалев // ФНТ. — 1997. — Т. 23, № 2. — С. 197–207.

10. Савотченко, С. Е. Взаимодействие локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред / С. Е. Савотченко // Конденсированные среды и межфазные границы. — 2017. — Т. 19, № 2. — С. 291–295.

11. Савотченко, С. Е. Связанные солитонные состояния и локализация кноидальных волн на границе раздела нелинейной и линейной сред / С. Е. Савотченко // ЖТФ. — 2017. — Т. 62, № 12. — С. 1776–1781.

12. Савотченко, С. Е. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой / С. Е. Савотченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 51–59.

13. Савотченко, С. Е. Локализованные состояния в дефокусирующей нелинейной среде с дефектом с внутренней структурой / С. Е. Савотченко // Научные ведомости БелГУ. Сер. : Математика. Физика. — 2017. — № 20(269). — С. 79–85.

14. Савотченко, С. Е. Локализация возбуждений вблизи тонкой прослойки с внутренней структурой между линейным и нелинейным кристаллами / С. Е. Савотченко // ЖЭТФ. — 2018. — Т. 153, № 2. — С. 339–348.

15. Gerasimchuk, I. V. Локализованные состояния вблизи нелинейного оптического волновода / I. V. Gerasimchuk // Journal of nano- and electronic physics. — 2012. — V. 4, № 4. — P. 04024–1–4.

16. Gerasimchuk, I. V. Localized states in a nonlinear medium containg a planr defect layer with nonlinear properties / I. V. Gerasimchuk, P. K. Gorbach, P. P. Dovhopolyi // Ukr. J. Phys. — 2012. — V. 57, № 6. — P. 678–683.

17. Герасимчук, И. В. Локализованные состояния и их устойчивость в ангармонической

среде с нелинейным дефектом / И. В. Герасимчук // ЖЭТФ. — 2015. — Т. 121, № 4. — С. 596–605.

REFERENCES

1. Mihalake D., Nazmitdinov R.G., Fedjanin V.K. Nonlinear optical waves in layered structures. [Mihalake D., Nazmitdinov R.G., Fedjanin V.K. Nelinejnye opticheskie volny v sloistyh strukturah] Fizika jelementarnyh chastic i atomnogo jadra]. *Fizika elementarnyx chastic i atomnogo yadra — Physics of elementary particles and the atomic nucleus*, 1989, vol. 20, no. 1, pp. 198–253.

2. Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S. Nonlinear Localized Waves in a Periodic Medium. Physical Review Letters, 2001, vol. 87, iss. 8, pp. 083901.

3. Usievich B.A., Nurligareev D.H., Sychugov V.A., Ivleva L.I., Lykov P.A., Bogodaev N.V. Nonlinear surface waves on the boundary of a photorefractive crystal. [Usievich B.A., Nurligareev D.H., Sychugov V.A., Ivleva L.I., Lykov P.A., Bogodaev N.V. Nelinejnye poverhnostnye volny na granice fotorefraktivnogo kristalla]. *Kvantovaja jelektronika — Quantum Electronics*, 2010, vol. 40, no. 5, pp. 437–440.

4. Davydov A.S. Solitons in molecular systems. [Davydov A.S. Solitony v molekuljarnyh sistemah]. Kiev: Naukova Dumka, 1984, 288 p.

5. Gorentsveig V.I., Kivshar Yu.S., Kosevich A.M., Syrkin E.S. Self-induced nonlinear shear surface acoustic waves in crystals. [Gorencvejg V.I., Kivshar' Ju.S., Kosevich A.M., Syrkin E.S. Samoinducirovannye nelinejnye sdvigovye poverhnostnye akusticheskie volny v kristallah]. *Fizika nizkih temperatur — Low Temperature Physics*, 1990, vol. 16, pp. 1472–1482.

6. Dikshtein I.E., Nikitov D.S., Nikitov S.A. Nonlinear self-localized surface magnetic polaritons in a ferromagnetic medium. [Dikshtejn I.E., Nikitov D.S., Nikitov S.A. Nelinejnye samolokalizovannye poverhnostnye magnitnye poljaritony v ferromagnitnoj srede]. *Fizika tverdogo tela — Solid State Physics*, 1998, vol. 40, no. 10, pp. 1885–1889.

7. Gerasimchuk I.V., Horobets Yu.I., Gerasimchuk V.S. Nonlinear Schrödinger equation for describing low-amplitude spin waves in multilayer magnetic materials. [Gerasimchuk I.V., Gorobec Ju.I., Gerasimchuk V.S. Nelinejnoe uravnenie Shredingera dlja opisanija maloamplitudnyh spinovyh voln v mnogoslojnyh magnitnyh materialah]. *Journal of nano- and electronic physics — Journal of nano- and electronic physics*, 2016, vol. 2, pp. 02020–1–7.

8. Kivshar U.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces. Phys. Rev. A, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 1677–1688.

9. Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Dynamics and stability of localized modes in nonlinear media with point defects. [Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. Dinamika i ustojchivost' lokalizovannyh mod v nelinejnyhsredah s tochechnymi defektami]. *Fizika nizkih temperatur — Low Temperature Physics*, 1997, vol. 23, no. 2, pp. 197–207.

10. Savotchenko S.E. The localized states interaction near the nonlinear media interface. [Savotchenko S.E. Vzaimodejstvie lokalizovannyh sostojanij vblizi granicy razdela nelinejnyh sred] Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy]. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy — Condensed media and interphases*, 2017, vol. 19, no. 2, pp. 291–295.

11. Savotchenko S.E. Coupled soliton states and localization of cnoidal waves at the interface between nonlinear and linear media. [Savotchenko S.E. Svjazannye solitonnye sostojanija i lokalizacija knoidal'nyh voln na granice razdela nelinejnoj i linejnoj sred]. *Zhurnal texnicheskoyj fiziki — Technical physics*, 2017, vol. 62, no. 12, pp. 1776–1781.

12. Savotchenko S.E. Peculiarities of localization of nonlinear excitations near the defect with an internal structure. [Savotchenko S.E. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh vozbuzhdenij vblizi defekta s vnutrennej strukturoj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 51–59.

13. Savotchenko S.E. Localized states in a defocusing nonlinear medium with a defect with

internal structure. [Savotchenko S.E. Lokalizovannye sostojanija v defokusirujushhej nelinejnoj srede s defektom s vnutrennej strukturoj]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ser.: Matematika. Fizika — Scientific bulletins of BelSU. Ser.: Mathematics. Physics*, 2017, no. 20(269), pp. 79–85.

14. Savotchenko S.E. Localization of excitations near a thin interlayer with an internal structure between linear and nonlinear crystals. [Savotchenko S.E. Lokalizacija vozbuzhdenij vblizi tonkoj proslojki s vnutrennej strukturoj mezhdu linejnym i nelinejnym kristallami]. *Zhurnal eksperimental'noyj i teoreticheskoyj fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2018, vol. 153, no. 2, pp. 339–348.

15. Gerasimchuk I.V. Localized states near a nonlinear optical waveguide. [Gerasimchuk I.V. Lokalizovannye sostojanija vblizi nelinejnogo opticheskogo volnovoda]. *Journal of nano- and electronic physics — Journal of nano- and electronic physics*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 04024–1–4.

16. Gerasimchuk I.V., Gorbach P.K., Dovhopolyi P.P. Localized states in a nonlinear medium containg a planr defect layer with nonlinear properties. Ukr. J. Phys., 2012, vol. 57, no. 6, pp. 678–683.

17. Gerasimchuk I.V. Localized states and their stability in an anharmonic medium with a nonlinear defect. [Gerasimchuk I.V. Lokalizovannye sostojanija i ih ustojchivost' v angarmonicheskoj srede s nelinejnym defektom]. *Zhurnal eksperimental'noyj i teoreticheskoyj fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2015, vol. 121, no. 4, pp. 596–605.

Савотченко Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Белгородского государственного технологического университета имени В. Г. Шухова, г. Белгород, Российская Федерация
E-mail: savotchenkose@mail.ru

Savotchenko Sergey Evgenyevich, PhD (Doctor of Physics and Mathematics), Professor of High Mathematics Department of Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russian Federation
E-mail: savotchenkose@mail.ru