УДК 517

О СКОРОСТИ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ И СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ*

С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина, М. В. Шаброва

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 05.10.2016 г.

Аннотация. В работе получена скорость роста собственных значений одной спектральной задачи с производными по мере и спектральным параметром при второй производной. Эта задача возникает при нахождении критических нагрузок сжатого стержня, находящегося под воздействием не только внешней сжимающей силы, но и под собственным весом. Кроме того, стержень помещен во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения. Анализ задачи опирается на поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным, и показавший свою эффективность при изучении не только линейных граничных задач второго и четвертого порядков, но и нелинейных.

Ключевые слова: математическая модель, спектр, собственное значение, граничная задача, спектральная задача, скорость роста.

ON THE RATE OF GROWTH OF THE EIGENVALUES OF ONE SPECTRAL PROBLEM WITH DERIVATIVES OF THE MEASURE AND A SPECTRAL PARAMETER IN THE SECOND DERIVATIVE

S. A. Shabrov, N. I. Bugakova, O. M. Ilina, M. V. Shabrova

Abstract. In the article rate of eigenvalues of one spectral problem with derivatives of measure and spectral parameter at the second derivative is obtained. This problem arises when finding the critical loads of the compressed rod, which is under the influence of not only the external compressive force, but also under its own weight. In addition, the rod is placed in an external environment with localized features leading to loss of smoothness in the solution. The analysis of the problem is based on the flow-based approach, which is proposed by Pokorny, and shows its effectiveness in the study of linear boundary problems of the second and fourth orders, but also nonlinear.

Keywords: mathematical model, spectrum, eigenvalue, boundary value problem, spectral problem, the velosity of growth.

В работе [1] изучены некоторые свойства собственных значений математической модели

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = -\lambda u''_{x\sigma}, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при нахождении критических нагрузок сжатого стержня, находящегося под воздействием не только внешней сжимающей силы, но и под собственным весом. Кроме

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

того, стержень помещен во внешнюю среду, локальный коэффициент которой dQ, $u(x)$ — отклонение от положения равновесия, λ — критическая сила. Наличие локализованных особенностей внешней среды приведет к потере гладкости у решения. Проблемы, которые возникают в этом случае мы преодолеем, используя концепцию Ю. В. Покорного, показавшей свою эффективность и при анализе математических моделей второго порядка, и при анализе математических моделей четвертого порядка, а также моделей с разрывными решениями.

Уравнение из (1) в точках $\xi \in S(\sigma)$ — множестве точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру σ, понимается следующим образом

$$\Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) - \Delta r u'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = -\lambda \Delta u'_x,$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Под решением будем (1) мы понимаем всякую функцию, удовлетворяющую граничным условиям, которая после подстановки в уравнение в (1) превращает его в тождество почти всюду (по мере σ). Решение модели (1) мы будем искать в классе непрерывно дифференцируемых на $[0;l]$ функций, квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;l]$, третья производная $(pu''_{xx})'_x(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;l]$.

Коэффициенты $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ удовлетворяют следующим условиям: 1) все они σ-абсолютно непрерывны на $[0;l]$; 2) $p(x)$ не только положительна, но и отделена от нуля, т. е. $\inf\limits_{x\in[0;l]} p(x) > 0$; 3) $Q(x)$ не убывает на $[0;l]$.

Кроме того, в работе [1] показано, что задача (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = -\lambda \int\limits_0^l K''_{ss}(x;s)u(s)\,ds, \tag{2}$$

где $K(x,s)$ — функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(l) = u'_x(l) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Собственные значения спектральной задачи (2) определяются как нули оператора Фредгольма, который в нашем случае определяется следующим образом (см, например, [2], [3])

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n, \tag{4}$$

где

$$A_n = \int\limits_0^l \ldots \int\limits_0^l \begin{vmatrix} K''_{ss}(s_1,s_1) & \ldots & K''_{ss}(s_1,s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K''_{ss}(s_n,s_1) & \ldots & K''_{ss}(s_n,s_n) \end{vmatrix} dM(s_1)\ldots dM(s_n).$$

Сходимость ряда (4) при всех λ доказывается абсолютно точно так же, как и в [2], [3]. Однако, применить схему, использованную в [3], в нашем случае нельзя, так как $K''_{ss}(x,s)$, вообще говоря, не имеет непрерывной производной по x.

В то же время, разности $K''_{ss}(s_{i+1},s_i) - K''_{ss}(s_i,s_j)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1, j = 1,2,\ldots,n)$ при некоторых $\varkappa_{ij}$, заключенными между $\inf\limits_{x,s\in[0;l]} K'''_{ssx}(x,s)$ и $\sup\limits_{x,s\in[0;l]} K'''_{ssx}(x,s)$, можно записать в следующем виде $K''_{ss}(s_{i+1},s_i) - K''_{ss}(s_i,s_j) = \varkappa_{ij}(s_{i+1}-s_i)$. Так как $K(x,s)$ — решение уравнения $Lu = \delta(x-s)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака, то $K'''_{ssx}(x,s)$ ограничена на всем квадрате $[0,l]\times[0,l]$. Поэтому, величины $\varkappa_{i,j}$ ограничены в совокупности некоторой постоянной C.

Тогда, для $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} K''_{ss}(s_1,s_1) & K''_{ss}(s_1,s_2) & \dots & K''_{ss}(s_1,s_n) \\ K''_{ss}(s_2,s_1) & K''_{ss}(s_2,s_2) & \dots & K''_{ss}(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K''_{ss}(s_{n-1},s_1) & K''_{ss}(s_{n-1},s_2) & \dots & K''_{ss}(s_{n-1},s_n) \\ K''_{ss}(s_n,s_1) & K''_{ss}(s_n,s_2) & \dots & K''_{ss}(s_n,s_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K''_{ss}(s_1,s_1) & K''_{ss}(s_1,s_2) & \dots & K''_{ss}(s_1,s_n) \\ K''_{ss}(s_2,s_1) & K''_{ss}(s_2,s_2) & \dots & K''_{ss}(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K''_{ss}(s_{n-1},s_1) & K''_{ss}(s_{n-1},s_2) & \dots & K''_{ss}(s_{n-1},s_n) \\ \varkappa_{n-1,1} & \varkappa_{n-1,2} & \cdots & \varkappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_n - s_{n-1}) = \ldots =$$

$$= \begin{vmatrix} K''_{ss}(s_1,s_1) & K''_{ss}(s_1,s_2) & \dots & K''_{ss}(s_1,s_n) \\ \varkappa_{1,1} & \varkappa_{1,2} & \cdots & \varkappa_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa_{n-2,1} & \varkappa_{n-2,2} & \cdots & \varkappa_{n-2,n} \\ \varkappa_{n-1,1} & \varkappa_{n-1,2} & \cdots & \varkappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_{n-1}).$$

Применяя теперь неравенство Адамара и оценку

$$|(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\ldots(s_n - s_{n-1})| \leqslant \left(\frac{l}{n-1}\right)^{n-1},$$

(справедливую при $n \geqslant 2$) для A_n будем иметь

$$|A_n| \leqslant C^n \cdot n^{\frac{n}{2}} (M(l) - M(0))^n \left(\frac{l}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{l}(C(M(l) - M(0))l)^n \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}}.$$

Для любого фиксированного положительного ε, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = 0$. Поэтому, при достаточно большом n (зависящем от ε), выполнено неравенство

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{l}(C(M(l) - M(0))l)^n n^{-\frac{n}{2}+\varepsilon n}. \tag{5}$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [4], [5], показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $\frac{2}{3} - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $2/3$, следовательно, для произвольности $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/3+\delta}} \tag{6}$$

сходится.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции конечного на $[0,l]$ изменения, $Q(x)$ — не убывает на $[0,l]$ и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$. Более того, пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи (1), причем каждое из них является простым. Тогда ряд* (6) *сходится при любом $\delta > 0$.*

Следует отметить, что метод поточечного подхода Ю. В. Покорного к трактовке дифференциального уравнения показал свою эффективность: построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений как для второго порядка, так и четвертого [6]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

2. Гантмахер, Ф. Р. Осциляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М. : Гос. изд. тех–теор. лит–ры, 1950. — 359 с.

3. Ловитт, У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М. : Гос. изд. тех-теор. лит–ры, 1957. — 267 с.

4. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — М. : Наука, 1980. — 464 с.

5. Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М. : Гос. изд. тех-теор. лит–ры, 1956. — 632 с.

6. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

7. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

8. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

9. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

10. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

REFERENCES

1. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoyj spektral'noyj zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nym parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

2. Gantmakher F. R., Krein M. G. Oscillating matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems. [Gantmaxer F.R., Krejn M.G. Oscilyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mexanicheskix sistem]. Moscow, 1950, 359 p.

3. Lovitt W.V. Linear integral equations. [Lovitt U.V. Linejnye integral'nye uravneniya]. Moscow, 1957, 267 p.

4. Titchmarsh E.Theory of functions. [Titchmarsh E. Teoriya funkcij]. Moscow: Nauka, 1980, 464 p.

5. Levin B. Ya. The distribution of roots of entire functions. [Levin B. Ya. Raspredelenie kornej celyx funkcij]. Moscow, 1956, 632 p.

6. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

7. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

8. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

9. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

10. Shabrov S.A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an integral Stieltjes. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

Шабров Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, doctor of physical-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90

Бугакова Надежда Игоревна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru

Bugakova Nadezhda Igorevna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru

Ильина Ольга Михайловна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru

Ilina Olga Mikhailovna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru

Шаброва Марина Вячеславовна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: koshka445@mail.ru

Shabrova Marina Vyacheslavovna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: koshka445@mail.ru