УДК 517.968.741

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

А. Д. Чернышов[1], С. Ф. Кузнецов[1], В. В. Горяйнов[2], О. В. Лешонков[1]

[1] — *Воронежский государственный университет инженерных технологий,*
[2] — *Воронежский государственный технический университет*

Поступила в редакцию 04.10.2016 г.

Аннотация. Методы решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений представляют интерес в таких областях науки и техники, как теплофизика, акустика, механика, космонавтика. К сожалению, построение решений задач такого класса связано с рядом трудностей из-за нелинейных выражений и интегралов от неизвестных функций. В работе предлагается использование нового метода – метода быстрых разложений, основанного на использовании рядов Фурье, для построения приближенного аналитического решения подобных уравнений. Предложенный подход позволяет свести нелинейную интегро-дифференциальную задачу к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. На тестовых примерах показывается эффективность такого подхода, а также оценивается влияние различных параметров уравнений и граничных условий на погрешность получаемого решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, ряд Фурье, быстрые разложения.

APPROXIMATE SOLUTION OF SOME NONLINEAR INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE RAPID EXPANSIONS METHOD

A. D. Chernyshov, S. F. Kuznetsov, V. V. Goryainov, O. V. Leshonkov

Abstract. Methods for solving nonlinear integro-differential equations are interest in such areas of science and technology as thermophysics, acoustics, mechanics, cosmonautics. Unfortunately, the construction solutions of this class is associated with a number of difficulties due to nonlinear expressions and integrals of unknown functions. The paper proposes the use of a new method - the method of rapid expansions, based on the use of Fourier series, to construct an approximate analytical solution of such equations. The proposed approach allows reducing the nonlinear integro-differential problem to solving a system of nonlinear algebraic equations. On test examples, the effectiveness of this approach is shown, and the effect of various parameters of the equations and boundary conditions on the error of the obtained solution is estimated.

Keywords: integro-differential equations, Fourier series, fast expansions.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день методы решения нелинейных интегро-дифференциальных задач [1]–[3] представляют большой интерес в различных научных областях, по причине того, что большинство исследуемых физических явлений являются линейными лишь в первом приближении. Ниже изложен способ решения подобного рода уравнений с помощью метода быстрых разложений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим одно нелинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида:

$$y'' + y'\int\limits_0^1 xydx - y^3 = \frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right) \qquad (1)$$

с начальными условиями Коши

$$y(0) = 0, \qquad (2)$$

$$y'(0) = \pi/3. \qquad (3)$$

Сложность задачи (1)–(3) обуславливается нелинейным слагаемым y^3 и произведением производной y' и определенного интеграла от неизвестной функции. Начальные условия и правая часть уравнения (1) составлены так, чтобы было известно одно точное решение задачи Коши (1)–(3), которое имеет вид $y(x) = \sin(\pi x/3)$. Это понадобится в дальнейшем для проведения оценки погрешности полученного приближенного аналитического решения.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ. ОПЕРАТОР БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Представим неизвестную функцию $y(x)$ в виде суммы специальной граничной функции M_2 — второго порядка и ряда Фурье [6]:

$$y(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{N} a_m \sin(m\pi x), \qquad (4)$$

$$M_2(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + y''(0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + y''(1)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right), \qquad (5)$$

где $y(0)$, $y(1)$, $y''(0)$, $y''(1)$, a_m, $m = 1 \div N$ — неизвестные коэффициенты быстрого разложения. Заметим, что в (5) коэффициент $y(0)$ определяется из граничного условия (2). Таким образом, задача сводится к определению следующих неизвестных:

$$y(1),\ y''(0),\ y''(1),\ a_m,\ m = 1 \div N \qquad (6)$$

В (6) $y(1)$, $y''(0)$, $y''(1)$ — коэффициенты специальной граничной функции, a_m — коэффициенты ряда Фурье для разности $y(x) - M_2(x)$, N — количество учитываемых членов в ряде. В (4) применяется специальная граничная функция M_2 — второго порядка. Согласно методу [4], величина порядка граничной функции должны быть не меньше порядка рассматриваемого уравнения. Для нахождения неизвестных из (6) подставим разложение (4) в уравнение (1):

$$y''(0)(1-x) + y''(1)x - \pi^2\sum_{m=1}^{N} a_m m^2 \sin(n\pi x) +$$

$$+\left(y(1) + y''(0)\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\right) + y''(1)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right) + \pi\sum_{m=1}^{N} a_m m\cos(n\pi x)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{y(1)}{3} - \frac{7y''(0)}{360} - \frac{y''(1)}{45} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{N}\frac{(-1)^m}{n}a_m\right) -$$

$$-\left(y(1)x+y''(0)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x}{3}\right)+y''(1)\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x}{6}\right)+\sum_{m=1}^{N}a_m\sin\left(m\pi x\right)\right)^3=$$

$$=-\frac{1}{9}\pi^2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)+\frac{-\pi+3\sqrt{3}}{2\pi}\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right)-\sin^3\left(\frac{1}{3}\pi x\right). \quad (7)$$

Разность порядка специальной граничной функции (5) и интегро-дифференциального уравнения (1) $2-2=0$ — равна нулю. Применим к (7) оператор быстрых разложений Ch_0–нулевого порядка. Для получения замкнутой нелинейной алгебраической системы относительно неизвестных, указанных в (6), согласно определению оператора Ch_0 необходимо:

1. Вычислить значения уравнения (7) на границе рассматриваемой области в точках $x=0$ и $x=1$.

2. Умножить обе части уравнения (7) на $\sin\left(p\pi x\right)$, $p=1\div N$ и проинтегрируем в пределах $x\in[0{,}1]$.

В результате получена незамкнутая система из $2+N$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $3+N$ неизвестных. Для замыкания этой системы проведем подстановку разложения (4) в граничное условие (3). Таким образом, для определения неизвестных из (6) к решению получена система нелинейных алгебраических уравнений. Её решение выполнено на ЭВМ. В таблице 1 приведены значения вычисленных коэффициентов быстрого разложения, указанных в (6) учете $N=5$ членов в ряде Фурье.

Таблица 1. *Значения коэффициентов приближенного аналитического решения задачи* (1)–(3) *при* $N=5$.

Значения коэффициентов приближенного аналитического решения задачи (1) – (3)							
$y\left(1\right)$	$y''\left(0\right)$	$y''\left(1\right)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$8.66{\times}10^{-1}$	$3.24{\times}10^{-6}$	$-9.5{\times}10^{-1}$	$7.65{\times}10^{-3}$	$-2.18{\times}10^{-4}$	$2.83{\times}10^{-5}$	$-6.68{\times}10^{-6}$	$2.16{\times}10^{-6}$

Зная точное решение, вычислим величину погрешности $\delta\left(N\right)$ при учете $N=1\div11$ членов ряда Фурье (таблица 2).

Таблица 2. *Значения погрешности приближенного аналитического решения задачи* (1)–(3) *при* $N=1\div11$.

Значения погрешности приближенного решения задачи (1) – (3)					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	$1.03{\times}10^{-3}$	$1.76{\times}10^{-4}$	$5.5{\times}10^{-5}$	$1.98{\times}10^{-5}$	$1.007{\times}10^{-5}$
6	7	8	9	10	11
$4.78{\times}10^{-6}$	$3.05{\times}10^{-6}$	$1.67{\times}10^{-6}$	$1.21{\times}10^{-6}$	$7.24{\times}10^{-7}$	$5.73{\times}10^{-7}$

Таблица 3. *Значения невязки решения задачи* (1)–(3) *при* $N=1\div11$.

Значения величины невязки задачи (1)–(3)					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	$1.12{\times}10^{-2}$	$4.12{\times}10^{-3}$	$2.1{\times}10^{-3}$	$1.27{\times}10^{-3}$	$8.53{\times}10^{-4}$
6	7	8	9	10	11
$6.11{\times}10^{-4}$	$4.59{\times}10^{-4}$	$3.57{\times}10^{-4}$	$2.86{\times}10^{-4}$	$2.34{\times}10^{-4}$	$1.95{\times}10^{-4}$

Из численного эксперимента (таблица 2) можно сделать вывод, что при $N=1\div11$ точность полученного приближенного аналитического решения быстро возрастает с увеличением членов в ряде Фурье. В таблице 3 приведены значения невязки нелинейной интегро-дифференциальной задачи (1)–(3).

На основании этих данных можно сделать вывод: для решения подобных задач методом быстрых разложений в ряде Фурье достаточно использовать несколько десятков членов в ряде Фурье для получения приближенного аналитического решения с высокой точностью.

3. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим случай, когда для уравнения (1) вместо начальных условий Коши заданы краевые условия вида:

$$y\,(0) = 0, \tag{8}$$

$$y\,(1) = \sqrt{3}/2. \tag{9}$$

Ход решения краевой задачи (1), (7), (8) аналогичен решению задачи Коши (1)–(3). В таблице 4 приведены значения погрешностей полученного решения при учете $N = 1 \div 11$ членов в ряде Фурье.

Таблица 4. *Значения погрешности приближенного решения задачи* (1), (8), (9).

Значения погрешности приближенного решения задачи (1), (8), (9) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	$2.45{\times}10^{-4}$	$3.64{\times}10^{-5}$	$9.94{\times}10^{-6}$	$3.7{\times}10^{-6}$	$1.67{\times}10^{-6}$
6	7	8	9	10	11
$8.62{\times}10^{-7}$	$4.88{\times}10^{-7}$	$2.95{\times}10^{-7}$	$1.9{\times}10^{-7}$	$1.28{\times}10^{-7}$	$8.86{\times}10^{-8}$

В таблице 5 приведены значения невязки нелинейной интегро-дифференциальной задачи (1), (7), (8).

Таблица 5. *Зависимость величины невязки задачи* (1), (7), (8) *от* N.

Значения величины невязки задачи (1), (7), (8) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	$1.11{\times}10^{-2}$	$4.11{\times}10^{-3}$	$2.1{\times}10^{-3}$	$1.27{\times}10^{-3}$	$8.53{\times}10^{-4}$
6	7	8	9	10	11
$6.11{\times}10^{-4}$	$4.59{\times}10^{-4}$	$3.57{\times}10^{-4}$	$2.86{\times}10^{-4}$	$2.34{\times}10^{-4}$	$1.95{\times}10^{-4}$

Сравнивая значения невязок из таблицы 3 и таблицы 5 можно заключить, что для уравнения (1) при заданных краевых условиях, ряды Фурье сходятся значительно быстрее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аширбаева, А. Ж. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка к решению интегрального уравнения / А. Ж. Аширбаева // Механика и технологии. — 2013. — № 1. — С. 18–24.

2. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004.

3. Кузенков, О. А. Решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / О. А. Кузенков, Е. А. Рябова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия : Математическое моделирование и оптимальное управление — 1999. — № 1. — С. 63–72.

4. Чернышов, А. Д. Быстрые ряды Фурье / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. — Воронеж, 2010. — С. 388–393.

5. Чернышов, А. Д. О применении быстрых разложений для решения нелинейных задач механики / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. — Воронеж, 2011. — С. 417–421.

6. Чернышов, А. Д. Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А. Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. — Воронеж, 2009. — Ч. 2. — С. 236–238.

REFERENCES

1. Ashirbaeva A.Zh. Reduction of a fourth-order nonlinear integro-differential equation in partial derivatives to the solution of an integral equation. [Ashirbaeva A.ZH. Svedenie nelineyjnogo integro-differencial'nogo uravneniya v chastnyx proizvodnyx chetvertogo poryadka k resheniyu integral'nogo uravneniya]. *Mexanika i texnologii — Mechanics and Technologies*, 2013, no. 1, pp. 18–24.

2. Kudryashov N.A. Analytical theory of nonlinear differential equations. [Kudryashov N.A. Analiticheskaya teoriya nelineyjnyx differencial'nyx uravneniyj]. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science, 2004.

3. Kuzenkov O.A., Ryabov E.A. Solution of a class of nonlinear partial differential equations of the first order. [Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. Reshenie odnogo klassa nelineyjnyx differencial'nyx uravneniyj v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya : Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie — Bulletin of Nizhny Novgorod University N.I. Lobachevsky. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 1999, no. 1, pp. 63–72.

4. Chernyshov A.D. Fast Fourier Series. [Chernyshov A.D. Bystrye ryady Fur'e]. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics. Collection of papers of the international conference. Voronezh, 2010, pp. 388–393.

5. Chernyshov A.D. On the application of fast expansions for solving nonlinear problems of mechanics. [Chernyshov A.D. O primenenii bystryx razlozheniyj dlya resheniya nelineyjnyx zadach mexaniki]. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics. Collection of papers of the international conference. Voronezh, 2011, pp. 417–421.

6. Chernyshov A.D. Improved Fourier series and boundary functions. [Chernyshov A.D. Uluchshennye ryady Fur'e i granichnye funkcii]. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics. Collection of papers of the international conference. Voronezh, 2009, part 2, pp. 236–238.

Чернышов Александр Данилович, профессор кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: chernyshovad@mail.ru

Chernyshov Alexander Danilovich, professor, Department of Higher Mathematics and Information Technologies, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation
E-mail: chernyshovad@mail.ru

Кузнецов Сергей Федорович, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: sfs134@mail.ru

Kuznetsov Sergey Fedorovich, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Information Technologies, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation
E-mail: sfs134@mail.ru

Горяйнов Виталий Валерьевич, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: gorvit77@mail.ru

Goryainov Vitaly Valeryevich, Assistant Professor of the Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: gorvit77@mail.ru

Лешонков Олег Владимирович, аспирант кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: leekripper@yandex.ru

Leshonkov Oleg Vladimirovich, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics and Information Technologies, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation
E-mail: leekripper@yandex.ru