УДК 517.955

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПО НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А. Ф. Тедеев

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова

Поступила в редакцию 20.09.2016 г.

Аннотация. В данной работе рассматривается поведение решения задачи Коши для дифференциального уравнения медленной диффузии со степенным вырождением по независимой переменной. Для таких решений доказывается аналог неравенства Аронсона — Бенилана, которое затем используется при доказательстве основной теоремы. При доказательстве основной теоремы используется также итеративный метод О. А. Ладыженской в сочетании с весовыми мультипликативными неравенствами типа Каффарелли — Ниренберга, которые являются обобщением неравенств Гальярдо — Ниренберга. Параметры в весовом неравенстве α, β, γ, p, q, r подобраны таким образом, чтобы при использовании итеративного метода они были согласованы с параметрами задачи m и α. Такой подбор параметров обеспечивает сходимость последовательности аппроксимирующих решений. Полученные в работе оценки позволяют расширить класс вырождающихся дифференциальных уравнений, для которых решения оцениваются в равномерной метрике.

Ключевые слова: апроксимирующие задачи, апроксимирующее решение, сильное решение, слабое решение.

PROPERTIES OF SOLUTIONS TO THE CAUCHY PROBLEM FOR A SECOND-ORDER NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERATION BY AN INDEPENDENT VARIABLE

A. F. Tedeev

Abstract. In this paper we consider the behavior of the solution of the Cauchy problem for the differential slow diffusion equation with power degeneration by an independent variable. For such solutions, an analogue of the Aronson–Benillan inequality is proved, which is then used in the proof of the main theorem. In the proof of the main theorem uses an iterative method O. A. Ladyzhenskaya, combined with the weight multiplicative inequalities of type Caffarelli–Nerenberg a generalization of the inequality of Gagliardo–Nerenberg. The parameters in the weight inequality are chosen in such a way that when using the interactive method they are consistent with the parameters of the problem. The selection of parameters ensures the convergence of the approximating solution sequence. The estimates obtained in this paper allow us to extend the class of degenerate differential equations for which the solutions are evaluated in a uniform metric.

Keywords: approximating problems, approximating solutions, weak solution, strong solution.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$, $N \geqslant 1$. Рассмотрим в области $Q = R^N \times \{t > 0\}$ задачу Коши

$$u_t = \operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla(u^m)), \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) \geqslant 0, \, x \in R^N, \tag{2}$$

где параметры m и α удовлетворяют условиям $m > 1$, $\alpha > 0$.

При $\alpha = 0$ дифференциальное уравнение (1) переходит в уравнение пористой среды. В этом случае задача (1)–(2) изучалась многими авторами. Достаточно подробный список результатов в этом направлении дается в монографии [8].

Дифференциальное уравнение вида (1) ранее рассматривалось в работах [2], [3]. В работе [2] изучалось свойство конечной скорости распространения возмущений решения задачи Дирихле в октантообразных областях, где установлена точная оценка для радиуса носителя решения. В работе [3] в зависимости от параметров m и α установлен аналог неравенства Аронсона — Бенилана при $N = 1$, а также дана оценка снизу для решения. Близкие по форме дифференциальные уравнения изучались в работах [6], [7], [9], в которых вместо множителя $|x|^\alpha$, обращающийся в нуль при $x = 0$, рассматривались невырождающиеся множители

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем понятие решения задачи (1)–(2).

Последовательность задач

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \operatorname{div}(a_n(|x|) \cdot \nabla(u_n^m)), \tag{3}$$

$$u_n(x,t)|_{t=0} = u_{0n}(x), \tag{4}$$

$$n = 1,2, \dots$$

будем называть последовательностью апроксимирующих задач для системы (1), (2), если последовательности $a_n(|x|)$ и $u_{0n}(x)$, удовлетворяют следующим условиям:

$$u_{0,n} \in C_0^\infty(R^N), \quad u_{0,n}(x) \geqslant 0, \, x \in R^N,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n(|x|) - |x|^\alpha\|_{\infty,R^N} = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{0,n} - u_0\|_{\infty,R^N} = 0. \tag{6}$$

Последовательность классических решений $u_n(x,t)$ апроксимирующих задач (3), (4) будем называть последовательностью апроксимирующих решений задачи Коши (1), (2).

Неотрицательную измеримую функцию $u(x,t)$ будем называть обощенным (или слабым) решением задачи (1), (2), если существует такая последовательность апроксимирующих решений $u_n(x,t)$ задачи (1), (2), которая для любого $T > 0$ сходится к функции $u(x,t)$ в $L^2(Q_T)$ слабо, и $\sup\limits_n \|u_n(x,t)\|_{\infty,Q_T} < \infty$. Если к тому же $u_t(x,t)$ — локально-интегрируемая функция в R^N, то функцию $u = u(x,t)$ будем называть сильным решением задачи (1), (2).

В задаче (3), (4) функции $a_n(|x|)$ и $u_{0n}(x)$ подбираются таким образом, чтобы она была классически разрешима. В частности в качестве $a_n(|x|)$ и $u_{0n}(x)$ можно выбрать функции

$$a_n(|x|) = \frac{1}{n} + |x|^\alpha, \quad \text{и} \quad u_{0n}(x) = \frac{1}{n} + u_0(x),$$

$1 < \alpha < 2$, $u_0(x) \in C_0^\infty(R^N)$.

При таком выборе функции $a_n(|x|)$ и $u_{0n}(x)$, согласно классической теории [1], при любом значении n существует классическое решение задачи (3), (4).

Для доказательства основной теоремы нам потребуется следующая лемма, которая является обобщением известного неравенства Аронсона — Бенилана [4] для $N > 1$

Лемма 1. *Если* $\{u_n(x,t)\}$ *— последовательность апроксимирующих решений задачи* (1), (2), *тогда при* $(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha > 0$, $1 < \alpha < 2$, *и для* $(x,t) \in Q_T$ *имеет место оценка*

$$u_{nt}(x,t) \geqslant -\frac{N+2-\alpha}{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha} \cdot \frac{u_n(x,t)}{t}.$$

Доказательство. В дальнейшем для удобства записи индекс n при $u_n(x,t)$ и $a_n(|x|)$ будем опускать. Итак, пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (3), (4).

Введем обозначения

$$v(x,t) = \frac{m}{m-1} \cdot u^{m-1}, \quad g(v) = \frac{m-1}{m} v, \quad \text{тогда} \quad u = g(v)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Положим далее

$$P = P(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(|x|) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \right). \tag{7}$$

Тогда

$$P_t = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(|x|)(v_t)_{x_j} \right). \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что

$$u_t \geqslant g(v)^{\frac{1}{m-1}} \cdot P(x,t), \tag{9}$$

и

$$v_t = mg(v) \cdot P + a(|x|) \cdot |\nabla v|^2. \tag{10}$$

Из равенства (10) имеем

$$(v_t)_{x_j} = (m-1)v_{x_j} \cdot P + mg(v) \cdot P_{x_j} + a(|x|)_{x_j} |\nabla v|^2 + 2a(|x|) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j},$$

умножая последнее равенство на $a(|x|)$ и дифференцируя по x_j, будем иметь

$$\begin{gathered}
\left(a(|x|)(v_t)_{x_j} \right)_{x_j} = (m-1)a(|x|)_{x_j} \cdot v_{x_j} \cdot P + (m-1)a(|x|)v_{x_j x_j} P + \\
+ (m-1)a(|x|)v_{x_j} \cdot P_{x_j} + \frac{1}{2}(a^2(|x|))_{x_j x_j} \cdot |\nabla v|^2 + \\
+ 6a(|x|) \cdot a(|x|)_{x_j} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j} + 2a^2(|x|) \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \\
+ 2a^2(|x|) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x_i x_j^2} + (m-1)v_{x_j} P_{x_j} \cdot a(|x|) + \\
+ ma(|x|)_{x_j} g(v) P_{x_j} + ma(|x|)g(v) \cdot P_{x_j x_j}.
\end{gathered}$$

Суммируя последнее равенство в пределах от 1 до N, получим

$$
\begin{gathered}
P_t = ma(|x|)g(v)\cdot\Delta P + 2(m-1)a(|x|)\cdot\nabla v\cdot\nabla P + \\
+(m-1)(\nabla a(|x|)\cdot\nabla v)\cdot P + (m-1)a(|x|)(\Delta v)P + \\
+m\cdot g(v)\cdot(\nabla a(|x|)\cdot\nabla P) + \frac{1}{2}\left(\Delta a^2(|x|)\right)\cdot|\nabla v|^2 + \\
+3\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(a^2(|x|)\right)_{x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j} + \\
+2a^2(|x|)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j}\right)^2 + 2a^2(|x|)\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial(\Delta v)}{\partial x_i}.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Используя равенства

$$
P = \nabla a(|x|)\cdot\nabla v + a(|x|)\cdot\Delta v,
$$

и

$$
\begin{gathered}
a^2(|x|)\Delta(v_{x_i}) = a(|x|)\cdot P_{x_i} - a(|x|)\cdot\sum_{j=1}^{N}\left(a(|x|)_{x_i x_j}\cdot v_{x_j} + a(|x|)v_{x_i x_j}\right) - \\
- a(|x|)_{x_i}\cdot P + a(|x|)_{x_i}\nabla(a(|x|))\cdot\nabla v
\end{gathered}
$$

из (11) получим

$$
\begin{gathered}
P_t = mag(v)\Delta P + 2ma\left(\nabla v\cdot\nabla P\right) + mg(v)(\nabla a\cdot\nabla P) - \\
-2(\nabla a\cdot\nabla v)\cdot P + (m-1)P^2 + \mathfrak{I},
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{I} = |\nabla a|^2\cdot|\nabla v|^2 + a(\Delta a)|\nabla v|^2 + 4\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a\cdot a_{x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j} + \\
+2a^2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} 2a\,a_{x_i x_j}\cdot v_{x_i}\cdot v_{x_j} + 2(\nabla a\cdot\nabla v)^2.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Оценим $\mathfrak{I}$ снизу при всех $(x,t)\in R^N\times\{t>0\}$, и при достаточно большом значении n.

Полагая в равенстве (13) $a = a(|x|) = \frac{1}{n} + |x|^\alpha$, затем, применяя неравенство Юнга к третьему слагаемому, а также имея ввиду равенства

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} 2a\,a_{x_i x_j}\cdot v_{x_i}\cdot v_{x_j} = \frac{2\alpha(\alpha-2)}{n}|x|^{\alpha-4}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j v_{x_j}\right)^2 + \\
+\frac{2\alpha}{n}|x|^{\alpha-2}|\nabla v|^2 + 2\alpha(\alpha-2)|x|^{2\alpha-4}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\cdot v_{x_j}\right)^2 + 2\alpha|x|^{2\alpha-2}\cdot|\nabla v|^2,
\end{gathered}
$$

и

$$
2(\nabla a\cdot\nabla v)^2 = 2\alpha^2|x|^{2\alpha-4}\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\cdot v_{x_j}\right)^2,
$$

для выражения $\mathfrak{I}$ получим оценку

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{I}\geqslant\left(\alpha^2|x|^{2\alpha-2} + \frac{\alpha N}{n}|x|^{\alpha-2} + \alpha N|x|^{2\alpha-2} - 2\alpha^2|x|^{2\alpha-2} - \frac{2\alpha}{n}|x|^{\alpha-2}\right)|\nabla v|^2 + \\
+\left(4\alpha|x|^{2\alpha-4} - \frac{2\alpha}{n}(\alpha-2)|x|^{\alpha-4}\right)\left(\sum_{j=1}^{N} x_j v_{x_j}\right)^2.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Из (14) в силу равенства (12) имеем оценку

$$P_t \geqslant mag(v)\Delta P + 2ma(\nabla v \cdot \nabla P) + mg(v)(\nabla a \cdot \nabla P) - 2(\nabla a \cdot \nabla v) \cdot P + \\ + (m-1)P^2 + \frac{N+2-\alpha}{\alpha} \cdot (\nabla a \cdot \nabla v)^2. \tag{15}$$

Применяя неравенство Юнга к четвертому слагаемому в (15), будем иметь

$$P_t \geqslant mag(v)\Delta P + 2ma \cdot (\nabla v \cdot \nabla P) + mg(v)(\nabla a \cdot \nabla P) + \\ + \left(m - 1 - \frac{\alpha}{N+2-\alpha}\right) P^2. \tag{16}$$

Далее, рассмотрим параболическое уравнение

$$Z_t = \mathcal{L}(Z), \tag{17}$$

где

$$\mathcal{L}(Z) = mag(v)\Delta Z + 2ma(\nabla v \cdot \nabla Z) + mg(v)(\nabla a \cdot \nabla Z) + \\ + \frac{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha}{N+2-\alpha} \cdot Z^2. \tag{18}$$

Будем искать решение параболического неравенства

$$Z_t \leqslant \mathcal{L}(Z) \tag{19}$$

в виде

$$Z = Z(x,t) = -\frac{h(v)}{t},$$

где $h(v)$ — неотрицательная, дважды непрерывно-дифференцируемая функция по переменной v.

Так как

$$Z_t = -\frac{h'(v)}{t} v_t + \frac{h(v)}{t^2} = -\frac{h'(v)}{t} v_t + \frac{1}{h(v)} Z^2, \\ Z_{x_j} = -\frac{h'(v)}{t} \cdot v_{x_j}, \\ Z_{x_j x_j} = -\frac{h''(v)}{t} v_{x_j}^2 - \frac{h'(v)}{t} \cdot v_{x_j x_j}, \tag{20}$$

то

$$Z_t - \frac{1}{h(v)} Z^2 = -\frac{h'(v)}{t} v_t. \tag{21}$$

Подставляя в (21) значение для v_t, и принимая во внимание (20) получим

$$Z_t - \frac{1}{h(v)} \cdot Z^2 = \mathcal{L}(Z) - 2ma(\nabla v \cdot \nabla z) - \frac{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha}{N+2-\alpha} \cdot Z^2 + \\ + mg(v)a|\nabla v|^2 \cdot \frac{h''(v)}{t} - a|\nabla v|^2 \cdot \frac{h'(v)}{t}. \tag{22}$$

Второе слагаемое правой части равенства (22) в силу (20) представляется в виде

$$-2ma(\nabla v \cdot \nabla Z) = 2ma \cdot |\nabla v|^2 \cdot \frac{h'(v)}{t},$$

следовательно, из (22) получим

$$Z_t - \frac{1}{h(v)} Z^2 = \mathcal{L}(Z) - \frac{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha}{N+2-\alpha} \cdot Z^2 + \\ + mg(v)a|\nabla v|^2 \cdot \frac{h''(v)}{t} + (2m-1)a|\nabla v|^2 \cdot \frac{h'(v)}{t}. \tag{23}$$

Определим функцию $h(v)$ из условий

$$\text{а) } \frac{1}{h(v)} - \frac{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha}{N+2-\alpha} \leqslant 0;$$

$$\text{б) } mg(v)h''(v) + (2m-1)h'(v) = 0.$$

Условие б) является обыкновенным дифференциальным уравнением, общее решение которого имеет вид

$$h(v) = -C_1 \cdot \frac{m-1}{m} v^{-\frac{m}{m-1}} + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Условия а) и б) выполняются при $C_1 = 0$ и $C_2 = \frac{N+2-\alpha}{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha}$.

Следовательно, на основании (23) функция

$$Z = Z(x,t) = -\frac{N+2-\alpha}{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha} \cdot \frac{1}{t}, \tag{24}$$

является решением параболического неравенства

$$Z_t \leqslant \mathcal{L}(Z). \tag{25}$$

С другой стороны, из неравенства (16) следует, что

$$P_t \geqslant \mathcal{L}(P). \tag{26}$$

Так как

$$Z|_{t=0} = -\infty,$$

и

$$P(x,t)|_{t=0} > Z(x,t)|_{t=0}, \tag{27}$$

то на основании неравенств (25), (26) и (27), и по классической теореме сравнения [1] заключаем, что

$$P(x,t) \geqslant -\frac{N+2-\alpha}{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha} \cdot \frac{1}{t}. \tag{28}$$

И наконец, из неравенств (9) и (28) следует неравенство

$$u_t \geqslant -\frac{N+2-\alpha}{(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha} \cdot \frac{u}{t}. \tag{29}$$

Лемма доказана.

Замечание. Неравенство (29) остается в силе и в случае, когда $u = u(x,t)$ — сильное решение задачи (1)–(2). В этом случае неравенство (29) выполняется почти всюду на множестве точек $Q_t = R^N \times (0,T)$, при любом $T > 0$. Доказательство этого утверждения в точности повторяет соответствующее доказательство теоремы в [3].

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ — сильное решение задачи* (1), (2), *и, кроме того, выполнены условия* $(N+2-\alpha)(m-1)-\alpha>0$, $1<\alpha<2$, *то имеет место оценка*

$$\|u(t)\|_{\infty,B_\rho} \leqslant C\left(\left(\frac{\rho^{2-\alpha}}{t}\right)^{\frac{1}{m-1}} + \rho^{-N}\int\limits_{B_{2\rho}} u(x,t)\,dx\right), \tag{30}$$

где B_ρ — шар с центром в начале координат радиус ρ, и $\|u(t)\|_{\infty,B_\rho} = \sup\limits_{x\in B_\rho} u(x,t)$.

Доказательство. Доказательство теоремы достаточно провести для последовательности апроксимирующих решений задачи (1), (2). Пусть $u=u(x,t)$ — классическое решение задачи (3), (4) (индекс n по-прежнему будем опускать).

Пусть

$$\rho_n=\rho(1+\sigma 2^{-n}),\quad k_n=k-\frac{k}{2^n},\quad n=0,1,2,\ldots$$
$$v_+=\max(v,0),$$

где $0<\sigma<1$, ρ и k — произвольные положительные числа, $B_n\equiv B_{\rho_n}$ — шар с центром в начале координат с радиусом ρ_n.

Пусть, далее, $\zeta_n(x)$ — последовательность срезающих функций, определяемые с помощью равенств

$$\begin{cases} 1, & x\in B_{n+1},\\ \left[1-\left(\frac{|x|-\rho_{n+1}}{\rho_n-\rho_{n+1}}\right)^{\frac{\theta+1}{1-\theta}+1}\right]^{\frac{\theta+1}{1-\theta}+1}, & x\in B_n\setminus B_{n+1},\\ 0, & x\notin B_n,\end{cases}$$

где $0<\theta<1$.

Нетрудно проверить выполнение следующих неравенств:

$$\begin{gathered} 0\leqslant \zeta_n(x)\leqslant 1,\quad \forall\, x\in R^N;\quad n=0,1,2,\ldots\\ \frac{\partial\zeta_n}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial a(|x|)}{\partial x_j}\leqslant 0,\quad j=1,2,\ldots,N;\quad \forall\, x\in R^N;\quad n=0,1,2,\ldots\\ \left|\frac{\partial\zeta_n}{\partial x_j}\right|\leqslant \frac{c2^n}{\sigma\rho},\quad \forall\, x\in R^N;\quad j=1,2,\ldots,N;\quad n=0,1,2,\ldots\\ \frac{|\Delta\zeta_n|}{\zeta_n^\theta}\leqslant\frac{c2^{2n}}{\sigma^2\rho^2},\quad \forall\, x\in B_n;\quad n=0,1,2,\ldots \end{gathered} \tag{31}$$

Здесь и далее C — несущественная константа, зависящая только от параметров задачи.

Фиксируя переменную t, перемножим обе части уравнения (3) на функцию $\eta_n(x,t)=(u-k_{n+1})_+\zeta_n$, и проинтегрируем по R^N. После интегрирования по частям получим

$$\begin{gathered} \int\limits_{B_n} u_t(u-k_{n+1})_+\zeta_n\,dx = -m\int\limits_{B_n} a(|x|)u^{m-1}|\nabla(u-k_{n+1})_+|^2\zeta_n\,dx-\\ -m\sum_{j=1}^N\int\limits_{B_n} a(|x|)u^{m-1}u_{x_j}(u-k_{n+1})_+\cdot\zeta_{nx_j}\,dx. \end{gathered} \tag{32}$$

Применяя лемму к левой части последнего равенства, и принимая во внимание, что

$$\begin{gathered} u^{m-1}|\nabla(u-k_{n+1})_+|^2\geqslant (u-k_{n+1})_+^{m-1}|\nabla(u-k_{n+1})_+|^2 =\\ =\frac{4}{(m+1)^2}\left|\nabla(u-k_{n+1})_+^{\frac{m+1}{2}}\right|^2, \end{gathered}$$

из (32) имеем

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_{B_n} a(|x|)\left|\nabla(u-k_{n+1})_+^{\frac{m+1}{2}}\right|^2\zeta_n\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{t}\int\limits_{B_n} u\cdot(u-k_{n+1})_+\cdot\zeta_n\,dx - \tag{33}$$
$$-\frac{m}{2}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{B_n} a(|x|)u^{m-1}\left[(u-k_{n+1})_+^2\right]_{x_j}\cdot\zeta_{nx_j}\,dx.$$

Рассмотрим функции

$$G_n(u)=\int\limits_{k_{n+1}} s^{m-1}(s-k_{n+1})_+\,ds.$$

Производная от функции $G_n(u)$ по переменной x_j равна

$$G_{nx_j}=u^{m-1}(u-k_{n+1})_+u_{x_j}=u^{m-1}(u-k_{n+1})_{+x_j}\cdot(u-k_{n+1})_+ =$$
$$=\frac{1}{2}u^{m-1}\left[(u-k_{n+1})_+^2\right]_{x_j}. \tag{34}$$

Учитывая (34), и повторно применяя интегрирование по частям к второму интегралу правой части (33), получим

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_{B_n} a(|x|)\left|\nabla(u-k_{n+1})_+^{\frac{m+1}{2}}\right|^2\zeta_n\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{t}\int\limits_{B_n} u\cdot(u-k_{n+1})_+\cdot\zeta_n\,dx + \tag{35}$$
$$+m\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{B_n} G_n(u)\left[a(|x|)\cdot\zeta_{nx_j}\right]_{x_j}dx.$$

Используя свойства срезающих функций $\zeta_n(x)$, на основании неравенств

$$|x|^\alpha\leqslant a(|x|)\leqslant c\rho^\alpha,$$

$$G_n(u)=\int\limits_{k_{n+1}}^{u}(s-k_{n+1})_+s^{m-1}\,ds\leqslant\frac{1}{2}u^{m-1}(u-k_{n+1})_+^2,$$

$$\left|\nabla\left[(u-k_{n+1})_+^{\frac{m+1}{2}}\zeta_n\right]\right|^2\leqslant 2\left|\nabla(u-k_{n+1})_+^{\frac{m+1}{2}}\right|^2\zeta_n+2(u-k_{n+1})_+^{m+1}\cdot|\nabla\zeta_n|^2,$$

из (35) получим оценку

$$\int\limits_{B_{n+1}}|x|^2\left|\nabla\left[(u-k_{n+1})_+^{\frac{m+1}{2}}\zeta_n\right]\right|^2dx\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{\|u(t)\|_{\infty,B_n}}{t}+\frac{2^{2n}\|u(t)\|_{\infty,B_n}^m}{\sigma^2\rho^{2-\alpha}}\right)\int\limits_{B_n}(u-k_n)_+\,dx. \tag{36}$$

Чтобы получить необходимое реккурентное соотношение, применим к интегралу

$$\Im_{n+1} = \int\limits_{B_{n+1}} (u - k_{n+1})_+ \, dx$$

сначала неравенство Гёльдера, затем к полученному выражению применим неравенство Ниренберга — Каффарелли в [5] с параметрами $\gamma = 0$, $\frac{\alpha}{2}$, $\beta = 0$, r, $p = 2$, $q = 2$, причем предполагаем выполненными условия:

$$1 < \alpha < 2, \quad 2 < r < \frac{2N}{N + \alpha - 2}.$$

Итак, для $\Im_{n+1}$ имеем оценку

$$\begin{gathered} \int\limits_{B_{n+1}} (u - k_{n+1})_+ \, dx \leqslant \left(\int\limits_{B_{n+1}} |x|^\alpha \left| \nabla \left[(u - k_{n+1})_+^{\frac{m+1}{2}} \zeta_n \right] \right|^2 dx \right)^{\frac{a}{m+1}} \times \\ \times \left(\int\limits_{B_{n+1}} (u - k_{n+1})^{m+1} \zeta_n^2 \, dx \right)^{\frac{1-a}{m+1}} \left(mes\, A_{k_{n+1}}(t) \right)^{1 - \frac{2}{(m+1)r}}, \end{gathered} \tag{37}$$

где $a = \frac{N(r-2)}{r(2-\alpha)}$, $A_{k_{n+1}}(t) = \{x : \ x \in B_{n+1}, u(x,t) \geqslant k_{n+1}\}$. Далее, так как

$$\Im_n = \int\limits_{B_n} (u - k_n)_+ \, dx \geqslant \int\limits_{A_{k_{n+1}}(t)} (u - k_n)_+ \, dx \geqslant (k_{n+1} - k_n) \cdot mes\, A_{k_{n+1}}(t),$$

то

$$mes\, A_{k_{n+1}}(t) \leqslant \frac{2^{n+1}}{k} \int\limits_{B_n} (u - k_n)_+ \, dx. \tag{38}$$

Из (37) на основании (36) и (38) будем иметь

$$\begin{gathered} \int\limits_{B_{n+1}} (u - k_{n+1})_+ \, dx \leqslant C \left(\frac{\|u\|_{\infty,B_0}}{t} + \frac{2^{2n} \|u\|^m_{\infty,B_0}}{\sigma^2 \rho^{2-\alpha}} \right)^{\frac{a}{m+1}} \times \\ \times \|u\|_{\infty,B_0}^{\frac{m(1-a)}{m+1}} \cdot 2^{\left(1 - \frac{2}{(m+1)r}\right)(n+1)} k^{\frac{2}{(m+1)r} - 1} \left(\int\limits_{B_n} (u - k_n)_+ \, dx \right)^{1 + \frac{r-2}{(m+1)r}}. \end{gathered} \tag{39}$$

Предположим вначале, что

$$\|u\|_{\infty,B_0} \geqslant \left(\frac{\rho^{2-\alpha}}{t} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{40}$$

Тогда из (39) получим оценку

$$\begin{gathered} \int\limits_{B_{n+1}} (u - k_{n+1})_+ \, dx \leqslant C\, 2^{\left(\frac{2a}{m+1} + 1\right)n} \left(\frac{1}{\sigma^2 \rho^{2-\alpha}} \right)^{\frac{a}{m+1}} \times \\ \times \|u\|_{\infty,B_0}^{\frac{m}{m+1}} \cdot k^{\frac{2}{(m+1)r} - 1} \left(\int\limits_{B_n} (u - k_n)_+ \, dx \right)^{1+\varepsilon}, \end{gathered} \tag{41}$$

где
$$\varepsilon = \frac{r-2}{(m+1)r} > 0.$$
Пологая
$$\mathfrak{I}_n = \int\limits_{B_n} (u-k_n)_+ \, dx, \tag{42}$$
неравенство (41) представится в виде реккурентного соотношения
$$\mathfrak{I}_{n+1} \leqslant b^n \cdot A \cdot \mathfrak{I}_n^{1+\varepsilon}, \tag{43}$$
где
$$b > 1, \quad \text{и} \quad A = \left(\frac{1}{\sigma^2\rho^{2-\alpha}}\right)^{\frac{a}{m+1}} \cdot \|u\|_{\infty,B_0}^{\frac{m}{m+1}} \cdot k^{\frac{2}{(m+1)r}-1}.$$
Подберем параметр k так, чтобы имело место равенство (напомним, что k — произвольно)
$$\int\limits_{B_0} u \, dx = b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}} \cdot A^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{44}$$

Тогда из леммы (5.6) в [1] следует соотношение
$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{I}_n = 0,$$
следовательно
$$\int\limits_{B_\rho} (u-k)_+ \, dx = 0,$$
поэтому
$$\sup_{x\in B_\rho} u(x,t) \leqslant k, \tag{45}$$
где k определяется из условия (44).

Опуская несложные алгебраические преобразования, связанные с нахождением параметра k из соотношения (44), на основании (45) имеем
$$\sup_{x\in B_\rho} u(x,t) \leqslant C\|u\|_{\infty,B_0}^{\frac{mr}{(m+1)r-2}} \left(\frac{1}{\sigma^2\rho^{2-\alpha}}\right)^{\frac{ar}{(m+1)r-2}} \left(\int\limits_{B_0} u(x,t)\, dx\right)^{\frac{r-2}{(m+1)r-2}}, \tag{46}$$
отсюда, имея ввиду равенство
$$a = \frac{N(r-2)}{r(2-\alpha)},$$
из (46) получим
$$\sup_{x\in B_\rho} u(x,t) \leqslant C\|u\|_{\infty,B_0}^{\frac{mr}{(m+1)r-2}} \left(\frac{1}{\sigma^2\rho^{2-\alpha}}\right)^{\frac{N(r-2)}{(2-\alpha)((m+1)r-2)}} \left(\int\limits_{B_0} u(x,t)\, dx\right)^{\frac{r-2}{(m+1)r-2}}.$$

Применим неравенство Юнга к правой части последнего соотношения, тогда получим
$$\|u(t)\|_{\infty,B_\rho} \leqslant \eta\|u(t)\|_{\infty,B_{\rho(1+\sigma)}} + C(\eta)(\sigma^2\rho^{2-\alpha})^{-\frac{N}{2-\alpha}} \cdot \int\limits_{B_{\rho(1+\sigma)}} u(x,t)\, dx, \tag{47}$$

здесь η — произвольное положительное число. Произвольность параметров ρ, σ, η позволяет повторно применить итерацию. В самом деле, выберем в неравенстве (47) вместо ρ и σ последовательности

$$\overline{\rho}_n = \rho\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{-i+1}\right), \quad \overline{\sigma}_n = \frac{2^{-n-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-i+1}}$$

соответственно. Положим $\overline{B}_n = B_{\overline{\rho}_n}$, $n = 1,2,\ldots$ тогда неравенство (47) перепишется в виде

$$\|u(t)\|_{\infty,\overline{B}_n} \leqslant \eta\|u(t)\|_{\infty,\overline{B}_{n+1}} + C(\eta)d^n\rho^{-N}\int\limits_{\overline{B}_{n+1}} u(x,t)\,dx,$$

где $d > 2$ — некоторое положительное число. Проводя итерацию в полученном неравенстве от 1 до n, в результате будем иметь

$$\|u(t)\|_{\infty,B_\rho} \leqslant \eta^n\|u(t)\|_{\infty,\overline{B}_{n+1}} + C(\eta)\rho^{-N}d\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(\eta d)^i\right)\cdot\int\limits_{B_{2\rho}} u(x,t)\,dx. \tag{48}$$

Полагая в равенстве (48) $\eta = \frac{1}{2d}$, и переходя к пределу $n \to \infty$, получим

$$\|u(t)\|_{\infty,B_\rho} \leqslant C\rho^{-N}\int\limits_{B_{2\rho}} u(x,t)\,dx. \tag{49}$$

Из неравенства (49) следует выполнение соотношения (30) при условии, что (40) имеет место. Если условие (40) не выполняется, т. е. если

$$\|u\|_{\infty,B_0} \leqslant \left(\frac{\rho^{2-\alpha}}{t}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

то тем более

$$\|u\|_{\infty,B_\rho} \leqslant \left(\frac{\rho^{2-\alpha}}{t}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

и следовательно оценка (30) имеет место при любых ρ и t.

Теорема доказана в случае, когда $u(x,t)$ — апроксимирующее решение задачи (1), (2). В общем случае теорема доказывается с помощью предельного перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М., 1967. — 736 с.

2. Тедеев, А. Ф. Свойство конечной скорости распространения возмущений для решения задачи Дирихле дифференциального уравнения неоднородной диффузии / А. Ф. Тедеев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2016. — № 4. — С. 1–39.

3. Тедеев, А. Ф. Об одном неравенстве для решения дифференциального уравнения диффузии / А. Ф. Тедеев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. — № 4. — С. 1–13.

4. Aronson, D. G. Regularite des solutions de $\mathfrak{I}'$ equation de milieux poreux dans R^N / D. G. Aronson, Ph. Benilan // C. R. Acad Sci. Paris Ser. A–B. — 1979. — V. 288. — P. 103–105.

5. Caffarelli, L. First order interpolation inequalities with weight / L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg // Compositio Mathematica. — 1984. — № 3. — P. 259–275.

6. Kamin, S. Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with rapidly decaying density / S. Kamin, G. Reyes, J. L. Vazquez // Discrete and continuous dynamical sistems. — 2010. — V. 26, № 2. — P. 521–549.

7. Reyes, G. Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with slowly decaying density / G. Reyes, J. L. Vazquez // Commun. Pure. Appl. Anal. — 2009. — № 8. — P. 493–508.

8. Vazquez, J. L. The Porous Medium Equation / J. L. Vazquez. — Oxford Mathematical Monographs, 2007. — 275 p.

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A. Ural'tseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. [Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Lineyjnye i kvazilineyjnye uravneniya parabolicheskogo tipa]. Moscow, 1967, 736 p.

2. Tedeev A.F. Finite speed of propagation of perturbations for the Dirichlet problem of the differential equation of inhomogeneous diffusion. [Tedeev A.F. Svoyjstvo konechnoyj skorosti rasprostraneniya vozmushheniyj dlya resheniya zadachi Dirixle differencial'nogo uravneniya neodnorodnoyj diffuzii]. *Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya — Differential equations and control processes*, 2016, no. 4, pp. 1–39.

3. Tedeev A.F. On an inequality for the solution off the differential diffusion equation. [Tedeev A.F. Ob odnom neravenstve dlya resheniya differencial'nogo uravneniya diffuzii]. *Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya — Differential equation and control prosses*, 2017, no. 4, pp. 1–13.

4. Aronson D.G., Benilan Ph. Regularite des solutions de $\mathfrak{I}'$ equation de milieux poreux dans R^N. C. R. Acad Sci. Paris Ser. A–B, 1979, vol. 288, pp. 103–105.

5. Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weight. Compositio Mathematica, 1984, no. 3, pp. 259–275.

6. Kamin S., Reyes G., Vazquez J.L. Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with rapidly decaying density. Discrete and continuous dynamical sistems, 2010, vol. 26, no. 2, pp. 521–549.

7. Reyes G., Vazquez J. L. Long time behavior for the inhomogeneous PME in a medium with slowly decaying density. Commun. Pure. Appl. Anal., 2009, no. 8, pp. 493–508.

8. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation, Oxford Mathematical Monographs, 2007, 275 p.

Тедеев Александр Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ, Российская федерация
E-mail: tedeev92@bk.ru
Тел.: 8–928–485–67–34

Tedeev Alexander Fedorovich, candidate of Physical and mathematical Sciences, associate Professor of functional analysis and differential equations Department, North Ossetian state University named after K. L. Hetagurov, Vladikavkaz, Russian Federation
E-mail: tedeev92@bk.ru
Tel.: 8–928–485–67–34