УДК 517.9

О МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЯХ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ГАРМОНИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ*

В. Е. Струков, И. И. Струкова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.11.2016 г.

Аннотация. Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа медленно меняющихся на бесконечности функций из однородных пространств и гармоничных распределений. Вводится в рассмотрение целый ряд однородных пространств функций. Вводится понятие гармоничного пространства распределений, которое строится по одному из рассматриваемых однородных пространств функций. Изучаются свойства гармоничных пространств распределений, они наделяются структурой банаховых модулей. Доказывается, что каждое такое пространство изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций. На основе определения медленно меняющейся на бесконечности функции из однородного пространства вводится понятие медленно меняющегося на бесконечности гармоничного распределения. С помощью методов абстрактного гармонического анализа в статье получены свойства рассматриваемых функций и распределений, в частности, критерии принадлежности функции (распределения) классу медленно меняющихся на бесконечности функций (распределений). Результаты статьи получены с существенным использованием теорий изометрических представлений и банаховых модулей.

Ключевые слова: медленно меняющаяся на бесконечности функция, однородное пространство, банахово пространство, распределение медленного роста, спектр Берлинга, банахов модуль.

SLOWLY VARYING AT INFINITY FUNCTIONS FROM HOMOGENEOUS SPACES AND HARMONIC DISTRIBUTIONS

V. E. Strukov, I. I. Strukova

Abstract. The article is devoted to some problems of harmonic analysis of slowly varying at infinity functions from homogeneous spaces and harmonic distributions. We consider a number of homogeneous function spaces and on the basis of them we construct harmonic spaces of distributions. We give the definition of slowly varying at infinity function from a homogeneous space and on its basis we design the concept of slowly varying at infinity harmonic distribution. In the article we study the properties of the functions and distributions under consideration.

Keywords: slowly varying at infinity function, homogeneous space, Banach space, distribution of slow growth, Beurling spectrum, Banach module.

1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЕКТОРОВ ИЗ БАНАХОВЫХ $L^1(\mathbb{R})$-МОДУЛЕЙ

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $End\,\mathcal{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Пусть $L^1(\mathbb{R})$ – банахова алгебра определенных на

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–31–00097.

$\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой функций в качестве умножения $(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ f,g \in L^1(\mathbb{R})$.

Будем считать, что $\mathcal{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем (см. [1], [2], [3], [4]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. *Для банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ выполняются следующие условия:*

1) из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, следует, что вектор $x \in \mathcal{X}$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathcal{X}$);

2) для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathcal{X}$ с представлением $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$):

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x).$$

Если $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in \mathcal{X},$$

определяет на $\mathcal{X}$ структуру банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением T.

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathbb{R})$- модулем $\mathcal{X}$ ассоциировано единственное представление $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$ (см. [2]). Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение $(\mathcal{X}, T)$.

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей содержится в [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Определение 2. Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ назовем *непрерывным* (относительно представления T) или T-*непрерывным*, если функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X},\ \varphi_x(t) = T(t)x,\ t \in \mathbb{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$ или $(\mathcal{X},T)_c$. Оно образует замкнутый *подмодуль* из $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X}_c$ – замкнутое линейное подпространство из $\mathcal{X}$, инвариантное относительно всех операторов $T(f),\ T(t),\ f \in L^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Далее через $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 3. *Спектром Берлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R} \backslash \{\mu_0 \in \mathbb{R} :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства X (см. [2], [5]):

Лемма 1. *Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы свойства:*

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т.е. $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathcal{X}$ невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, если $(supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. x – собственный вектор банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$;

6) если вектор $x \in \mathcal{X}$ имеет компактный спектр Берлинга $\Lambda(x)$ со спектральным радиусом $r(x) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda(x)} |\lambda|$, то функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ вида $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа, равного $r(x)$ (т.е. $\overline{\lim\limits_{|z| \to \infty}} \frac{ln\|\varphi_x(z)\|}{|z|} = r(x)$).

Определение 4. Пусть $\mathcal{U}$ – некоторое направленное множество и $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Ограниченная направленность (f_α), $\alpha \in \mathcal{U}$, функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется λ_0- *направленностью*, если выполнены условия:

1. $\widehat{f}_\alpha(\lambda_0) = 1$ для всех $\alpha \in \mathcal{U}$;
2. $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha * f = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(\lambda_0) = 0$.

Определение 5. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ отнесем к *существенному спектру* $\Lambda_{ess}(x)$ вектора x из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$, если существует λ_0-направленность (f_α) из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, для которой выполнено условие $\overline{\lim\limits_{\alpha}} \|f_\alpha x\| > 0$.

Отметим, что $\Lambda_{ess}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (\mathcal{X}, T)$.

Определение 6. Пусть x – ненулевой вектор из $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}, T)$. Число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем *эргодической точкой* вектора x, если для некоторой λ_0-направленности из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ существует $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in \mathcal{X}$. Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{erg}(x)$. Если $x_0 = 0$, то число λ_0 отнесем к *непрерывному спектру* $\Lambda_c(x)$ вектора x. Множество $\Lambda_B(x) = \{\lambda_0 \in \Lambda_{erg}(x) : \lim\limits_{\alpha} f_\alpha x \neq 0\}$ называется *спектром Бора (дискретным спектром)* вектора $x \in \mathcal{X}$.

Определение 7. Два банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X}_k, T_k)$, $k = 1, 2$, где $T_k \in End\,\mathcal{X}_k$, $k = 1, 2$, назовем *изоморфными*, если существует обратимый оператор $\mathcal{U} \in Hom\ (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ такой, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$, для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и для любого вектора $x_2 \in \mathcal{X}_2$ имеют место равенства: $T_1(\tau)\mathcal{U}x_2 = \mathcal{U}T_2(\tau)x_2$, $T_1(f)\mathcal{U}x_2 = \mathcal{U}T_2(f)x_2$.

Из определений 5, 6 и 7 следует

Лемма 2. *Пусть обратимый оператор $\mathcal{U} \in Hom\ (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ осуществляет изоморфизм банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей $(\mathcal{X}_k, T_k)$, $k = 1, 2$. Тогда для любого вектора $x \in \mathcal{X}_2$ справедливы свойства:*

1) $\Lambda(\mathcal{U}x_2, T_1) = \Lambda(x_2, T_2)$;

2) $\Lambda_{ess}(\mathcal{U}x_2, T_1) = \Lambda_{ess}(x_2, T_2)$;

3) $\Lambda_{erg}(\mathcal{U}x_2, T_1) = \Lambda_{erg}(x_2, T_2)$;

4) $\Lambda_c(\mathcal{U}x_2, T_1) = \Lambda_c(x_2, T_2)$.

2. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

Напомним, что символом X мы обозначаем комплексное банахово пространство, $End\,X$ — банахову алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X.

Символом $L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$ обозначим линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{R}$ (классов эквивалентности) функций со значениями в банаховом пространстве X.

Через $S^p(\mathbb{R}, X)$, где $p \in [1,\infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [8], состоящее из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p} = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left(\int\limits_0^1 \|x(s+t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \ p \in [1,\infty),$$

принимаемая за норму.

Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений (см. [2], [8], [9]).

Определение 8. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется *однородным,* если выполнены следующие условия:
(a) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(\mathbb{R},X)$, причем вложение $\mathcal{F}(\mathbb{R},X) \subset S^1(\mathbb{R},X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);
(b) в $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ определена и ограничена группа $S(t), \ t \in \mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s) = x(s+t), \ s,t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X); \qquad (1)$$

(c) для любых функций $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ их свертка

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau, \ t \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ и выполнено неравенство $\|f*x\| \leqslant C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C \geqslant 1$ (как правило, $C = 1$);
(d) $\varphi x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ для любой $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi$, причем $\|\varphi x\| \leqslant \|\varphi\|\|x\|$ и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ непрерывно.

Пример 9. Следующие банаховы пространства функций, определенных на промежутке $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве X являются однородными. Все они являются линейными подпространствами из $L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$.

1. Пространства $L^p = L^p(\mathbb{R},X)$, $p \in [1,\infty)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ (классов) функций, определенных на $\mathbb{R}$, и принимающих свои значения в банаховом пространстве X. Нормы в данных пространствах имеют вид $\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_X^p dt\right)^{1/p}$, $p \in [1,\infty)$. Отметим, что $(L^p(\mathbb{R},X))_c = L^p(\mathbb{R},X)$, $(L^p(\mathbb{R},X))_0 = L^p(\mathbb{R},X)$.

2. Пространство $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R},X)$ существенно ограниченных (классов) функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в банаховом пространстве X и нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$. Отметим, что $(L^\infty(\mathbb{R},X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R},X)$.

3. Пространства Степанова $S^p = S^p(\mathbb{R},X)$, $p \in [1,\infty)$.

4. Пространства амальгам Винера $(L^p, l^q) = (L^p(\mathbb{R},X), l^q(\mathbb{R},X))$, $p,q \in [1,\infty)$, состоящие из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$ таких, что

$$\|x\|_{p,q} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \|x(s+k)\|^p ds \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty, \ p,q \in [1,\infty).$$

Будет использоваться эквивалентная ей норма

$$\|x\|_{p,q} = \sup_{t\in[0,1]} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \|x(s+t+k)\|^p ds \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty, \ p,q \in [1,\infty).$$

5. Пространство $C_b = C_b(\mathbb{R},X)$ ограниченных непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в X и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$, $x \in C_b$ ($C_b(\mathbb{R},X)$ – замкнутое подпространство из $L^\infty(\mathbb{R},X)$). Отметим, что $(C_b(\mathbb{R},X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R},X)$, $(C_b(\mathbb{R},X))_0 = C_0(\mathbb{R},X)$.

6. Подпространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R},X) \subset C_b$ равномерно непрерывных функций из C_b. Отметим, что $(C_{b,u}(\mathbb{R},X))_c = C_{b,u}(\mathbb{R},X)$, $(C_{b,u}(\mathbb{R},X))_0 = C_0(\mathbb{R},X)$.

7. Подпространство $C_0 = C_0(\mathbb{R},X) \subset C_{b,u}$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0$, $t \in \mathbb{R}$).

8. Подпространство $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R},X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\tau) - x(\tau)\| = 0$, $t, \tau \in \mathbb{R}$) (см. [10], [11]).

9. Подпространство $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ ω- периодических на бесконечности функций, $\omega \in \mathbb{R}_+$ (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\| = 0$, $t \in \mathbb{R}$) (см. [10], [12]).

10. Пространства $C^k = C^k(\mathbb{R},X)$, $k \in \mathbb{N}$, k раз непрерывно дифференцируемых функций с ограниченной k-ой производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty$.

11. Пространства Гельдера $C^{k,\alpha} = C^{k,\alpha}(\mathbb{R},X)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1]$,

$$C^{k,\alpha} = \left\{ x \in C^k : \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{t\neq s\in\mathbb{R}} \frac{|x^{(k)}(t) - x^{(k)}(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\},$$

$\|x\|_{C^{k,\alpha}} = \|x\|_{C^k} + \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}}$.

12. Подпространство $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbb{R},X)$ функций из $L^\infty(\mathbb{R},X)$ ограниченной вариации, т.е. функций, для которых конечна величина $\|x\|_\mathbb{V} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} V_t^{t+1}(x) + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x\|_X$, принимаемая за норму.

Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ будем обозначать однородное пространство. Если $X = \mathbb{C}$, то оно будет обозначаться символом $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Через $\mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ вида $\{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$: функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ непрерывна$\}$. Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, содержащее все функции $\varphi x,\ x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, где $\varphi \in C_b(\mathbb{R},X)$ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{supp}\varphi$ – компакт.

Непосредственно из определения 8 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ являются банаховыми $L^1(\mathbb{R})$-модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура определяется сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. [1], [2], [3], [4], [5], [6]). В частности, пространства $\mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ совпадают с пространствами S-непрерывных векторов (см. определение 2).

3. ГАРМОНИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть X – комплексное банахово пространство. Символом $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$ обозначим пространство Шварца, т.е. линейное полинормированное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to X$ таких, что для всех $m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует $C > 0$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется условие $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|t^m \varphi^{(n)}(t)\|_X < C$. Такие функции называют *пробными.*

Будем говорить, что последовательность $(\varphi_k, k \in \mathbb{N})$, $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$, *сходится* к функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$, если при всех $m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ последовательность $t \mapsto t^m \varphi_k^{(n)}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, равномерно сходится к функции $t \mapsto t^m \varphi^{(n)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R},X) \to X$ – линейный оператор. Будем обозначать значение оператора Φ на $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$ символом $\Phi(\varphi)$. Линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R},X) \to X$ называют *непрерывным*, если $\Phi(\varphi_k)$ сходится к $\Phi(\varphi)$ всякий раз, когда $\{\varphi_k\}$ сходится к φ в $\mathcal{S}(\mathbb{R},X)$. Всякий непрерывный линейный оператор $\Phi : \mathcal{S}(\mathbb{R},X) \to X$ называют *распределением* (или *обобщенной функцией) медленного роста* на $\mathbb{R}$ со значениями в X. Обозначим символом $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ линейное пространство всех распределений медленного роста с естественными операциями сложения и умножения на число.

Производной распределения $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ будем называть распределение $\Phi' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$, определенное формулой $\Phi'(\varphi) = -\Phi(\varphi')$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$. Отметим, что оператор дифференцирования $D : \mathcal{S}'(\mathbb{R},X) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ – линейный и непрерывный оператор. Из определения пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R},X)$ следует, что любое распределение $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ дифференцируемо бесконечное число раз.

Пусть $x \in S^1(\mathbb{R},X)$ (в частности, x может быть непрерывной функцией). Ясно, что оператор Φ_x, действующий по правилу $\Phi_x(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\varphi(t)dt$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$, принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$. Распределение Φ_x, порожденное функцией $x \in S^1(\mathbb{R},X)$, называют *регулярным.*

В пространстве распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ действует группа $S : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ операторов сдвига

$$(S(t)F)(\varphi) = F(S(-t)\varphi),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X),\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Свертка распределения $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ с функцией $f \in L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой

$$(f * F)(\varphi) = F(\widetilde{f} * \varphi),\ F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X),\ f \in L^1(\mathbb{R}), \tag{4}$$

где функция $\widetilde{f}$ имеет вид $\widetilde{f}(\tau) = f(-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Линейный оператор $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X) \mapsto \widehat{\Phi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$, задаваемый формулой $\widehat{\Phi}(\varphi) = \Phi(\widehat{\varphi})$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$, называется *преобразованием Фурье распределения* $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$. Заметим, что операция преобразования Фурье переводит пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$, являясь изоморфизмом (более подробно для скалярных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ см. [13]).

Будем говорить, что распределение $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ *равно 0* на интервале J, если $\Phi(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$, у которых $supp\,\varphi \subset J$. *Носителем* $supp\,\Phi$ *распределения* $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ назовем дополнение к наибольшему открытому множеству $U \subset \mathbb{R}$, на котором $\Phi = 0$.

Замечание 10. Будем говорить, что функция $x \in C_b(\mathbb{R},X)$ является *функцией медленного роста*, если при некотором $m \geqslant 0$ выполняется условие $\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|_X(1+|t|)^{-m}dt < \infty$. Заметим, что всякое распределение $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ является производной от некоторой непрерывной функции медленного роста. На основании этого можно считать, что для каждого распределения $\Phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ существует функция $x \in C_b(\mathbb{R},X)$, которая является функцией медленного роста, и справедливо равенство $\Phi(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} x'(t)\varphi(t)dt = -\int\limits_{\mathbb{R}} x(t)\varphi'(t)dt$, где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$.

Далее будут введены гармоничные (однородные) пространства распределений и изучены их свойства.

Рассмотрим последовательность $(f_n, n \in \mathbb{N})$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, вида

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^n}{n!}e^{-t} & , \quad t > 0, \\ 0 & , \quad t \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Отметим, что преобразование Фурье $\widehat{f_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет вид $\widehat{f_n}(\lambda) = \frac{1}{(i\lambda+1)^n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Каждому однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ можно поставить в соответствие счетное множество пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{N}$, которые определяются как линейные пространства функций вида

$$\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X) = \{f_n * x \mid x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)\},\ n \in \mathbb{N},$$

с нормой $\|f_n * x\|_{\mathcal{F}^{(n)}} = \|f_n * x\|_{\mathcal{F}} + \|x\|_{\mathcal{F}}$, где функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, задаются формулой (5). Отметим, что все пространства $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{N}$, также являются однородными.

Определение 11. Линейное подпространство $\mathbb{F}(\mathbb{R},X) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R},X)$ называется *гармоничным (однородным) пространством распределений,* если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого распределения Φ из $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ найдется функция φ из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ такая, что $\Phi = (D+I)^n\varphi$ и $\|\Phi\| = \|\varphi\|$. При этом для пространства $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ будем использовать обозначение $\mathcal{F}^{(-n)}(\mathbb{R},X)$ и говорить, что пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ *соответствует однородному пространству функций* $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$.

Заметим, что в определении 11 функция φ представима в виде $\varphi = f_n * \Phi$, где функция f_n из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (5).

Под пространством $\mathcal{F}^{(0)}(\mathbb{R},X)$ будем понимать само однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$. Тогда каждому однородному пространству $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ можно поставить в соответствие счетное множество однородных пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из определения 11 вытекает, что любое из этих пространств можно рассматривать как гармоничное пространство распределений.

В каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим операторы $\mathbb{D}_n^m : D(\mathbb{D}_n^m) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X) \to \mathcal{F}^{(n-m)}(\mathbb{R},X)$ вида

$$\mathbb{D}_n^m = (D+I)^m,\ m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

и операторы $\mathbb{D}_n^{-m} : D(\mathbb{D}_{-m}) \subset \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X) \to \mathcal{F}^{(n+m)}(\mathbb{R},X)$, действующие по правилу

$$\mathbb{D}_n^{-m}\Phi = f_m * \Phi, \Phi \in \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X),\ m \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где функция f_m из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ определяется формулой (5).

Когда ясно, о каком именно пространстве идет речь, вместо обозначения $\mathbb{D}_n^m$ будем использовать более короткое обозначение $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$. При этом под оператором $\mathbb{D}_n^0$ будем понимать тождественный оператор I, действующий в соответствующем пространстве $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Следует отметить, что операторы $\mathbb{D}^m$, $m \in \mathbb{Z}$, обладают свойством $\mathbb{D}^m\mathbb{D}^{-m} = I$.

Кроме того, в каждом из пространств $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассмотрим оператор $\mathbb{S}_n(f) : \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X) \to \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$ свертки распределения Φ из $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$ с функцией f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, задаваемый формулой $\mathbb{S}_n(f)\Phi = f * \Phi$. При $n = 0$ вместо $\mathbb{S}_0(f)$ будем писать просто $\mathbb{S}(f)$.

Далее символом $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ будет обозначаться одно из пространств функций или распределений $\mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$, $n \in \mathbb{Z}$, рассматриваемое как гармоничное пространство распределений.

Лемма 3. *Любое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ изометрически изоморфно соответствующему однородному пространству функций $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$.*

Утверждение леммы 3 следует непосредственно из определений 7 и 11. При этом изометрию осуществляет оператор $\mathbb{D}^n$ для соответствующего $n \in \mathbb{Z}$, определяемый одной из формул (6) или (7).

Из леммы 3 и определения 11 следует

Лемма 4. *Пусть $\mathbb{F}(\mathbb{R},X) = \mathcal{F}^{(n)}(\mathbb{R},X)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ — гармоничное пространство распределений. Тогда имеют место следующие свойства:*

1) $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ — банахово пространство;

2) $S(\tau)\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ и $\|S(\tau)\Phi\| = \|\Phi\|$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и любого распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R},X)$;

3) $f * \Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ и $\|f * \Phi\| \leqslant \|f\|_1\|\Phi\|$ для любой функции f из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и любого распределения $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R},X)$;

4) существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathbb{D}^{-m}\,\mathbb{F}(\mathbb{R},X) \subset S^1(\mathbb{R},X)$.

Условия 1)-3) леммы 4 означают, что каждое гармоничное пространство распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ образует банахов $L^1(\mathbb{R})$-модуль, в котором действует группа S сдвигов вида (3) и модульная структура задается формулой (4), в которой распределение F принадлежит соответствующему гармоничному пространству распределений $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$. Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathbb{R})$ (см. [1], [2], [3], [5], [6]). В частности, пространства $\mathbb{F}_c(\mathbb{R},X) = (\mathbb{F}(\mathbb{R},X))_c$ совпадают с пространствами S-непрерывных векторов (см. определение 2).

Гармоничным пространством распределений является, например, банахово пространство $M(\mathbb{R},X)$ векторных (со значениями в X) борелевских мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ со сверткой мер в качестве умножения.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее символом $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ обозначается однородное пространство функций, удовлетворяющее всем условиям (a)-(d) определения 8. В банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ действует группа сдвигов S, задаваемой формулой (1).

Определение 12. Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ обозначим символом $\mathcal{F}_{sl,\infty} = \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$. Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$ образует замкнутое линейное подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, инвариантное относительно операторов $S(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ вида $x(t) = c + x_0(t), t \in \mathbb{R}$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$.

При $\mathcal{F}(\mathbb{R},X) = C_b(\mathbb{R},X)$ примерами медленно меняющихся на бесконечности функций являются:

1) $x_1(t) = \sin\ln(1+t^2),\ t \in \mathbb{R}$;   2) $x_2(t) = \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{R}$;

3) $x_3(t) = \sin\sqrt{1+|t|},\ t \in \mathbb{R}$;

4) $x_4 : \mathbb{R} \to X,\ x_4(t) = c + x_0(t), t \in \mathbb{R},$ где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $C_0(\mathbb{R},X)$;

5) любая непрерывно дифференцируемая функция x из $C_b(\mathbb{R},X)$ со свойством $x' \in C_0(\mathbb{R},X)$.

В теории дифференциальных уравнений (см. [14, p. 3.6.3]) использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.*

Теперь введем понятие медленно меняющегося на бесконечности гармоничного распределения. Пусть $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ — гармоничное пространство распределений. В соответствии с определением 11 можно положить $\mathbb{F}(\mathbb{R},X) = \mathcal{F}^{(-m)}(\mathbb{R},X)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, т.е. для произвольного распределения Φ из $\mathbb{F}(\mathbb{R},X)$ найдется функция y из соответствующего однородного пространства функций $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ такая, что $\Phi = \mathbb{D}^m y$, где оператор $\mathbb{D}^m$, определяется формулой (6). При этом $y = \mathbb{D}^{-m}\Phi = f_m * \Phi$ (см. формулу (7)). Пространство $\mathbb{F}_0(\mathbb{R},X)$ исчезающих на бесконечности распределений определим следующим образом:

$\mathbb{F}_0(\mathbb{R},X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R},X)\ :\ \Phi = \mathbb{D}^m y,\ y \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)\}$.

Определение 13. Распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R},X)$ называется *медленно меняющимся на бесконечности,* если $y = f_m * \Phi \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности гармоничных распределений обозначим символом $\mathbb{F}_{sl,\infty} = \mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$. Непосредственно из определения следует, что $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$ образует линейное замкнутое подпространство из $\mathbb{F}_c(\mathbb{R},X)$, инвариантное относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и $S(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Введем в рассмотрение банахово пространство $L^{1,\infty}(\mathbb{R},X)$. Каждой функции $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$ поставим в соответствие последовательность $(x_n,\ n \in \mathbb{Z})$, где $x_n \in L^1([0,1],X)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $x_n(s) = x(s+n)$, $s \in [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}$. Банахово пространство $L^{1,\infty}(\mathbb{R},X)$ состоит из функций $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R},X)$, для которых $x_n \in L^\infty(\mathbb{R},X)$, а сама последовательность $(x_n,\ n \in \mathbb{Z})$ обладает свойством $\|x\|_{1,\infty} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_\infty < \infty$, где $\|x_n\|_\infty = \sup\limits_{s\in[0,1]} |x(s+n)|$, $n \in \mathbb{Z}$, причем величина $\|x\|_{1,\infty}$ считается нормой функции $x \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Операцию умножения в $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ определим сверткой функций. Через $W^1(\mathbb{R})$ обозначим замкнутую подалгебру непрерывных функций из $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ (она рассматривалась Н. Винером [15]). Заметим, что имеет место следующая оценка $\|x * y\|_{1,\infty} \leqslant C\|x\|_{1,\infty}\|y\|_{1,\infty}$, $x,y \in W^1(\mathbb{R})$, $C \geqslant 1$.

Лемма 5. *Для любых $f \in W^1(\mathbb{R})$, $x \in S^1(\mathbb{R},X)$ функция $y = f * x$ принадлежит пространству $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$.*

Доказательство. Для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливы оценки $\|(f*x)(t)\| \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_n^{n+1} |f(s)|\|x(t-s)\|ds \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \sup\limits_{\tau\in[0,1]} |f(\tau+n)| \int\limits_0^1 \|x(t-n-s)\|ds \leqslant \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_0^1 \|x(t-s)\|ds \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \sup\limits_{\tau\in[0,1]} |f(\tau+n)| \leqslant \|x\|_{S^1}\|f\|_{1,\infty}$. Аналогично доказывается, что для любых $t,\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка $\|(S(\tau)y - y)(t)\| \leqslant \|x\|_{S^1}\|S(\tau)f - f\|_{1,\infty}$. Поскольку $\lim\limits_{\tau\to 0}\|S(\tau)f - f\|_{1,\infty} = 0$ и $\|x\|_{S^1} < \infty$, то функция y равномерно непрерывна. □

Через $(e_\alpha,\ \alpha \in M)$, где M — некоторое направленное множество, обозначим ограниченную аппроксимативную единицу (о.а.е.) в алгебре $L^1(\mathbb{R})$ (см. [2]), для которой $\widehat{e}_\alpha(0) = 1$, $\alpha \in M$. Из [2, лемма 4.3] следует

Лемма 6. *Функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ принадлежит подпространству $\mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\alpha} e_\alpha * x = x$.*

Теорема 14. *Для того, чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f*x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ вида $f = S(\alpha)t - t$, $t \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Данная функция обладает свойством $\widehat{f}(0) = 0$. Согласно тауберовой теореме Винера [15] множество таких функций плотно в максимальном идеале $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f}(0) = 0\}$. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для функции f рассматриваемого вида.

Возьмем произвольную функцию $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$. Из определения медленно меняющейся функции следует, что $S(\alpha)x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$, откуда $f * x = (S(\alpha)t - t) * x = t * (S(\alpha)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ (по свойству (c) определения 8).
Достаточность. Пусть (e_α) — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и $t \in \mathbb{R}$. Из равенств $e_\alpha * (S(t)x - x) = (S(t)e_\alpha - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$ и $\widehat{f_\alpha}(0) = 0$ следует, что $e_\alpha * (S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$. Поскольку $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ (см. свойство (d) определения 8), $S(t)x - x = \lim\limits_{\alpha} e_\alpha * (S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$. □

Теорема 15. *Для того, чтобы функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ принадлежала пространству $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$. Пусть f — произвольная функция из $L^1(\mathbb{R})$ со свойством $\widehat{f}(0) = 1$, а (e_α) — о.а.е. из алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Поскольку $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ (см. свойство 4 определения 8), то из леммы 6 следует, что $\lim\limits_{\alpha} e_\alpha * (x - f * x) = x - f * x$. Кроме того, $e_\alpha * (x - f * x) = (e_\alpha * f - e_\alpha) * x = f_\alpha * x$, где $f_\alpha = e_\alpha * f - e_\alpha$. Учитывая, что $\widehat{f_\alpha}(0) = \widehat{e_\alpha}(0)\widehat{f}(0) - \widehat{e_\alpha}(0) = 0$, из теоремы 14 следует, что $f_\alpha * x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$, а значит, и $f * x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$.
Достаточность. Пусть $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R},X)$ и $x - f * x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 1$. Тогда с учетом того, что $(\widehat{S(t)f})(0) = 1$, имеем $f * (S(t)x - x) = (S(t)f - f) * x = ((S(t)f) * x - x) + (x - f * x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $\widehat{e_\alpha}(0) = 1$, то $\lim\limits_{\alpha} e_\alpha * (S(t)x - x) = S(t)x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, откуда следует, что $x \in \mathcal{F}_{sl\infty}(\mathbb{R},X)$. □

Теорема 16. *Если $x \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, то множество $\Lambda(x)\backslash\{0\}$ содержится в непрерывном спектре функции x и $\Lambda_{ess}(x) \subset \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq \gamma_0 \in \Lambda(x)$. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, обладающую свойствами $\gamma_0 \notin \operatorname{supp} \widehat{f}$ и $\widehat{f}(0) = 1$. Тогда функция $x_0 = x - f * x$ принадлежит пространству $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$. Следовательно, для любой γ_0-направлен- ности (f_α) из $L^1(\mathbb{R})$ справедлива цепочка равенств $0 = \lim\limits_{\alpha} f_\alpha * x_0 = \lim\limits_{\alpha}(f_\alpha * x - f_\alpha * f * x) = \lim\limits_{\alpha} f_\alpha * x$. □

Из лемм 2 и 3 следует, что все результаты, полученные для медленно меняющихся на бесконечности функций из однородных пространств, справедливы также и для гармоничных распределений, а именно:

Теорема 17. *Для того, чтобы распределение $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R},X)$ принадлежало пространству $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, необходимо и достаточно, чтобы $f * \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R},X)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\widehat{f}(0) = 0$.*

Теорема 18. *Для того, чтобы распределение* $\Phi \in \mathbb{F}_c(\mathbb{R},X)$ *принадлежало пространству* $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f * \Phi - \Phi \in \mathbb{F}_0(\mathbb{R},X)$ *для любой функции* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *удовлетворяющей условию* $\widehat{f}(0) = 1$.

Теорема 19. *Если распределение* Φ *принадлежит пространству* $\mathbb{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R},X)$, *то множество* $\Lambda(\Phi)\backslash\{0\}$ *содержится в непрерывном спектре распределения* Φ *и* $\Lambda_{ess}(\Phi) \subset \{0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Росс, К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2 / К. Росс, Э. Хьюитт. — М. : Мир, 1975. — 899 с.

2. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 3–54.

3. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2016. — 152 с.

4. Баскаков, А. Г. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, И. И. Струкова, И. А. Тришина // Сиб. матем. журн. — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 293–308.

5. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // СМФН. — 2004. — Т. 9. — С. 3–151.

6. Баскаков, А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 1978. — Т. 24, № 2. — С. 195–206.

7. Баскаков, А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 2. — С. 174–190.

8. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. – М. : МГУ, 1978.

9. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68, № 1. — С. 77–128.

10. Baskakov, A. Harmonic analysis of functions periodic at infinity / A. Baskakov, I. Strukova // Eurasian Math. J. — 2016. — V. 7, № 4. — P. 9–29.

11. Струкова, И. И. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы / И. И. Струкова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 161–165.

12. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 1. — С. 186–198.

13. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1981. — 250 с.

14. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 535 с.

15. Винер, Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н. Винер. — М. : Физматлит, 1963. — 256 с.

REFERENCES

1. Ross K.A.,Hewitt E. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. [Ross K., X'yuitt E. Abstraktnyyj garmonicheskiyj analiz. T. 2]. Moscow: Mir, 1975, 899 p.

2. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. [Baskakov A.G., Krishtal I.A. Garmonicheskiyj analiz kauzal'nyx operatorov i ix

spektral'nye svoyjstva]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 3–54.

3. Baskakov A.G. Harmonic analysis in Banach modules and linear operators spectral theory. [Baskakov A.G. Garmonicheskiyj analiz v banaxovyx modulyax i spektral'naya teoriya lineyjnyx operatorov]. Voronezh: VSU, 2016, 152 p.

4. Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. [Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. Pochti periodicheskie na beskonechnosti resheniya differencial'nyx uravneniyj s neogranichennymi operatornymi koefficientami]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 293–308.

5. Baskakov A.G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. [Baskakov A.G. Teoriya predstavleniyj banaxovyx algebr, abelevyx grupp i polugrupp v spektral'nom analize lineyjnyx operatorov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 9, pp. 3–151.

6. Baskakov A.G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. [Baskakov A.G. Spektral'nye kriterii pochti periodichnosti resheniyj funkcional'nyx uravneniyj]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1978, vol. 24, no. 2, pp. 195–206.

7. Baskakov A.G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. [Baskakov A.G. Garmonicheskiyj i spektral'nyyj analiz operatorov s ogranichennymi stepenyami i ogranichennyx polugrupp operatorov na banaxovom prostranstve]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 174–190.

8. Levitan B.M., Zhikov V.V. Almost periodic functions and differential equations. [Levitan B.M., ZHikov V.V. Pochti-periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya]. Moscow: MSU, 1978.

9. Baskakov A.G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. [Baskakov A.G. Issledovanie lineyjnyx differencial'nyx uravneniyj metodami spektral'noyj teorii raznostnyx operatorov i lineyjnyx otnosheniyj]. *Uspexi matematicheskix nauk — Uspexi matematicheskix nauk*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 77–128.

10. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J., 2016, vol. 7, no. 4, pp. 9–29.

11. Strukova I.I. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. [Strukova I.I. Spektry algebr medlenno menyayushhixsya i periodicheskix na beskonechnosti funkciyj i banaxovy predely]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 161–165.

12. Strukova I.I. About Wiener theorem for periodic at infinity functions. [Strukova I.I. O teoreme Vinera dlya periodicheskix na beskonechnosti funkciyj]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 186–198.

13. Vladimirov V.S. Mathematical physics equations. [Vladimirov B.C. Uravneniya matematicheskoyj fiziki]. Moscow: Nauka, 1981, 250 p.

14. Daletsky Yu.L., Krein M.G. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. [Daleckiyj Yu.L., Kreyjn M.G. Ustoyjchivost' resheniyj differencial'nyx uravneniyj v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, Moscow, 1970, 535 p.

15. Viner N. The Fourier integral and certain of its applications. [Viner N. Integral Fur'e i nekotorye ego prilozheniya]. Moscow, 1963, 256 p.

Струков Виктор Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета ПММ, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com
Тел.: 8–908–131–68–75

Strukov Victor Evgenievich, Ph. D., research associate of System analysis and management faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics department, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com
Tel.: 8–908–131–68–75

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления факультета ПММ, Воронежсский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Тел.: 8–904–212–77–49

Strukova Irina Igorevna, Ph. D., research associate of System analysis and management faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics department, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: irina.k.post@yandex.ru
Tel.: 8–904–212–77–49