

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ С РЕЛЕЙНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

М. Е. Семенов^{2,3,4}, П. А. Мелешенко^{1,2}, О. О. Решетова²

¹ — ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,

² — Воронежский государственный университет,

³ — Воронежский государственный технический университет,

⁴ — ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба
Российской академии наук»

Поступила в редакцию 03.10.2016 г.

Аннотация. В настоящей работе изучаются резонансные свойства систем, в которых “подкачка” энергии обусловлена наличием гистерезисного звена. Исследуются неограниченные решения автономных систем с гистерезисными звеньями с отрицательным спином. Также исследуется влияние гистерезисного звена на осциллятор с сухим и вязким трением. В рамках представленной работы удалось установить существование автоколебательных режимов как в условиях сухого, так и вязкого трения. Отдельная часть работы посвящена синхронизации периодических автоколебаний гармонической внешней силой. Используя метод малого параметра примененный к задаче о “захвате” частоты внешнего гармонического воздействия автономной системой с гистерезисом удалось показать, что ширина полосы захвата напрямую зависит от интенсивности (амплитуды) внешнего воздействия.

Ключевые слова: резонансные свойства, гистерезисная система, автоколебания, сухое и вязкое трение, метод малого параметра.

UNBOUNDED AND DISSIPATIVE OSCILLATIONS IN SYSTEMS WITH RELAY-TYPE NONLINEARITIES

M. E. Semenov, P. A. Meleshenko, O. O. Reshetova

Abstract. In this paper we study the resonance properties of oscillating system in the case when the energy pumping is made by external source of hysteretic nature. We investigate the unbounded solutions of autonomous oscillating system with hysteretic block with a negative spin. The influence of a hysteretic block on an oscillator in the presence of Coulomb and viscous friction is also investigated. Namely, we establish the appearance of self-oscillating regimes for both kinds of friction. A separate part of this work is devoted to synchronization of periodic self-oscillations by a harmonic external force. Using the small parameter approach it is shown that the width of “catching” band directly depends on the intensity (amplitude) of the external impact.

Keywords: resonance properties, hysteretic system, self-oscillations, Coulomb and viscous friction, small parameter approach.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейности гистерезисного типа возникают в задачах математического моделирования из самых разных предметных областей: в моделях систем автоматического регулирования [1],

[2], [3], теории твердого тела [4], [5], при описании экономических [6], [7] и биологических систем. При анализе систем с гистерезисом возникает ряд сложностей, связанных с недифференцируемостью операторов, являющихся составляющими конструктивных моделей гистерезисных явлений, сложностью фазового пространства соответствующих систем, включающего в себя пространство состояний гистерезисных преобразователей и т. д. Поэтому в последние годы общеупотребительным стал подход, связанный с использованием феноменологических, многопараметрических моделей, достаточно качественно описывающих гистерезисные связи. В частности, в статьях Ikhouane F., Rodellar J. [8], [9] приводится подробное описание гистерезиса посредством феноменологической модели Боука–Вена. Это хорошо известная модель, способная достаточно точно идентифицировать широкий круг гистерезисных эффектов. Популярность этой модели обуславливается ее способностью представлять в аналитической форме гистерезисные циклы, отвечающие поведению широкого класса систем с гистерезисом. В работах Aristotel E. Charalampakis [10], [11] представлен новый метод идентификации параметров модели Боука–Вена, основанный на гибридном эволюционном алгоритме, использующем стохастические операторы. Предлагаемый метод демонстрирует эффективность, надежность и нечувствительность к искаженным шумовой компонентой данным, в то время как он точно идентифицирует как гистерезисное, так и вязкое демпфирование на основе натуральных экспериментов. Эффективность указанного метода исследуется в отношении информационного содержимого входных и выходных данных. В статье [12] предложено описание явления рассеивания энергии в рамках гистерезисной модели Боука–Вена, при этом гистерезисные параметры описываются в терминах гипергеометрических функций Гаусса. Такое представление позволяет в аналитической форме описать диссипацию энергии при симметричном циклическом возбуждении, основываясь исключительно на параметрах модели и амплитуде внешнего воздействия. В статье M. Belhaq, A. Fahsi [13] приводятся интересные результаты о влиянии гистерезисных нелинейностей на внутренние резонансы порядка 3:1 в системе Ван-дер-Поля. При этом аналитические результаты были получены в рамках теории возмущений и метода малого параметра. Также отметим цикл работ W. Lacarbonara, F. Vestroni [14], [15], [17] в которых рассматриваются системы с различными режимами движения, в частности переходы от периодичности к квазипериодичности и хаос в системах с гистерезисом. Рассматриваются три модели гистерезиса: модель Боук–Вена, модель Маделунга (Массинга), а также феноменологическая модель, описывающая упруго-пластические свойства сплавов с памятью. Первые две независимые от скорости модели не учитывают теплопередачи, в то время как в третьем случае учитываются термодинамические преобразования. Показано, что эти системы имеют сходные сценарии потери устойчивости. В работах [15], [16], [17] гистерезисные свойства системы описываются посредством модели Боука–Вена, идентификация параметров которой проводится экспериментальным образом, что является косвенным доказательством универсальности этой феноменологической модели. Здесь же устанавливается взаимосвязь между влиянием вынуждающих сил различной природы и откликом системы. Отметим также работу Покровского А. В. [18], в которой рассматривается динамика осциллятора с сильной (в том числе и гистерезисной) нелинейностью, исследуется его фазовый портрет и геометрические свойства решений. Доказывается, что форма периодического решения зависит от “происхождения” сильной нелинейности. Также рассматриваются системы, в которых заведомо реализуются корректные (не зависящие от “происхождения” нелинейности, имеющие достаточно большие зоны захвата). Основным результатом этой работы является тот факт, что для класса уравнений, описывающих гармонические колебания с резонансной внешней силой и гистерезисным оператором в правой части, устанавливается наличие или отсутствие неограниченных решений в зависимости от амплитуды внешнего воздействия. Отметим также работу [19], посвященную диссипативности систем обыкновенных дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями. В этой статье доказывается, что

в случае гармонического возбуждения осциллятора с гистерезисной силой формализуемой посредством оператора Преизаха, резонанс будет иметь место лишь для гармонических сил с достаточно большой амплитудой. Доказывается диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением и достаточно широкой петлей гистерезиса, указана простая явная оценка. Доказано отсутствие субгармоник больших амплитуд при сколь угодно узкой петле.

В настоящей работе изучаются резонансные свойства систем, в которых “подкачка” энергии в систему обусловлено наличием гистерезисного звена [20], [21], [22], [23]. Примерами таких систем являются колебания ферромагнитного шарика в магнитном поле, колебание систем связанных осцилляторов, находящихся под воздействием сил, гистерезисным образом зависящих от смещения. Отдельно отметим, что подобные модели находят естественное приложение в физике твердого тела при моделировании межатомных взаимодействий с учётом различного рода дефектов, возникающих вследствие старения и износа материала. Исследуются неограниченные решения автономных систем с гистерезисными звеньями с отрицательным спином. Также исследуется влияние гистерезисного звена на осциллятор с сухим и вязким трением. В рамках работы удалось установить возникновение автоколебательных режимов в системах с сухим и вязким трением.

Отдельная часть работы посвящена синхронизации периодических автоколебаний гармонической внешней силой [24], [25]. Это явление впервые было обнаружено и объяснено для томпсоновского генератора с синусоидальным воздействием. В последствии этот эффект оказался наблюдаем в системах различной природы таких, как радиотехнические и электронные устройства, лазеры, а также в ряд механических систем и др. Другое название рассматриваемого явления — “захват частоты”, что отвечает изменению частоты автоколебаний под действием внешней силы. Суть этого эффекта заключается в следующем: если в правую часть системы, в которой реализуются устойчивые автоколебания, ввести гармоническое слагаемое, то при наличии определенной связи между амплитудой и частотами автоколебаний и внешней силы возможна реализация колебаний на частоте вынуждающей силы. Результаты в этой области получены лишь для систем с функциональными нелинейностями. Ситуация, когда автоколебания возникают в системах с операторными, в частности гистерезисными нелинейностями к настоящему моменту не рассматривалась. Цель представленной работы, используя метод малого параметра примененный к задаче о “захвате” частоты внешнего гармонического воздействия автономной системы с гистерезисом показать, что полоса “захвата” напрямую зависит от интенсивности (амплитуды) внешнего воздействия.

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СПИНОМ

Рассмотрим систему, динамика которой описывается задачей Коши следующего вида:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= R[\alpha, \beta, \omega_0]x \\ x(0) = x_0; \dot{x}(0) &= x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

где $R[\alpha, \beta, \omega_r]$ — оператор неидеального реле с отрицательным спином, а ω_0 — начальное состояние. Подробное описание его свойств приводится в фундаментальной монографии Красносельского М. А. [26].

Теорема. Пусть начальное значение удовлетворяет условию $x_0 \notin [\alpha, \beta]$. Тогда отвечающее ему решение неограничено.

Доказательство. Для упрощения выкладок положим $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Предположим, что начальные условия $x_0 < -1$, тогда на некотором начальном промежутке времени ($t \geq 0$) решение уравнения (1) будет иметь вид $x_0 = A_1 \cos(t + \varphi_0) + 1$, $0 \leq t \leq t_0$, где t_1 момент времени при котором выполняется равенство $x(t_1) = 1$. Очевидно, что такой момент существует. Решение уравнения (1) на промежутке $[t_1, t_2]$ будет определяться соотношением

$x_1(t) = A_1 \cos(t + \varphi_1)$. Здесь t_2 момент времени, при котором будет выполнено $x_1(t_2) = -1$. Также несложно показать, что такой момент времени существует, так как ($x_1(t_1) = 1$, то $A_1 \geq 1$) и т. д.

Таким образом, при отсутствии переключений решение уравнения (1) будет “склеено” из функций с соотношением:

$$x_n(t) = A_n \cos(t + \varphi_n) + 1$$

и при нечетных n :

$$x_{n+1}(t) = A_{n+1} \cos(t + \varphi_{n+1})$$

Из условия непрерывности решения и его производной в точке t_n (момент достижения правого порогового значения) вытекают равенства:

$$\begin{cases} A_n \cos(\varphi_n) + 1 = A_{n+1} \cos(\varphi_{n+1}), \\ -A_n \sin(\varphi_n) = -A_{n+1} \sin(\varphi_{n+1}), \\ A_n \cos(\varphi_n) + 1 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Возводя первое и второе уравнение системы (2) в квадрат и складывая их, получим:

$$\begin{cases} A_n^2 \cos^2(\varphi_n) + 2A_n \cos(\varphi_n) + 1 = A_{n+1}^2 \cos^2(\varphi_{n+1}), \\ A_n^2 \sin^2(\varphi_n) = A_{n+1}^2 \sin^2(\varphi_{n+1}), \\ A_n \cos(\varphi_n) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} A_n^2 + 2A_n \cos(\varphi_n) + 1 = A_{n+1}^2, \\ A_n \cos(\varphi_n) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

складываем уравнения системы и получаем:

$$A_n^2 + 1 = A_{n+1}^2 \quad (5)$$

Аналогично, для следующего промежутка, в точке, в которой решение принимают значения -1 будет иметь:

$$\begin{cases} A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) = A_{n+2} \cos(\varphi_{n+3}) + 1, \\ -A_{n+1} \sin(\varphi_{n+2}) = -A_{n+2} \sin(\varphi_{n+3}), \\ A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) = -1. \end{cases} \quad (6)$$

Возведем в квадрат первые два уравнения системы:

$$\begin{cases} A_{n+1}^2 \cos^2(\varphi_{n+2}) - 2A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) + 1 = A_{n+2}^2 \cos^2(\varphi_{n+3}), \\ A_{n+1}^2 \sin^2(\varphi_{n+2}) = A_{n+2}^2 \sin^2(\varphi_{n+3}), \\ A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) = -1. \end{cases} \quad (7)$$

Далее суммируем их:

$$\begin{cases} A_{n+1}^2 - 2A_{n+1} \cos(\varphi_{n+2}) + 1 = A_{n+2}^2, \\ A_n \cos(\varphi_n) = -1. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляем значения в первое уравнение, получаем:

$$A_{n+2}^2 = A_{n+1}^2 + 3. \quad (9)$$

Тогда из (8) и (9) вытекает:

$$A_{n+2}^2 = A_n^2 + 4.$$

Иначе говоря, верно следующее утверждение: как только начальное значение таково, что гистерезисное звено, “срабатывает”, то соответствующее ему решение неограничено. Результаты компьютерного моделирования представлены на следующих рисунках.

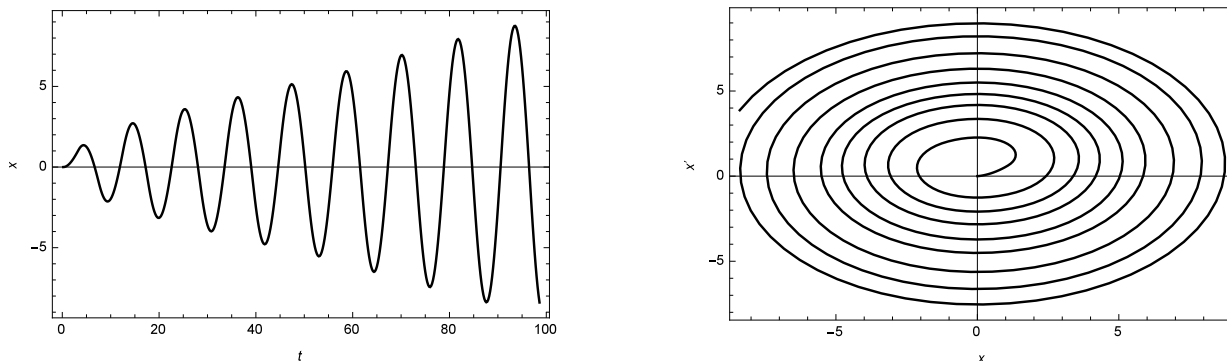


Рис. 1. Решение и фазовый портрет уравнения (1) с заданными начальными условиями.

Замечание 1. Отметим, что решение будет осциллировать и при этом скорость роста амплитуды будет пропорционально \sqrt{t} .

Замечание 2. Теорема остается верной и для других гистерезисных нелинейностей. Единственное требование к ним заключается в положительности площади петли и обходе петли по часовой стрелке.

СИСТЕМЫ С СУХИМ И ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Естественным обобщением рассматриваемой системы является система с различными видами трения (сухого и вязкого).

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = R[\alpha, \beta, \omega_0]x; \tag{10}$$

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = x_1.$$

В дальнейшем будем считать, что пороговые числа неидеального реле симметричны относительно начала координат. Рассматривая динамику решения, можно отметить, что, как только амплитуда решения становится достаточно велика, то работа силы трения уравнивает энергию, полученную осциллятором от гистерезисного преобразователя. Рассмотрим 2 случая, связанных с различным видом корней характеристического уравнения линейной части уравнения (10).

Рассмотрим уравнение (10) с заданными начальными условиями

$$\ddot{x}^+ + 2b\dot{x}^+ + \omega^2 x^+ = 1; \tag{11}$$

$$\ddot{x}^- + 2b\dot{x}^- + \omega^2 x^- = -1. \tag{12}$$

Рассмотрим первый случай. Решение уравнения будет иметь вид:

$$x^+(t) = \frac{1}{\omega^2} + C_1 \exp \left[t \left(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2} \right) \right] + C_2 \exp \left[t \left(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2} \right) \right]. \tag{13}$$

Очевидно, что $\frac{1}{\omega^2}$ будет являться его асимптотическим пределом, поэтому в случае выполнения неравенства $\alpha < \frac{1}{\omega^2}$, $\beta > -\frac{1}{\omega^2}$ при некотором T , будет выполнено равенство $x^+ = -\alpha$. Дальнейшая динамика будет определяться посредством уравнения со значение преобразователя неидеального реле $-\alpha = -1$. Рассуждая аналогичным образом, легко установить, что при некотором T_1 решение примет значение α . В силу автономности уравнений полученные

таким образом решения будет являться периодическими. Период найдем из следующих соотношений,

$$x^+(t) = C_1 \exp(t\lambda_1) + C_2 \exp(t\lambda_2), \quad (14)$$

$$x^-(t) = C_3 \exp(t\lambda_3) + C_4 \exp(t\lambda_4), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(1 + \omega^2) (-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ C_2 &= \frac{(1 + \omega^2) (b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ C_3 &= -\frac{(-1 + \omega^2) (-b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ C_4 &= -\frac{(1 + \omega^2) (b + \sqrt{b^2 - \omega^2})}{2\omega^2 \sqrt{b^2 - \omega^2}}, \\ \lambda_1 = \lambda_3 &= -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}, \\ \lambda_2 = \lambda_4 &= -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом период колебания будет определять соотношение [17]:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - \omega^2}}. \quad (17)$$

Рассмотрим второй случай, когда корни характеристического уравнения линейной части уравнения (10) являются комплексно-сопряженными. Тогда решение уравнения с начальными условиями можно записать в следующем виде:

$$x(t) = \exp(-bt) [B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)] - \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (18)$$

где $\omega = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$.

Учитывая начальные условия, получим:

$$-\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1 + \omega_0^2}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2} \exp(-bt) \sin \left[\omega t + \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{\omega}\right)^2}} \right) \right] = 1. \quad (19)$$

Полупериод можно определить как решение трансцендентного уравнения (19). Фазовый портрет и решение представлены на рисунке. Отметим, что при заданных значениях параметра $b = 1$ происходит бифуркация, соответствующая резкому изменению периода.

Рассмотрим колебания осциллятора с сухим трением и гистерезисным внешним воздействием, описываемые следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \eta \text{sign}(\dot{x}) + x = R[\alpha, \beta, \omega_0]x. \quad (20)$$

Умножая обе части уравнения (20) на \dot{x} и интегрируя по периоду T получим:

$$\int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + x^2) = -\eta \text{sign}(\dot{x}) \dot{x} + \dot{x} R[\alpha, \beta, \omega_0]x, \quad (21)$$

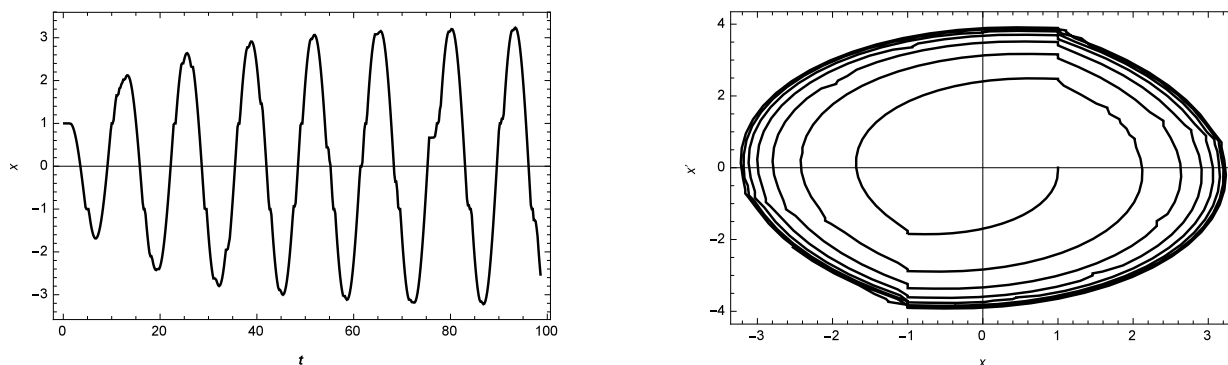


Рис. 2. Решение и фазовый портрет уравнения (10) с заданными начальными условиями.

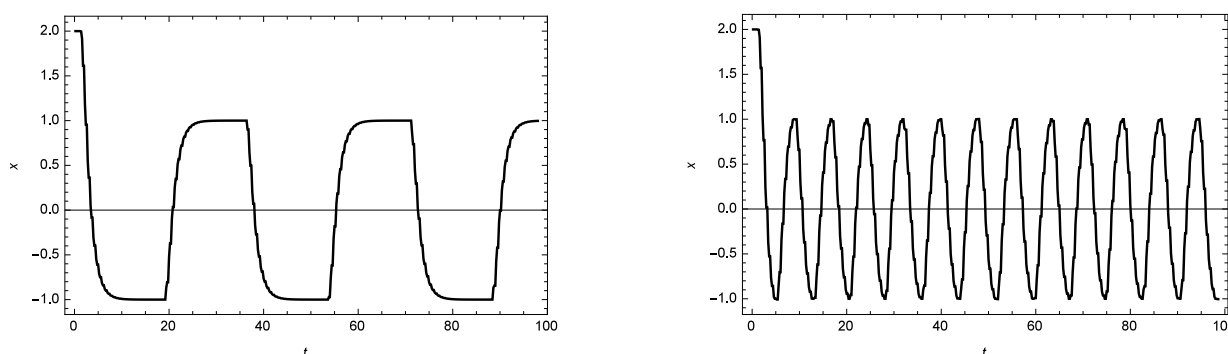


Рис. 3. Колебания в системе(10) при $b = 0.9$ и $b = 1.1$.

$$\Delta E = -\eta \int_0^T |\dot{x}| dt + S_p. \quad (22)$$

Из соотношения (22) следует, что приращение энергии будет положительно, если работа сил трения будет меньше площади петли и отрицательна-в противном случае. Таким образом изучаемую систему можно трактовать, как систему с отрицательной обратной связью. Отметим, что на установившихся режимах будет выполнено соотношение $2(x_{max} - x_{min})\eta = S_p$, что означает, что амплитуда колебаний будет такова, что работа силы трения на периоде будет равна площади петли.

Как видно из представленных результатов, гармонический осциллятор с сухим и вязким трением, находящийся под воздействием гистерезисной внешней силы существенно отличается от классической модели гармонического осциллятора, где в независимости от начальных условий, система совершает затухающие колебания около положения равновесия.

“ЗАХВАТ” ЧАСТОТЫ В СИСТЕМЕ С РЕЛЕЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ: МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Синхронизация периодических автоколебаний гармонической внешней силой давно изученное явление, сформулировать которое можно следующим образом. Как только частота внешнего воздействия становится близка к частоте свободных автоколебаний, происходит синхронизация (“захват”) частоты. Рассмотрим автоколебательную систему с одной степенью

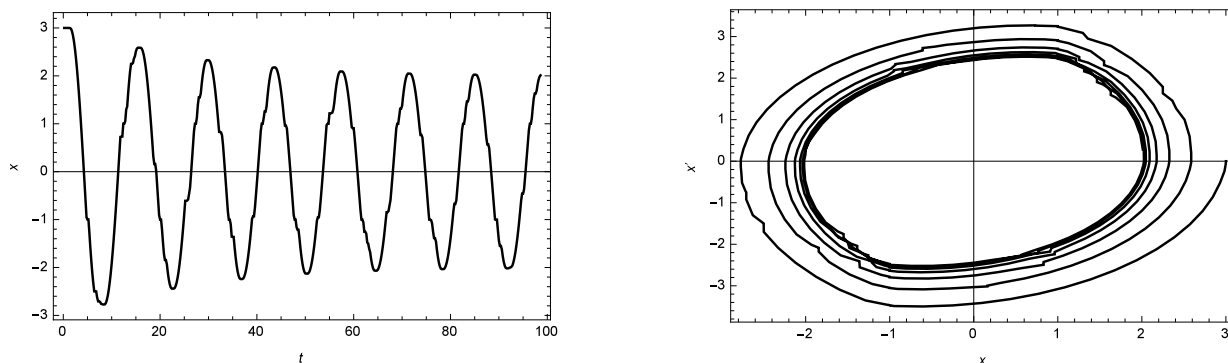


Рис. 4. Колебания в системе(20) при $\eta = 0.5$.

свободы, находящейся под воздействием периодической внешней силы с частотой ω , которая близка к частоте свободных автоколебаний.

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = R[\alpha, \beta, \omega_r]x + B_1 \sin \omega t. \quad (23)$$

Для анализа динамических особенностей такой системы используется метод малого параметра, позволяющий провести идентификацию процесса “захвата” частоты внешнего гармонического воздействия автономной системой с гистерезисом. Для этого перепишем исходное уравнение в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(-2b\dot{x} + R[\alpha, \beta, \omega_r]x + B_1 \sin \omega t), \quad (24)$$

где ε – малый параметр. Решение уравнения будем искать в следующем виде:

$$x = A \cos \psi + \varepsilon u_1(A, \psi) + \dots, \quad (25)$$

где $\psi = \omega t + \varphi(t)$, а $u_1(A, \psi)$ – неизвестные функции, не содержащие резонансных слагаемых. A и φ – амплитуда и фаза колебаний, соответственно, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\dot{A} = \varepsilon f_1(A, \varphi) + \dots; \quad \dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon F_1(A, \varphi) + \dots, \quad (26)$$

а $\Delta = \omega - \omega_0$ – расстройка частоты. F_1, f_1 – неизвестные функции, которые подлежат определению из условия отсутствия резонансных слагаемых в функции u_1 . Подставляя общий вид решения в исходное уравнение, с учетом уравнений для амплитуды и фазы колебаний. Используя описанные определения найдем \dot{x} и \ddot{x} :

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \dot{\psi} + \varepsilon \dot{u}_1 \omega; \quad (27)$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} \cos \psi - 2\dot{A} \sin \psi \dot{\psi} - A \cos \psi \dot{\psi}^2 - A \sin \psi \ddot{\psi} + \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2. \quad (28)$$

Подставим полученные выражения в левую часть уравнения (24), а также используем уравнения (25):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \ddot{A} \cos \psi - 2\dot{A} \sin \psi \dot{\psi} - A \cos \psi \dot{\psi}^2 - A \sin \psi \ddot{\psi} + \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2 + \\ &+ \omega_0^2 A \cos \psi + \omega_0^2 \varepsilon u_1 = \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2 + \omega_0^2 \varepsilon u_1 - (2\dot{A} \dot{\psi} + A \ddot{\psi}) \sin \psi + \\ &+ (\ddot{A} - A \dot{\psi}^2 + \omega_0^2 A) \cos \psi = \\ &= \varepsilon \ddot{u}_1 \omega^2 + \omega_0^2 \varepsilon u_1 - (2\varepsilon f_1(-\Delta + \varepsilon F_1) + A(-\Delta + \varepsilon F_1)) \sin \psi + \\ &+ (\varepsilon \dot{f}_1 - A(-\Delta + \varepsilon F_1)^2 + \omega_0^2 A) \cos \psi; \end{aligned} \quad (29)$$

Для правой части уравнения (24) аналогично получим:

$$\begin{aligned} & \varepsilon (-2b\dot{x} + R[\alpha, \beta, \omega_r]x + f(t)) = \\ & = \varepsilon \left(R[\alpha, \beta, \omega_r]x - 2b \left(\dot{A} \cos \psi - A \sin \psi \dot{\psi} + \varepsilon u_1 \omega \right) + f(t) \right) = \\ & = \varepsilon (R[\alpha, \beta, \omega_r]x - 2b\varepsilon f_1 \cos \psi + 2bA (-\Delta + \varepsilon F_1) \sin \psi + \varepsilon u_1 \omega + f(t)). \end{aligned} \quad (30)$$

приравнивая в правой и левой частях слагаемые одного порядка малости, получаем уравнение для определения неизвестной функции u_1 :

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 u_1 = \left(2\omega_0 f_1 - A \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \Delta \right) \sin \psi + \left(2\omega_0 A F_1 - A \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \Delta \right) \cos \psi - AR[\alpha, \beta, \omega_r]x \cos \psi + f(t). \quad (31)$$

Из условия отсутствия резонансных членов в функции $u_1(A, \psi)$ (равенство нулю множителей при гармонических функциях) получим следующие уравнения для неизвестных функций F_1, f_1 :

$$2f_1 - A \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = -2\beta A - \frac{B_1}{\omega} \sin \varphi, 2AF_1 + \frac{\Delta}{\omega_0} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = AR[\alpha, \beta, \omega_r]x - \frac{B_1}{\omega} \cos \varphi. \quad (32)$$

Частное решение такой системы имеет вид:

$$f_1 = -\beta A - \frac{B_1 \sin \varphi}{\omega + \omega_0}, F_1 = \frac{R[\alpha, \beta, \omega_r]x}{2} - \frac{B_1 \cos \varphi}{A(\omega + \omega_0)}. \quad (33)$$

Тогда в первом приближении по ε из (33) и (25), а также с учетом условия $u_1(A, \psi) = 0$ будем иметь:

$$\dot{A} = -\beta A - \frac{B_1 \sin \varphi}{\omega + \omega_0}, \dot{\varphi} = -\Delta + \frac{R[\alpha, \beta, \omega_r]x}{2} - \frac{B_1 \cos \varphi}{A(\omega + \omega_0)}. \quad (34)$$

Численные значения амплитуды и фазы представлены на рисунке 5.



Рис. 5. Амплитуда и фаза колебаний.

Амплитуда и фаза колебаний, а также амплитудно-фазовый портрет представлен на рисунках 5, 6. Для амплитудно-фазового портрета системы (34) характерно сложное поведение, с множеством самопересечений.

На рисунке 7 представлено численное решение системы (23) совместно с графиком возмущающей силы, а также поведением системы без внешнего воздействия.

Как следует из представленных численных результатов, при “переключении” неидеально го реле график решения перестает быть гладкой функцией. Анализируя полученное решение, можно отметить, что помимо основных гармоник оно содержит и гармоники меньшей амплитуды. Для наглядности синхронизации периодических автоколебаний отдельно приведем график, отражающий внешнее возмущение, а также график поведения системы (23) без внешнего воздействия.

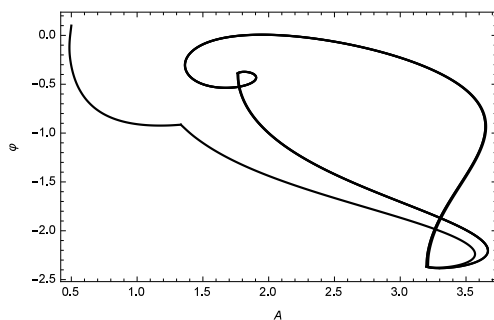


Рис. 6. Амплитудно-фазовая характеристика уравнения(34).

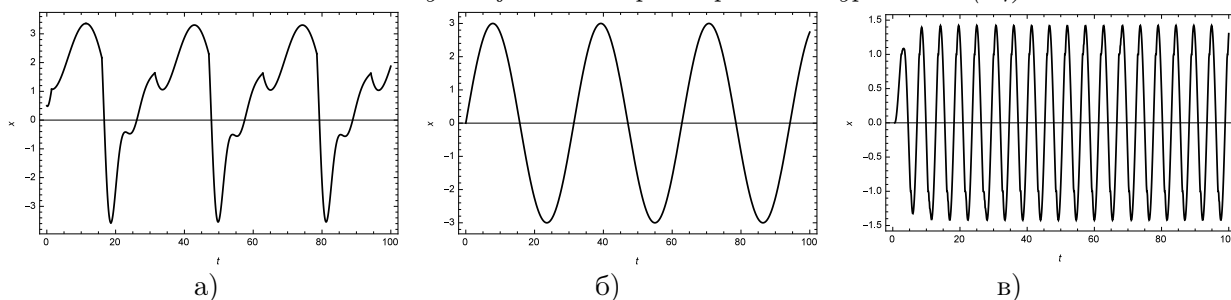


Рис. 7. а) Численное решение исходной системы (23); б) Возмущающая сила; в) Поведение системы без внешнего возмущения.

Отметим, что явление синхронизации частоты свободных автоколебаний с частотой внешнего воздействия осуществимо и для систем содержащих гистерезисную нелинейность. С ростом амплитуды внешнего воздействия происходит увеличение интервала частоты(Δ), при котором происходит “захват”. Рисунок 8 отражает зависимости амплитуды внешней силы от частоты периодического воздействия, при которой происходит “захват” внешних частот системой.

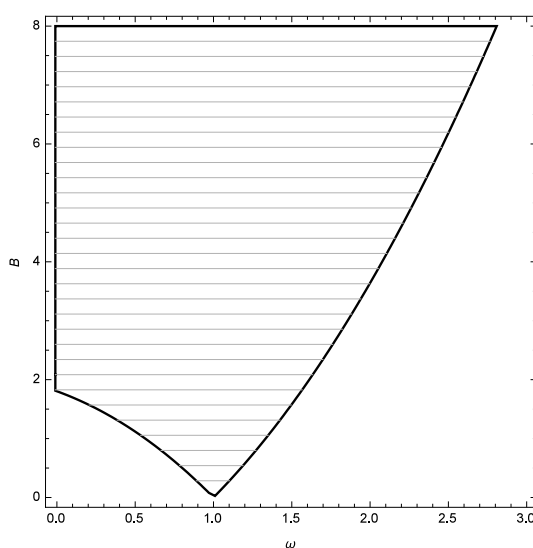


Рис. 8. Область захвата частоты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе изучены резонансные свойства автономных систем, в которых "подкачка" энергии обусловлена наличием звена с гистерезисными свойствами. Исследованы неограниченные решения дифференциальных уравнений отвечающих автономным системам, содержащими гистерезисные звенья с инверсией пороговых чисел. Рассмотрены случаи сухого и вязкого трения для рассматриваемой системы и установлено возникновение автоколебательных режимов. Применяется метод малого параметра при исследовании задачи о "захвате" частоты внешнего гармонического воздействия для систем с функциональными нелинейностями. Показано, что полоса "захвата" однозначно зависит от амплитуды внешнего воздействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов, М. Е. О континуумах вынужденных устойчивых периодических режимов в системах с гистерезисными нелинейностями / М. Е. Семенов // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 8. — С. 82–86.
2. Барабанов, Н. Е. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью / Н. Е. Барабанов, В. А. Якубович // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 12. — С. 5–12.
3. Покровский, А. В. Вынужденные устойчивые периодические режимы в системах с монотонными нелинейностями / А. В. Покровский, М. Е. Семенов // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 2. — С. 31–37.
4. Якубович, В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными стационарными блоками / В. А. Якубович // Автоматика и телемеханика. — 1967. — № 6. — С. 5–30.
5. Lian, C. Dynamic hysteresis loop in a ferroelectric heterostructure / C. Lian, C. Haiying, L. Yuchun // Chinese Journal of Physics. — 2018. — P. 185–192.
6. Cross, R. Unemployment: natural rate epicycles or hysteresis? / R. Cross // Working Papers 1402, University of Strathclyde Business School. — 2014.
7. Hysteresis in the fundamentals of macroeconomics / R. Cross, H. McNamara, L. Kalachev, A. Pokrovskii // Working Papers 1008, University of Strathclyde Business School, Department of Economics. — 2010.
8. Ikhoulane, F. Systems with hysteresis: analysis, identification and control using the Bouc-Wen model / F. Ikhoulane, J. Rodellar. — John Wiley & Sons, 2007.
9. Ikhoulane, F. On the Hysteretic Bouc-Wen Model / F. Ikhoulane, J. Rodellar // Nonlinear Dynamics. — 2005. — P. 63–78.
10. Charalampakis, A. E. Identification of Bouc–Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm / A. E. Charalampakis, V. K. Koumoussis // Journal of Sound and Vibration. — 2008. — P. 571–585.
11. Charalampakis, A. E. A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates / A. E. Charalampakis, V. K. Koumoussis // Journal of Sound and Vibration. — 2009. — P. 954–968.
12. Charalampakis, A. E. On the response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model / A. E. Charalampakis, V. K. Koumoussis // Journal of Sound and Vibration. — 2008. — P. 887–895.
13. Belhaq, M. Hysteresis suppression for primary and subharmonic resonances using fast excitation / M. Belhaq, A. Fahsi // Nonlinear Dynamics. — 2009. — P. 275–287.
14. Lacarbonara, W. Nonlinear Phenomena in Hysteretic Systems / W. Lacarbonara, F. Vestroni // Procedia IUTAM. — 2012. — P. 69–75.
15. Carboni, B. Nonlinear Vibration Absorber with Pinched Hysteresis: Theory and Experiments / B. Carboni, W. Lacarbonara // Journal of Engineering Mechanics. — 2016.

16. Carboni, B. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: Experiments and computations / B. Carboni, W. Lacarbonara // *Nonlinear Dynamics*. — 2016. — P. 23–39.
17. Carboni, B. Hysteretic Beam Model for Steel Wire Ropes Hysteresis Identification / B. Carboni, C. Mancini, W. Lacarbonara // *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*. — 2015. — P. 261–282.
18. Красносельский, М. А. Математическая теория систем / М. А. Красносельский. — М. : Наука, 1986.
19. Красносельский, А. М. Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением / А. М. Красносельский, А. В. Покровский // *Автоматика и телемеханика*. — 2006. — № 2. — С. 57–69.
20. Charged Inverted Pendulum as a New Model for Control of Enstable System / M. E. Semenov, P. A. Meleshenko, V. A. Gorlov et. al. *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*. — 2016. — P. 1938–1942.
21. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems / A. M. Solovyov, M. E. Semenov, P. A. Meleshenko et. al. // *Procedia Engineering*. — 2017. — V. 201. — P. 578–583.
22. Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами / М. Е. Семенов, М. Г. Матвеев, Г. Н. Лебедев, А. М. Соловьёв // *Мехатроника, автоматизация, управление*. — 2017. — № 8. — С. 516–525.
23. Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве / В. И. Ряжских, М. Е. Семенов, А. Г. Рукавицын и др. // *Вестник ЮУрГУ. Серия : Математика. Механика. Физика*. — 2017. — Т. 9, № 3. — С. 41–50.
24. Ланда, П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П. С. Ланда. — М. : Наука, 1980.
25. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Физматгиз, 1958.
26. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука, 1983.

REFERENCES

1. Semenov M.E. On continua of forced stable periodic regimes in control systems. [Semenov M.E. O kontinuumakh vyzhuzhdennykh ustoyjchivyx periodicheskix rezhimov v sistemax s gisterezisnymi nelinejnostyami]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 1994, no. 8, pp. 82–86.
2. Barabanov N.E., Yakubovich V.A. Absolute stability of control systems having one hysteresis-like nonlinearity. [Barabanov N.E., Yakubovich V.A. Absolyutnaya ustoyjchivost' sistem regulirovaniya s odnoy gisterezisnoj nelinejnost'yu]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 1979, no. 12, pp. 5–12.
3. Pokrovskii A.V., Semenov M.E. Stable periodic regimes in control systems with monotone nonlinearities. [Pokrovskiy A.V., Semenov M.E. Vynuzhdennye ustoyjchivye periodicheskie rezhimy v sistemax s monotonnymi nelinejnostyami]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 1990, no. 2, pp. 31–37.
4. Yakubovich V.A. Frequency conditions of absolute stability of control systems with several nonlinear or linear stationary blocks. [Yakubovich V.A. Chastotnye usloviya absolyutnoi ustoychivosti sistem upravleniya s neskol'kimi nelineynymi ili lineynymi nestatsionarnymi blokami]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 1967, no. 6, pp. 5–30.
5. Lian C., Haiying C., Yuchun L. Dynamic hysteresis loop in a ferroelectric heterostructure. *Chinese Journal of Physics*, 2018, pp. 185–192.
6. Cross R. Unemployment: natural rate epicycles or hysteresis? Working Papers 1402, University of Strathclyde Business School, 2014.

7. Cross R., McNamara H., Kalachev L., Pokrovskii A. Hysteresis in the fundamentals of macroeconomics. Working Papers 1008, University of Strathclyde Business School, Department of Economics, 2010.
8. Ikhoulane F., Rodellar J. Systems with hysteresis: analysis, identification and control using the Bouc-Wen model. John Wiley & Sons, 2007.
9. Ikhoulane F., Rodellar J. On the Hysteretic Bouc-Wen Model. *Nonlinear Dynamics*, 2005, pp. 63–78.
10. Charalampakis A.E., Koumousis V.K. Identification of Bouc–Wen hysteretic systems by a hybrid evolutionary algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, pp. 571–585.
11. Charalampakis A.E., Koumousis V.K. A Bouc–Wen model compatible with plasticity postulates. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, pp. 954–968.
12. Charalampakis A.E., Koumousis V.K. On the response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, pp. 887–895.
13. Belhaq M., Fahsi A. Hysteresis suppression for primary and subharmonic resonances using fast excitation. *Nonlinear Dynamics*, 2009, pp. 275–287.
14. Lacarbonara W., Vestroni F. Nonlinear Phenomena in Hysteretic Systems. *Procedia IUTAM*, 2012, pp. 69–75.
15. Carboni B., Lacarbonara W. Nonlinear Vibration Absorber with Pinched Hysteresis: Theory and Experiments. *Journal of Engineering Mechanics*, 2016.
16. Carboni B., Lacarbonara W. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: Experiments and computations. *Nonlinear Dynamics*, 2016, pp. 23–39.
17. Carboni B., Mancini C., Lacarbonara W. Hysteretic Beam Model for Steel Wire Ropes Hysteresis Identification. *Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis*, 2015, pp. 261–282.
18. Krasnosel'skii M.A. Mathematical theory of systems. [Krasnosel'skii M.A. *Matematicheskaya teoriya sistem*]. Moscow: Nauka, 1986.
19. Krasnosel'skii A.M., Pokrovskii A.V. Dissipativity of a nonresonant pendulum with ferromagnetic friction. [Krasnosel'skii A.M., Pokrovskii A.V. *Dissipativnost' nerezonansnogo mayatnika s ferromagnitnym treniyem*]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2006, no. 2, pp. 57–69.
20. Semenov M.E., Meleshenko P.A., Gorlov V.A., Rukavitsyn A.G., Reshetova O.O., Abbas Z.H., Nguyen H.T.T., Klinskikh A.F. Charged Inverted Pendulum as a New Model for Control of Enstable System. *Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*, 2016, pp. 1938–1942.
21. Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O., Popov M.A., Kabulova E.B. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 201, P. 578–583.
22. Semenov M.E., Matveev M.G., Lebedev G.N., Solovyov A.M. Stabilization of an inverse flexible pendulum with hysteresis properties. [Semenov M.E., Matveev M.G., Lebedev G.N., Solovyov A.M. *Stabilizatsiya obratnogo gibkogo mayatnika s gisterezisnymi svoystvami*]. *Mexatronika, avtomatizatsiya, upravlenie — Mechatronics, Automation, Control*, 2017, no. 8, pp. 516–525.
23. Ryazhskikh V.I., Semenov M.E., Rukavitsyn A.G., Kanischeva O.I., Demchuk A.A., Meleshenko P.A. Stabilization of the reverse pendulum on a two-wheeled vehicle. [Ryazhskikh V.I., Semenov M.E., Rukavitsyn A.G., Kanischeva O.I., Demchuk A.A., Meleshenko P.A. *Stabilizatsiya obratnogo mayatnika na dvukhkolesnom transportnom sredstve*]. *Vestnik YuUrGU. Seriya: Matematika. Mexanika. Fizika — Bulletin of the South Ural State University, series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 27–33.
24. Landa P.S. Self-oscillations in systems with a finite number of degrees of freedom. [Landa P.S. *Avtokolebaniya v sistemakh s konechnym chislom stepeney svobody*]. Moscow: Nauka, 1980.

25. Landau L.D., Lifshitz E.M. Mechanics. [Landau L.D., Lifshic E.M. Mexanika]. Moscow, 1958.

26. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with Hysteresis. [Krasnosel'skiyj M.A., Pokrovskiyj A.V. Sistemy s gisterezisom]. Moscow: Nauka, 1983.

*Семенов Михаил Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета; профессор кафедры математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета, ведущий научный сотрудник ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба Российской академии наук», Воронеж, Россия
E-mail: mkl150@mail.ru*

*Semenov Mikhail E., Leading researcher Geophysical Survey of Russia Academy of Sciences; Digital Technologies Department, Voronezh State University, Mathematics Department, Voronezh State Technical University, Prof., senior professor, Voronezh, Russia
E-mail: mkl150@mail.ru*

*Решетова Ольга Олеговна, аспирант кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: tribunskih1993@mail.ru*

*Reshetova Olga O., Post-graduate student of the Department of digital technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: tribunskih1993@mail.ru*

*Мелешенко Петр Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры 122 средств связи (и авиационных комплексов связи) ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия; доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: melechrp@yandex.ru*

*Meleshenko Peter A., Communication Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Voronezh; Digital Technologies Department, Voronezh State University, PhD, docent, Voronezh, Russia
E-mail: melechrp@yandex.ru*