

# ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ СВОБОДНОГО РАСТЕКАНИЯ БУРНОГО ПОТОКА ИЗ БЕЗНАПОРНОЙ ТРУБЫ В ШИРОКОЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ РУСЛО

И. В. Папченко

*Донской государственный аграрный университет*

Поступила в редакцию 13.09.2016 г.

**Аннотация.** Настоящая работа является первым этапом в решении задачи свободного растекания бурного потока за безнапорными прямоугольными трубами с учетом сил сопротивления потоку. Целью работы является создание общей схемы решения задачи, вывод основных уравнений в дифференциальном и интегральном видах, дискретных алгоритмических форм для конечно-разностных уравнений, а также систем алгебраических уравнений следующих из этих форм. Решение задачи численными методами сравнили с аналитическими методами и отладили численную модель, методы построения которой будут использоваться в дальнейшем при учете сил сопротивления потоку. В работе показана общая схема решения задачи, то есть метод определения параметров потока в узлах выделенных автором точечных шаблонов.

**Ключевые слова:** свободное растекание бурного водного потока, силы сопротивления, плоскость годографа скорости, численные методы.

## NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE STATIONARY PROBLEM FREE FLOW TURBULENT FLOW OF BENAMOR NOI PIPES IN A WIDE HORIZONTAL DIRECTION

I. V. Papchenko

**Abstract.** The present work is the first step in solving the problem of free flow turbulent flow for gravity rectangular pipes with the force of the flow resistance. The aim of this work is the establishment of a General scheme of the solution of the basic equations in differential and integral forms, discrete algorithmic form for the finite-difference equations and systems of algebraic equations following from these forms. The solution by numerical methods were compared with analytical methods and developed a numerical model, methods of construction which will be used in the future when taking into account the forces of resistance to flow. The work shows a General scheme of solving the problem, that is, the method of determining the flow parameters at the nodes selected by the author of point patterns.

**Keywords:** free flowing turbulent water flow, resistance forces, the plane of the hodograph of the velocity, numerical methods.

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является первым этапом в решении задачи свободного растекания бурного потока за безнапорными прямоугольными трубами с учетом сил сопротивления потоку. Целью работы является создание общей схемы решения задачи, вывод основных уравнений в дифференциальном и интегральном видах, дискретных алгоритмических форм для конечно-разностных уравнений, а также систем алгебраических уравнений следующих из этих форм.

Настоящая работа является первым подготовительным этапом в решении задачи с учетом сил сопротивления потоку. В работах [1–3] решена граничная задача свободного растекания потока аналитическими методами. Поэтому решение задачи численными методами можно сравнивать с аналитическими методами и отладить численную модель, методы построения которой будут использоваться в дальнейшем при учете сил сопротивления потоку. В работе [4] была предпринята попытка решения указанной граничной задачи численными методами, но до практического использования результатов модель не была доведена. К тому же в работе рассматривалась сразу же нестационарная задача, а автор предлагает решать задачи от простой к сложной.

## 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ РАСТЕКАЮЩЕГОСЯ ПОТОКА

Исходя из общих законов механики плановых потоков автором использовалась следующая система интегральных уравнений [5]:

$$\oint_{\Gamma} (\Pi dy - \Phi dx) = - \int_S \psi dx dy, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  — произвольная замкнутая кривая в плоскости  $Oxy$ ;  $S$  — фигура в плоскости  $Oxy$ , ограниченная кривой  $\Gamma$ ;  $\Pi$ ,  $\Phi$ ,  $\psi$  — вектора имеющие вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} Vh \cos \theta \\ V^2 h \cos^2 \theta + \frac{gh^2}{2} \\ V^2 h \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} Vh \sin \theta \\ V^2 h \sin \theta \cos \theta \\ V^2 h \sin^2 \theta + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \frac{\partial Z_d}{\partial x} + \frac{1}{2} \lambda V^2 \cos \theta \\ gh \frac{\partial Z_d}{\partial y} + \frac{1}{2} \lambda V^2 \sin \theta \end{bmatrix},$$

$V$  — модуль местной скорости жидкой частицы потока;  $h$  — глубина потока;  $\theta$  — угол, характеризующий направление вектора скорости;  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения;  $Z_d$  — отметка поверхности дна нижнего бьефа.

Полагая  $\psi \equiv 0$  и пользуясь формулой Грина [5], из (1) следует дивергентная форма дифференциального уравнения движения потока:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \psi = 0, \quad (2)$$

совпадающая с известным в справочной литературе уравнением [6].

Ограничимся случаем плоского дна, силы трения потоку не учитываем и движение потока считаем безвихревым

$$\Omega = 0. \quad (3)$$

В таком случае существует [1–3] интеграл Бернулли для двумерных в плане потенциальных потоков:

$$H_0 = \frac{V^2}{2g} + h, \quad (4)$$

где  $H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0$ ,  $V_0$ ,  $h_0$  — параметры потока на выходе из трубы. Тогда из уравнения (1) следует

$$\oint_{\Gamma} (\Pi dy - \Phi dx) = 0 \quad (5)$$

и граничная задача может быть сформулирована в виде (рис. 1).

*Формулировка граничной задачи.*

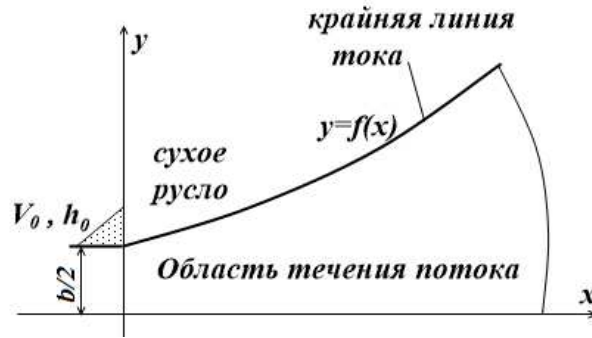


Рис. 1. План растекания потока.

1. Уравнение движения потока — уравнения (4) и (5).
2. На выходе потока из трубы:  $x = 0, -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \theta = 0,$

$$V = V_0, \quad h = h_0, \quad F_0 = \frac{V_0^2}{gh_0} > 1. \quad (6)$$

3. Вдоль границы потока  $y = f(x)$

$$y'_x = tg\alpha = tg\theta \quad (7)$$

и она отсекает половину всего расхода потока  $Q$  от оси симметрии.

4. На оси симметрии потока

$$\theta \equiv 0. \quad (8)$$

5. При  $x \rightarrow \infty$

$$h \rightarrow 0, \quad V \rightarrow V_{\max} = \sqrt{2gH_0}. \quad (9)$$

6. Вдоль крайней линии тока при  $x \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \theta \rightarrow \theta_{\max}$  из метода характеристик [7].

## 2. МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Для решения задачи используем аналитическое отображение верхней части потока (относительно оси  $Ox$ ) на прямоугольную полосу, посредством линейного преобразования:

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = \frac{y}{f(x)}. \quad (10)$$

Тогда ось  $Ox$  переходит в ось  $O\tilde{x}, \tilde{y} = 0$ . Граница  $y = f(x)$  переходит (рис. 2) в:

$$\tilde{y} = 1. \quad (11)$$

Перейдем в уравнении (1) к переменным  $\tilde{x}, \tilde{y}$ :

$$dx = d\tilde{x}, \quad dy = d\tilde{y} \cdot f(x) + f'_x \cdot \tilde{y} \cdot d\tilde{x}. \quad (12)$$

Тогда получим вместо (5) уравнение вида:

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} (\tilde{\Pi} d\tilde{y} - \tilde{\Phi} d\tilde{x}) = 0, \quad (13)$$

где  $\tilde{\Pi} = f(x) \cdot \Pi, \tilde{\Phi} = \Phi - \Pi \tilde{y} \cdot f'_x$ .

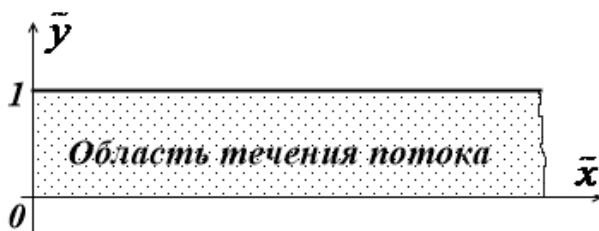


Рис. 2. Область течения потока.

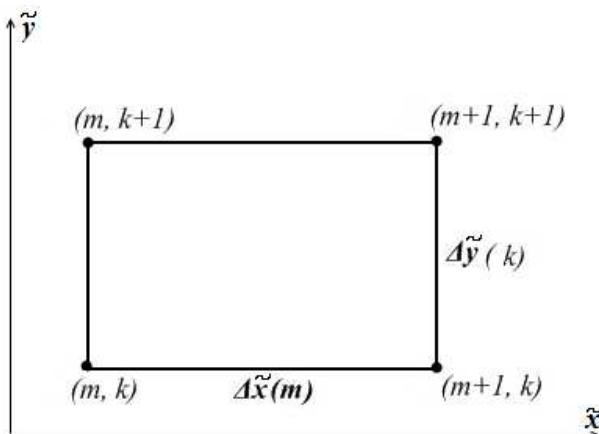


Рис. 3. Рассматриваемый шаблон.

Сами же вектора  $\Pi$  и  $\Phi$  имеют вид (1). Выделим в потоке элементарный точечный шаблон (рис. 3) и пометим каждую точку шаблона посредством индексов  $m, k$ .

Считая, что в точках  $(m, k), (m, k + 1), (m + 1, k)$  известны параметры потока и вдоль левой грани известно  $f(m)$ , необходимо определить параметры потока в точке  $(m + 1, k + 1)$  и  $f(m + 1)$ , если шаги  $\Delta \tilde{x}(m), \Delta \tilde{y}(k)$  — считаем известными,  $\tilde{y}$  — также известно. При разбиении вертикальной полосы на  $N$  равных контуров:

$$\Delta \tilde{y}(k) = \frac{1}{N}, \quad \tilde{y}(k) = \frac{k}{N},$$

$\Delta \tilde{x}(m)$  — считаем заданным,

где  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1; m = 0, 1, 2, \dots$

Тогда из уравнения (13) для четырехточечного шаблона (рис. 3) следует уравнение:

$$\tilde{\Pi}(m + 1, k + 1) + C\tilde{\Phi}(m + 1, k + 1) = \tilde{R}(m + 1, k + 1), \tag{14}$$

где  $C = \frac{\Delta \tilde{x}(m)}{\Delta \tilde{y}(k)}$ ;  $\tilde{R}(m + 1, k + 1) = \tilde{\Pi}(m, k) + \tilde{\Pi}(m, k + 1) - \tilde{\Pi}(m + 1, k) + C [\tilde{\Phi}(m, k) + \tilde{\Phi}(m + 1, k) - \tilde{\Phi}(m, k + 1)]$ .

С учетом выражения (13) для  $\tilde{\Pi}, \tilde{\Phi}$  из (14) получим:

$$f(m + 1) \cdot \Pi(m + 1, k + 1) + C \cdot [\Phi(m + 1, k + 1) - \Pi(m + 1, k + 1) \cdot \tilde{y}(m + 1, k + 1) \cdot \frac{f(m + 1) - f(m)}{\Delta \tilde{x}(m)}] = \tilde{R}(m + 1, k + 1) = \tilde{R}[f(m + 1)], \tag{15}$$

где  $\tilde{R}$  — это функция известных параметров в точках  $(m, k), (m, k + 1), (m + 1, k)$  и неизвестной функции  $f(m + 1)$ .

Преобразуя уравнение (15), получим:

$$\Pi(m+1, k+1) \left[ f(m+1) - C \cdot \tilde{y}(m+1, k+1) \cdot \frac{f(m+1) - f(m)}{\Delta \tilde{x}(m)} \right] + C \cdot \Phi(m+1, k+1) = \tilde{R}(m+1, k+1) \quad (16)$$

или

$$\Pi(m+1, k+1) + C^* \Phi(m+1, k+1) = \tilde{R}^*(m+1, k+1), \quad (17)$$

где  $C^* = \frac{C}{f(m+1) - C \cdot \tilde{y}(m+1, k+1) \cdot \frac{f(m+1) - f(m)}{\Delta \tilde{x}(m)}}$ ;

$$\tilde{R}^*(m+1, k+1) = \frac{\tilde{R}(m+1, k+1)}{f(m+1) - C \cdot \tilde{y}(m+1, k+1) \cdot \frac{f(m+1) - f(m)}{\Delta \tilde{x}(m)}}.$$

Решение уравнения (17) зависит от неизвестной величины  $f(m+1)$ . Считая  $f(m+1)$  известной, система (17) будет определена и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} Vh \cos \theta + C^* Vh \sin \theta = r_1, \\ V^2 h \cos^2 \theta + \frac{gh^2}{2} + C^* V^2 h \sin \theta \cos \theta = r_2, \\ V^2 h \sin \theta \cos \theta + C^* \left( V^2 h \sin^2 \theta + \frac{gh^2}{2} \right) = r_3. \end{cases} \quad (18)$$

где параметры в точке обозначены посредством  $V, h, \theta$ , а

$$\tilde{R}^*(m+1, k+1) = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Из системы (18) следует кубическое уравнение для определения глубины потока в точке  $(m+1, k+1)$ :

$$h^3 - \frac{2(r_2 + C^* r_3)}{g(1 + (C^*)^2)} h + \frac{2r_1^2}{g(1 + (C^*)^2)} = 0 \quad (20)$$

Это уравнение имеет три действительных корня. Выбрав корень, удовлетворяющий условию  $0 < h < h_0$ , возьмем его в качестве решения системы.

Заметим, что уравнение (20) при  $q > 0, Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$  имеем решение [5] в виде:

$$\begin{aligned} h_1 &= 2\sqrt{-p/3} \cos \frac{\alpha}{3}, \\ h_{2,3} &= -2\sqrt{-p/3} \cos \left( \frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \right), \quad \cos \alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $p = -\frac{2(r_2 + C^* r_3)}{g(1 + C^{*2})}, q = \frac{2r_1^2}{g(1 + C^{*2})}$ .

Из второго и третьего уравнений системы (18) следует выражение для угла  $\theta$  в точке 4:

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{r_3 - \frac{1}{2} C^* gh^2}{r_2 - \frac{1}{2} gh^2}. \quad (22)$$

Выражение для величины скорости следует из первого уравнения системы (18):

$$V = \frac{r_1}{h(\cos \theta + C^* \sin \theta)}. \quad (23)$$

Метод проведения нормировки  $V, h$ : вводим параметр  $\tau = V^2/(2gH_0)$ , тогда  $V = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}$ ,  $h = H_0(1 - \tau)$ . Если получили  $H = \frac{V^2}{2g} + h$ , а необходимо  $H_0 = \frac{V_{\text{нор}}^2}{2g} + h_{\text{нор}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} h &= H(1 - \tau_1); & \tau_1 &= 1 - \frac{h}{H}; \\ V &= \tau_2^{1/2}\sqrt{2gH}; & \tau_2 &= \frac{V^2}{2gH}. \end{aligned} \tag{24}$$

При этом  $\tau_{\text{нор}} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$  — скорректированное значение  $\tau$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} h_{\text{нор}} &= \frac{hH_0(1 - \tau_{\text{нор}})}{H(1 - \tau)}; & V_{\text{нор}} &= V\sqrt{\frac{H_0}{H}}\left(\frac{\tau_{\text{нор}}}{\tau}\right)^{1/2}; \\ \theta_{\text{нор}} &= \arctg \frac{r_3 - \frac{1}{2}C^*gh_{\text{нор}}^2}{r_2 - \frac{1}{2}gh_{\text{нор}}^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Расчет параметров потока проводим по полосам слева направо и снизу вверх (рис. 4).

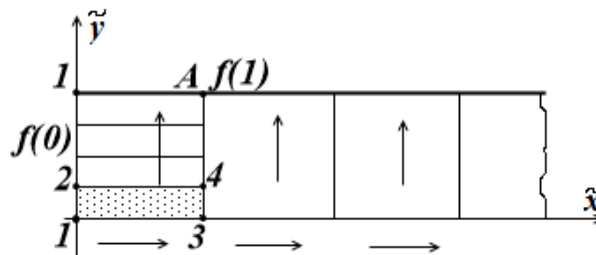


Рис. 4. Схема работы с шаблоном

Рассмотрим выделенный контур на рисунке 4. Для решения поставленной задачи недостаточно граничных условий. Естественное условие  $h = 0$  вдоль крайней линии тока не приводит к достаточной для практики ГТС водопропускных сооружений точности параметров потока. Поэтому для замыкания граничной задачи можно воспользоваться известными соотношениями из аналитического решения задачи. Их можно выбрать несколькими вариантами:

1. Считать закон распределения параметров потока известным вдоль оси симметрии потока:

$$x = x_D + \frac{Ah_0}{2H_0\sqrt{2gH_0}} \left[ \frac{1 + \tau}{\tau(1 - \tau)} - \ln \frac{1 - \tau}{\tau} - \frac{1 + \tau_0}{\tau_0(1 - \tau_0)} + \ln \frac{1 - \tau_0}{\tau_0} \right], \tag{26}$$

где  $A = \frac{V_0 b}{2 \sin \theta_{\text{max}}}$ ,  $\theta_{\text{max}} = C_1 + (\sqrt{3} - 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $C_1 = \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{1 - \tau_0}} - \sqrt{3} \arctg \sqrt{\frac{3\tau_0 - 1}{3(1 - \tau_0)}}$ ,  $\tau_0 = \frac{V_0^2}{2gH_0}$ ,  $x_D = \frac{b_0}{2} \text{tg} \frac{\theta_k}{2}$ ,  $\theta_k = \arcsin \frac{\sin \theta_{\text{max}}}{\tau_k^{1/2}(2 - \tau_k)}$ ,  $\tau_0 < \tau_k < 1$ .

2. Считать известным соотношение  $\frac{\sin \theta}{\tau^{1/2}} = \sin \theta_{\text{max}}$  вдоль крайней линии тока.

3. Считать известной крайнюю линию тока  $y = f(x)$ .

В настоящей работе остановимся на соотношении (26). Тогда задаваясь шагом  $\Delta \tilde{x} > x_D$ , определим из (26)  $\tau(\Delta \tilde{x})$  и далее  $h(\Delta \tilde{x})$ ,  $V(\Delta \tilde{x})$ . В верхней точке первой полосы  $A$  обозначим параметры  $\theta_1^*(\Delta \tilde{x})$ ,  $h_1^*(\Delta \tilde{x})$ ,  $V_1^*(\Delta \tilde{x})$ ,  $f_1(\Delta \tilde{x})$ . Пользуясь методом конечных разностей, воспользуемся соотношением:

$$\text{tg} \theta^*(\Delta \tilde{x}) = \frac{f_1(\Delta \tilde{x}) - f_0}{\Delta \tilde{x}}. \tag{27}$$

Следовательно,

$$f_1(\Delta \tilde{x}) = \text{tg} \theta^*(\Delta \tilde{x}) \cdot \Delta \tilde{x} + f_0. \tag{28}$$

Далее осуществим поиск  $\theta^*(\Delta \tilde{x}) = \theta_0 + \Delta \theta \cdot i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) так, чтобы выполнялось условие (27). Задаемся  $i$ , определяем параметры:  $V_A$ ,  $h_A$ ,  $\theta_A$ . Проверяем условие  $|\theta^*(\Delta \tilde{x}) - \theta_A| \rightarrow 0$ ,

$\theta^*(\Delta\tilde{x}) - \theta_A = f(\Delta x)$  и когда функция  $f(\Delta x)$  меняет свой знак, останавливаемся. Далее процесс повторяем, идя по второй вертикальной полосе снизу вверх и так далее. Результаты счета показывают хорошую сходимость между результатами численного решения задачи и результатами аналитического решения (рис. 5).

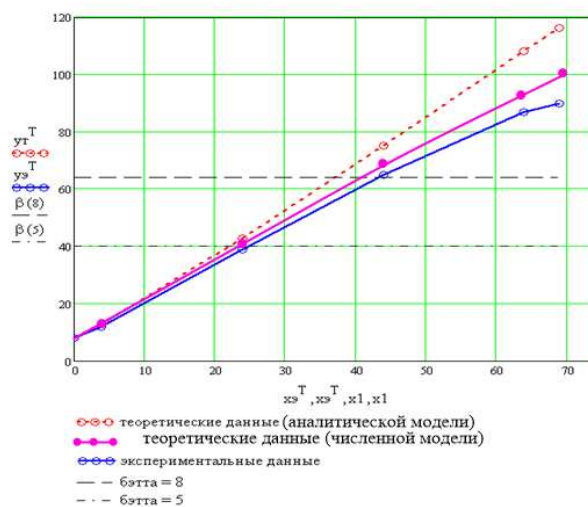


Рис. 5. Сравнение результатов численного и аналитического метода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод численного счета работает, как показывает программа, составленная в *MathCad* версии 11.0a и подтверждает хорошую сходимость с аналитической моделью и с экспериментальными данными. Подтверждена правильность построения модели и работы формул и уравнений. Развитие данного метода позволит рассчитать параметры потока с учетом сил сопротивления.

Решение задачи численными методами сравнили с аналитическими методами и отладили численную модель, методы построения которой будут использоваться в дальнейшем при учете сил сопротивления потоку. В работе показана общая схема решения задачи, то есть метод определения параметров потока в узлах выделенных автором точечных шаблонов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моделирование одномерных и двумерных открытых водных потоков / В. Н. Коханенко, Я. В. Волосухин, В. В. Ширяев, Н. В. Коханенко. — Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2007. — 168 с.
2. Моделирование бурных двумерных в плане водных потоков / В. Н. Коханенко, В. Я. Волосухин, М. А. Лемешко, Н. Г. Папченко. — Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2013. — 186 с.
3. Моделирование бурных двумерных в плане водных потоков аналитическими и численными методами / В. Н. Коханенко, М. Ф. Мицик, Н. Г. Папченко, И. В. Папченко. — п. Персиановский : Изд-во ДонГАУ, 2013. — 177 с.
4. Милитеев, А. Н. Метод расчета сопряжения бьефов в пространственных условиях / А. Н. Милитеев, Н. П. Тогунова // Гидравлика сооружений оросительных систем : тр. НИМИ. — 1976. — Т. 18, вып. 5. — С. 180—194.
5. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1970. — 720 с.
6. Емцев, Б. Т. Двухмерные бурные потоки / Б. Т. Емцев. — М. : Энергия, 1967. — 212 с.
7. Звягин, А. В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения ненью-

тоновой жидкости в неограниченной области / А. В. Звягин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.

8. Орлов, В. П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / П. В. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 2. — С. 190–197.

9. Орлов, В. П. Об одной априорной оценке решений неоднородной начально-краевой задачи динамики вязкоупругой среды / П. В. Орлов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 171–178.

10. Свиридова, Е. А. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости с переменной стационарной плотностью / Е. А. Свиридова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 133–140.

11. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

12. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

## REFERENCES

1. Kokhanenko V.N., Volosukhin J.C., Shiryaev V.V., Kokhanenko N.V. Modeling of one-dimensional and two-dimensional open water flows. [Kokhanenko V.N., Volosukhin J.C., Shiryaev V.V., Kokhanenko N.V. Modelirovanie odnomernyx i dvuxmernyx otkrytyx vodnyx potokov]. Rostov n/D, 2007, 168 p.

2. Kokhanenko V.N., Volosukhin C.J., Lemeshko M.A., Papchenko N.G. Modeling of turbulent two-dimensional in terms of water flows. [Kokhanenko V.N., Volosukhin C.J., Lemeshko M.A., Papchenko N.G. Modelirovanie burnyx dvuxmernyx v plane vodnyx potokov]. Rostov n/D, 2013, 186 p.

3. Kokhanenko V.N., Mytsyk M.F., Papchenko N.G., Papchenko I.C. Modeling of turbulent two-dimensional in terms of water flows by analytical and numerical methods. [Kokhanenko V.N., Mytsyk M.F., Papchenko N.G., Papchenko I.C. Modelirovanie burnyx dvuxmernyx v plane vodnyx potokov analiticheskimi i chislennymi metodami]. p. Persianovskaya, 2013, 177 p.

4. Militias A.N., Logunova N.P. Method of calculation mates pounds in spatial terms. [Militias A.N., Logunova N.P. Metod rascheta sopryazheniya b'efov v prostranstvennykh usloviyax]. *Gidravlika sooruzheniy orositel'nyx sistem — Hydraulics structures Orosition systems*, 1976, vol. 18, iss. 5, pp. 180–194.

5. Korn G., Korn T. Handbook of mathematics for scientists and engineers. [Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyx rabotnikov i inzhenerov]. Moscow: Nauka, 1970, 720 p.

6. Emtsev B.T. Two-Dimensional turbulent flows. [Emcev B.T. Dvuxmerye burnye potoki]. Moscow: Energy, 1967, 212 p.

7. Zvyagin A.V. the Study of the solvability of a stationary motion models minutesaway fluid in unlimited area. [Zvyagin A.V. Issledovanie razreshimosti odnoy stacionarnoy modeli dvizheniya nen'yutonovoy zhidkosti v neogranichennoy oblasti]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 118–121.

8. Orlov V.P. Strong a priori estimates of solutions of the inhomogeneous initial-boundary value problem of a single model of viscoelastic environment. [Orlov V.P. Sil'nye apriornye ocenki resheniy neodnorodnoy nachal'no-kraevoy zadachi odnoy modeli vyazkouprugoy sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 190–197.



9. Orlov V.P. About one an a priori estimate of solutions of the inhomogeneous initial-boundary value problem of the dynamics of a viscoelastic environment. [Orlov V.P. Ob odnoy apriornoy ocenke resheniy neodnorodnoy nachal'no-kraevoy zadachi dinamiki vyazkouprugoy sredy]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 171–178.

10. Sviridov E.A. Small oscillations of a viscous compressible fluid with variable stationary density. [Sviridova E.A. Malye kolebaniya vyazkoy szhimaemoy zhidkosti s peremennoy stacionarnoy plotnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 133–140.

11. Shabrov S.A. Adaptation of the finite element method for mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya matematicheskoy modeli s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2, pp. 153–164.

12. Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lilov E.V. About the adaptation of the method of finite elements for the solution of a boundary value problem with Stieltjes differentials on a geometric graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya resheniya granichnoy zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

Папченко Игорь Владимирович, старший преподаватель кафедры “Безопасности жизнедеятельности, механизации и автоматизации технологических процессов и производств” ФГБОУ ВО Донской государственной аграрной университет, поселок Персиановский, Октябрьский район, Ростовская область, Российская Федерация

E-mail: igorpapchenko@yandex.ru

Тел.: +7(919)885-18-38

Papchenko Igor Vladimirovich, senior lecturer of the Department Safety of life-activity, mechanization and automation of technological processes and productions Don State Agrarian University, the village Persianovskaya, Oktyabrsky district, Rostov region, Russian Federation

E-mail: igorpapchenko@yandex.ru

Tel.: +7(919)885-18-38