УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ AB И BA*

Д. Б. Диденко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.12.2016 г.

Аннотация. Для линейных ограниченных операторов A, B из банаховой алгебры линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве, доказаны ряд утверждений о совпадении свойств операторов $I_Y - AB$, $I_X - BA$, связанных с их ядрами и образами. В частности, установлена одинаковая размерность ядер, свойства одновременной их дополняемости, совпадение коразмерностей образов, установлено свойство их одновременной фредгольмовости (полуфредгольмовости) и совпадения индексов фредгольмовости. Построены проекторы на образ и ядро этих операторов. Установлено свойство одновременной неквазианалитичности операторов AB и BA. Исследование спектральных свойств операторов $I_Y - AB$ и $I_X - BA$ сводится к изучению спектральных свойств операторов, заданных операторными матрицами.

Ключевые слова: линейные ограниченный оператор, состояния обратимости, спектр, фредгольмовость, проектор.

SPECTRAL PROPERTIES OF OPERATORS AB AND BA

D. B. Didenko

Abstract. For linear bounded operators A, B from Banach algebra of bounded operators acted in Banach space series of results connected to kernel and image properties of operators $I_Y - AB, I_X - BA$ are proved. Particularly equality for kernel dimension, property of simultaneous augmentability, equality of image codimension, simultaneous possession of Fredholm property are proved. Projection operators onto image and kernel of this operators are found. It is proved that AB and BA are nonquasianalytic simultaneously. Research of $I_Y - AB$ and $I_X - BA$ operators spectral properties comes down to spectral properties research of linear operators defined by operator matrixes.

Keywords: linear bounded operator, inverse conditions, spectrum, Fredholm property, projection operator.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y. Через $\mathrm{End}\,X$ — обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих из X в X. X, Y — банаховы пространства. Рассмотрим операторы $A \in \mathrm{Hom}\,(X, Y)$ и $B \in \mathrm{Hom}\,(Y, X)$.

Из [1, Гл. 1, §1] и [2, §5] известно следующее равенство:

$$\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}.$$

Случай $0 \in \sigma(AB)$ подробно разобран и исследован в статье [3, теорема 6.5].

Возникает естественный вопрос о близости таких свойств операторов $I_Y - AB \in \mathrm{End}\,Y$ и $I_X - BA \in \mathrm{End}\,X$, как: совпадение размерности ядер, одновременной замкнутости образов, одновременной обратимости операторов. Для исследования таких вопросов введем в рассмотрение следующее важное понятие.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00197)

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор из $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Рассмотрим следующие условия:

1) $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{0\}$ (т.е. оператор $\mathcal{A}$ инъективен);

2) $1 \leqslant n = \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} < \infty$;

3) $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ — бесконечномерное подпространство из $\mathfrak{X}$ ($\dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \infty$);

4) $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ — дополняемое подпространство в $\mathfrak{X}$;

5) $\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{A}} = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$, что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора $\mathcal{A}$)
$$\gamma(\mathcal{A}) = \inf_{x \in \mathfrak{X} \setminus \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}} \frac{||\mathcal{A}x||}{dist(x, \mathrm{Ker}\,\mathcal{A})} = \inf_{y = \mathcal{A}x, x \notin \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}} \frac{||y||}{dist(x, \mathrm{Ker}\,\mathcal{A})},$$
где $dist(x, \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) = \inf\limits_{x_0 \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}} ||x - x_0||$;

6) $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ — замкнутое дополняемое в $\mathfrak{Y}$ подпространство;

7) оператор $\mathcal{A}$ корректен (равномерно инъективен), т.е. $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{0\}$ и $\gamma(\mathcal{A}) > 0$;

8) $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathfrak{Y}$ конечной коразмерности ($\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = m < \infty$);

9) $\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ — замкнутое дополняемое подпространство из $\mathfrak{Y}$ бесконечной коразмерности;

10) $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \mathfrak{Y}$, т.е. $\mathcal{A}$ — сюръективный оператор;

11) $\overline{\mathrm{Im}\,\mathcal{A}} \neq \mathfrak{Y}$;

12) оператор $\mathcal{A}$ непрерывно обратим, т.е. $\mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$.

Если для $\mathcal{A}$ выполнены все условия из совокупности условий $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 12$, то будем говорить, что оператор $\mathcal{A}$ находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{A}$ обозначим символом $\mathrm{St_{inv}}(\mathcal{A})$.

Данное определение было введено в статьях [4], [5], [6].

Для заданной пары операторов A и B рассматривается оператор $\mathbb{A} \in \mathrm{End}\,(Y \times X)$, заданный операторной матрицей
$$\widetilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} I_Y & A \\ B & I_X \end{pmatrix} \in \mathrm{End}\,(Y \times X), \tag{1}$$
т.е. $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (x_1 + Ax_2, Bx_1 + x_2)$, $(x_1, x_2) \in Y \times X$.

Кроме оператора $\mathbb{A}$ также будем рассматривать оператор $\mathbb{B} \in \mathrm{End}\,(X \times Y)$, заданный матрицей
$$\widetilde{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} I_X & B \\ A & I_Y \end{pmatrix}.$$

Операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ подобны
$$\mathbb{A} = \mathbb{J}\mathbb{B}\mathbb{J}^{-1},$$
где операторы $\mathbb{J} \in \mathrm{Hom}\,(X \times Y, Y \times X)$, $\mathbb{J}^{-1} \in \mathrm{Hom}\,(Y \times X, X \times Y)$ задаются с помощью матриц $\widetilde{\mathbb{J}} = \begin{pmatrix} 0 & I_Y \\ I_X & 0 \end{pmatrix}$ и $\widetilde{\mathbb{J}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_X \\ I_Y & 0 \end{pmatrix}$, и при этом
$$\widetilde{\mathbb{J}}\widetilde{\mathbb{J}}^{-1} = \begin{pmatrix} I_Y & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix} \in \mathrm{End}\,(Y \times X),$$

$$\widetilde{\mathbb{J}}^{-1}\widetilde{\mathbb{J}} = \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix} \in \mathrm{End}\,(X \times Y).$$

Для операторов $I_Y - AB \in \mathrm{End}\,Y$ и $I_X - BA \in \mathrm{End}\,X$ справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Множества состояний обратимости операторов $I_Y - AB \in \mathrm{End}\,Y$ и $I_X - BA \in \mathrm{End}\,X$ совпадают, т.е.*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(I_Y - AB) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(I_X - BA).$$

Утверждения теоремы 2, исключая свойства $4), 6), 9), 11)$, установлены в статье [7].

Определение 3. Оператор $\mathcal{B}$ из $\mathrm{End}\,\mathfrak{X}$ называется фредгольмовым, если его ядро $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ конечномерно, образ $\mathrm{Im}\,\mathcal{B}$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Число $\mathrm{ind}\,\mathcal{B} = \dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{B} - \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{B}$ называется индексом фредгольмова оператора $\mathcal{B}$.

Определение 4. Оператор $\mathcal{B}$ из $\mathrm{End}\,\mathfrak{X}$ называется полуфредгольмовым, если он находится в одном из состояний $\{2, 7, 9\}$ или $\{3,4,9\}$.

Следствие 5. *Оператор $I_Y - AB \in \mathrm{End}\,Y$ фредгольмов(полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмов(полуфредгольмов) оператор $I_X - BA \in \mathrm{End}\,X$, при этом их индексы совпадают.*

Следующие теоремы являются одними из основных результатов работы.

Теорема 6. *Пусть ядро оператора $I_Y - AB$ дополняемо в Y и $P_1 \in \mathrm{End}\,Y$ — проектор на ядро $\mathrm{Ker}\,(I_Y - AB)$. Тогда ядро оператора $I_X - BA$ также дополняемо в X и оператор $P_2 \in \mathrm{End}\,X$, определенный равенством $P_2 = BP_1T(I_X - BA) + BP_1A$, является проектором на ядро $\mathrm{Ker}\,(I_X - BA)$, где T — любой оператор из $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$.*

Теорема 7. *Пусть образ оператора $I_Y - AB$ замкнут и дополняем в Y и $P_1 \in \mathrm{End}\,Y$ — проектор на образ $\mathrm{Im}\,(I_Y - AB)$. Тогда образ оператора $I_X - BA$ также замкнут и дополняем в X и оператор $P_2 \in \mathrm{End}\,X$, определенный равенством $P_2 = I_X - B(I_Y - P_1)A - (I_X - BA)S(I_Y - P_1)A$, является проектором на образ $\mathrm{Im}\,(I_X - BA)$, где S — любой оператор из $\mathrm{Hom}\,(Y, X)$.*

Определение 8. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — комплексное банахово пространство, называется неквазианалитическим (см. [8]), если выполнено условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln||e^{-i\mathcal{A}t}||}{1+t^2}dt < \infty. \tag{2}$$

Отметим, что спектр неквазианалитического оператора $\mathcal{A}$ вещественный.

Свойства неквазианалитических операторов исследовалось в статьях [8], [9] и [10].

В следующей теореме X, Y — комплексные банаховы пространства.

Теорема 9. *Оператор $AB \in \mathrm{End}\,Y$ неквазианалитический тогда и только тогда, когда оператор $BA \in \mathrm{End}\,X$ неквазианалитический. Если при этом спектр $\sigma(AB)\backslash\{0\}$ (или $\sigma(BA)\backslash\{0\}$) оператора AB (или BA) содержит более одной точки, то операторы AB и BA будут иметь нетривиальные инвариантные подпространства.*

Отметим также работы [11], [12], [13], в которых изучались свойства операторов AB и BA. Стоит подчеркнуть, что одновременная дополняемость образов операторов $I_Y - AB$ и $I_X - BA$ вынесена как вопрос в статье [13], на который авторами не дается ответ. В данной работе одновременная дополняемость и совпадение коразмерностей образов операторов $I_Y - AB$ и $I_X - BA$ следует из теоремы 2.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Рассмотрим операторы $\mathbb{A}_1 \in \mathrm{End}\,(Y \times X)$ и $\mathbb{B}_1 \in \mathrm{End}\,(X \times Y)$, которые задаются с помощью матриц $\widetilde{\mathbb{A}_1} = \begin{pmatrix} I_Y - AB & 0 \\ 0 & I_X \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbb{B}_1} = \begin{pmatrix} I_X - BA & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}$.

Для матриц операторов $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{B}_1$ имеют место следующие равенства

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} I_Y & A \\ 0 & I_X \end{pmatrix} \widetilde{\mathbb{A}}_1 \begin{pmatrix} I_Y & 0 \\ B & I_X \end{pmatrix} = \widetilde{U}\widetilde{\mathbb{A}}_1\widetilde{V}, \tag{3}$$

$$\widetilde{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} I_X & B \\ 0 & I_Y \end{pmatrix} \widetilde{\mathbb{B}}_1 \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ A & I_Y \end{pmatrix} = \widetilde{U}_1\widetilde{\mathbb{B}}_1\widetilde{V}_1, \tag{4}$$

где матрицы $\widetilde{U}, \widetilde{U}_1$ и $\widetilde{V}, \widetilde{V}_1$ имеют обратные матрицы вида:
$\widetilde{U}^{-1} = \begin{pmatrix} I_Y & -A \\ 0 & I_X \end{pmatrix}$, $\widetilde{U}_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_X & -B \\ 0 & I_Y \end{pmatrix}$, $\widetilde{V}^{-1} = \begin{pmatrix} I_Y & 0 \\ -B & I_X \end{pmatrix}$,
$\widetilde{V}_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ -A & I_Y \end{pmatrix}$.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть операторы $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ и $\mathcal{B} \in \mathrm{End}\,\mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, связаны соотношением*

$$\mathcal{A} = U\mathcal{B}V,$$

где U и V — обратимые операторы из $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ и $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ соответственно. Тогда множество состояний обратимости операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают:

$$\mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{A}) = \mathrm{St}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{B}).$$

В силу построения оператора $\mathbb{A}_1$ мы можем утверждать, что множество состояний обратимости операторов $\mathbb{A}_1$ и $I_Y - AB$ ($\mathbb{B}_1$ и $I_X - BA$) совпадают. Таким образом, доказательство теоремы 2 и следствия 5 следует из равенств (3), (4), подобия операторов $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ и леммы 1. Данные результаты так же используются при доказательстве теорем 6 и 7. Для доказательства теоремы 9 используется *"условие Левинсона"* (см. [8, теорема 3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки, Н. Спектральная теория / Н. Бурбаки. — М., 1972. — 183 с.

2. Davies, E. B. Algebraic aspects of spectral theory / E. B. Davies // Mathematica. — 2011. — V. 57. — P. 63–88.

3. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов // Матем. сб. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3–42.

4. Баскаков, А. Г. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка / А. Г. Баскаков, А. Ю. Дуплищева // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 3–20.

5. Диденко, В. Б. О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями / В. Б. Диденко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2013. — Т. 77, № 1. — С. 5–22.

6. Диденко, В. Б. О состояниях обратимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами / В. Б. Диденко // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика, Информатика. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 136–144.

7. Barnes, B. A. Common operator properties of the liner operators RS and SR / B. A. Barnes // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — V. 126(4). — P. 1055–1061.

8. Любич, Ю. И. Об операторах с отделимым спектром / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев // Матем. сб. — 1962. — Т. 56(98), № 4. — С. 433–468.

9. Любич, Ю. И. О представлениях с отделимым спектром / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман // Функц. анализ и его прил. — 1973. — Т. 7, № 2. — С. 52–61.

10. Дикарев, Е. Е. Гармонический анализ некоторых классов линейных операторов в вещественном банаховом пространстве / Е. Е. Дикарев, Д. М. Поляков // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 5. — С. 670–680.

11. Harte, R. E. Spectral pictures of AB and BA / R. E. Harte, Y. O. Kim, W. Y. Lee // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — V. 134. — P. 105–110.

12. Chen, L. Common properties of operators RS and SR and p-hyponormal operators / L. Chen, Y. Zikun, R Yingbin // Integral Equations and Operator Theory. — 2002. — V. 43. — P. 1871–1884.

13. Zeng, Q. P. New results on common properties of bounded linear operators RS and SR / Q. P. Zeng, H. J. Zhong // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2013. — V. 29. — P. 1871–1884.

REFERENCES

1. Bourbaki N. Spectral Theory. [Burbaki N. Spektral'naya teoriya]. Moscow, 1972, 183 p.

2. Davies E.B. Algebraic aspects of spectral theory. Mathematica, 2011, vol. 57, pp. 63–88.

3. Baskakov A.G., Chernyshov K.I. Linear Relations, Differential Inclusions, and Degenerate Semigroups. [Baskakov A.G., Chernyshov K.I. Spectral'nyj analiz lineynjh otnoshenyj i vjyrojdennje polugruppjy operatorov]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 11, pp. 3–42.

4. Baskakov A.G., Duplischeva A.Yu. Difference operators and operator-valued matrices of the second order. [Baskakov A.G., Duplischeva A.Yu. Raznostnye operatory i operatornye matricy vtorogo poryadka]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 3–20.

5. Didenko V.B. On the continuous invertibility and the Fredholm property of differential operators with multi-valued impulse effects. [Didenko V.B. O nepreryvnoyj obratimosti i fredgol'movosti differencial'nyx operatorov s mnogoznachnymi impul'snymi vozdeyjstviyami]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 5–22.

6. Didenko V.B. About Reversibility States of Linear Differential Operators with Periodic Unbounded Operator Coefficients. [Didenko V.B. O sostoyaniyax obratimosti lineyjnyx differencial'nyx operatorov s neogranichennymi periodicheskimi koefficientami]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 136–144.

7. Barnes B.A. Common operator properties of the liner operators RS and SR. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, vol. 126, no. 4, pp. 1055–1061.

8. Lyubich Yu.I., Matsaev V.I. Operators with separable spectrum. [Lyubich Yu.I., Matsaev V.I. Ob operatorax s otdelimym spektrom]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1962, vol. 56 (98), no. 4, pp. 433–468.

9. Lyubich Yu.I., Matsaev V.I., Feldman G.M. On representations with a separable spectrum. [Lyubich Yu.I., Matsaev V.I., Feldman G.M. O predstavleniyax s otdelimym spektrom]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1973, vol. 7, no. 2, pp. 52–61.

10. Dikarev E.E., Polyakov D.M. Harmonic Analysis of Some Classes of Linear Operators on a Real Banach Space. [Dikarev E.E., Polyakov D.M. Garmonicheskiyj analiz nekotoryx klassov lineyjnyx operatorov v veshhestvennom banaxovom prostranstve]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 5, pp. 670–680.

11. Harte R.E., Kim Y.O., Lee W.Y. Spectral pictures of AB and BA. Proc. Amer. Math. Soc., 2005, vol. 134, pp. 105–110.

12. Chen L., Zikun Y., Yingbin R. Common properties of operators RS and SR and p-hyponormal operators. Integral Equations and Operator Theory, 2002, vol. 43, pp. 1871–1884.

13. Zeng Q.P., Zhong H.J. New results on common properties of bounded linear operators RS and SR. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2013, vol. 29, pp. 1871–1884.

Диденко Дмитрий Борисович, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: dmixtry@gmail.com
Тел.: +7(920)415–89–36

Didenko Dmitry Borisovich, postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dmixtry@gmail.com
Tel.: +7(920)415–89–36