УДК 517.633

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В. В. Гусаченко

Южный Федеральный университет

Поступила в редакцию 13.07.2016 г.

Аннотация. Для линейной параболической задачи произвольного порядка $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) с быстро осциллирующими по времени (высокочастотными) младшими коэффициентами и граничными условиями Дирихле доказано существование единственного $2\pi/\omega$–периодического по времени решения, а также построена и обоснована полная асимптотика этого периодического по времени решения. В работе предполагается, что собственный вектор–функция a_0, отвечающий нулевому собственному значению, не имеет обобщенных присоединенных (в смысле Вишика–Люстерника) векторов–функций относительно определенной пары операторов A и B. Коэффициент при старшем стационарном операторе предполагается вырожденным: имеет простое нулевое собственное значение.

Ключевые слова: параболическая задача, высокочастотные по времени коэффициенты, вырожденная предельная задача, полная асимптотика.

ASYMPTOTIC INTEGRATION OF A LINEAR PARABOLIC PROBLEM OF ARBITRARY ORDER WITH HIGH-FREQUENCY COEFFICIENTS IN THE CRITICAL CASE

V. V. Gusachenko

Abstract. For a linear parabolic problem of arbitrary order $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) with rapidly oscillating in time (high-frequency) lower coefficients and Dirichlet boundary conditions is proved the existence of a unique $2\pi/\omega$-periodic solution in time and a complete asymptotics of this time-periodic solution is constructed and justified. It is assumed that that own vector-valued function a_0 corresponding to the zero eigenvalue does not have generalized vector-valued functions (with respect to Vishik-Lyusternik) with respect to a definite pair of operators A and B. The coefficient of the highest stationary operator is assumed to be degenerate: it has a simple zero proper value.

Keywords: parabolic problem, high-frequency time coefficients, the degenerate limit problem, the full asymptotics.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах До Н. Т. и Левенштама В. Б. [1], [2] построены полные асимптотики периодических решений линейных нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими (высокочастотными) коэффициентами и вырожденной главной стационарной частью; последняя имеет простое нулевое собственное значение. В работе [3] для параболической задачи второго порядка с быстро осциллирующими по времени младшими коэффициентами была построена полная формальная асимптотика периодического по времени решения. Предельная стационарная задача при этом предполагалась вырожденной кратности один. Были рассмотрены два случая: собственная функция, отвечающая нулевому собственному значению, 1) не имеет обобщенных присоединенных (в смысле Вишика-Люстерника) функций относительно определенной пары операторов A, B (см. [4]); 2) имеет единственную обобщенную присоединенную функцию. В работах [5], [6] для случаев 1), 2) соответственно при определенных дополнительных условиях были доказаны существование и единственность периодического по времени решения задачи, а также построена и обоснована его полная асимптотика.

В данной работе доказано существование единственного $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодического по времени решения линейной параболической задачи произвольного порядка $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) с высокочастотными коэффициентами и граничными условиями Дирихле, а также построена и обоснована его полная асимптотика. Предполагается, что собственный вектор a_0, отвечающий нулевому собственному значению, не имеет обобщенных присоединенных векторов относительно определенной пары операторов A, B. В работе существенно используется методика работы [5], метод пограничного слоя [7], элементы теории параболических задач и теории полугрупп линейных операторов [8]–[10].

Автор выражает глубокую благодарность Валерию Борисовичу Левенштаму за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$; $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}$ — его боковая поверхность. В цилиндре $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о классических $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодических по времени t решениях линейного параболического уравнения порядка $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) с большим параметром ω и граничными условиями Дирихле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Big(L_0 + \dfrac{1}{\omega}L_1\Big)u(x,t) + \sum\limits_{1\leqslant|s|\leqslant m}\Big(g_s(x)u(x,t) + d_s(x)\Big)e^{is\omega t} + d_0(x), \\ u(x,t)|_\Gamma = \frac{\partial u(x,t)}{\partial\eta}\Big|_\Gamma = \dots = \frac{\partial^{k-1}u(x,t)}{\partial\eta^{k-1}}\Big|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь η — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$, L_0 и L_1 — дифференциальные выражения порядка $2k$, $k \in \mathbb{N}$ (см.ниже); $g_s(x)$, $d_0(x)$, $d_s(x)$ — бесконечно дифференцируемые на $\overline{\Omega}$ функции, причем $g_s(x), g_{-s}(x)$, $d_s(x)$ и $d_{-s}(x)$ — комплексно сопряжены, $1 \leqslant |s| \leqslant m$. Дифференциальные выражения L_0 и L_1 имеют вид:

$$L_0u(x) = \sum_{|\alpha|\ \leqslant 2k} a_\alpha^0(x)D^\alpha u(x),\ L_1u(x) = \sum_{|\alpha|\ \leqslant 2k} a_\alpha^1(x)D^\alpha u(x),$$

где

$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\ \text{ — мультииндекс},$$

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

a_α^0, a_α^1 — вещественные бесконечно дифференцируемые функции; для уравнения (1) выполнено условие параболичности, то есть при всех векторах $x \in \Omega$ и $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$(-1)^{k+1}\sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha^0(x){\xi_1}^{\alpha_1}\dots{\xi_n}^{\alpha_n} \geqslant 0.$$

Будем предполагать, что задача

$$\begin{cases} L_0 v(x) = 0, \\ v(x)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v(x)}{\partial\eta}\Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{k-1} v(x)}{\partial\eta^{k-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное нормированное в $L_2(\Omega)$ решение $a_0(x)$ ($||a_0||_{L_2(\Omega)} = 1$). Как известно [11, п. 6.2.3], в этом случае формально сопряженная задача

$$\begin{cases} L_0^* u(x) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u(x)}{\partial\eta}\Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{k-1} u(x)}{\partial\eta^{k-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

также имеет единственное нормированное в $L_2(\Omega)$ решение $z_0(x)$, причем

$$(a_0, z_0) \neq 0. \tag{2}$$

Предположим, что относительно пары L_0, L_1 собственная функция $a_0(x)$ не имеет об.присоединенных функций, т.е. задача

$$\begin{cases} L_0 u(x) = -L_1 a_0(x), \\ u(x)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u(x)}{\partial\eta}\Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{k-1} u(x)}{\partial\eta^{k-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

не имеет классических решений. Согласно альтернативе Фредгольма это утверждение равносильно соотношению:

$$\Big(L_1 a_0, z_0\Big) \neq 0. \tag{3}$$

В некоторой погранполоске области Ω перейдем к криволинейной системе координат. Точнее говоря, в области Ω выберем пограничную полоску Ω_η толщины η, и определим отображение $\partial\Omega \times [0,\eta] \to \overline{\Omega}_\eta$, действующее по закону: $(\psi, r) \to \psi + n_\psi r$, где ψ — точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату ψ, а n_ψ — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке ψ. Число η выберем столь малым, чтобы указанные нормали в Ω_η не пересекались. В погранполосе Ω_η сделаем замену переменных и перейдем к криволинейным координатам:

$$x = (\psi, r) = \left(\psi, \frac{\rho}{\sqrt[2k]{\omega}}\right), \ \rho = r\sqrt[2k]{\omega}.$$

В результате получим представление L_0, L_1 в криволинейных координатах (ψ, ρ). Выразим частные производные по x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, через частные производные по ψ_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и по ρ:

$$y(x,\tau) = y(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega t) = y(\psi(x_1, x_2, \dots, x_n), \rho(x_1, x_2, \dots, x_n), \omega t).$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Асимптотическое разложение $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодического по времени t решения задачи (1) будем строить в виде:

$$\begin{aligned} u(x,t) = (\omega^1 A_1 + \omega^{\frac{2k-1}{2k}} A_2 + \omega^{\frac{2k-2}{2k}} A_3 + \ldots + \omega^{\frac{1}{2k}} A_{2k}) a_0(x) + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \omega^{-\frac{i}{2k}} \Big(u_i(x) + w_i(\psi,\rho) + A_{2k+i+1} a_0(x) + \\ + y_i(x,\tau) + z_i(\psi,\rho,\tau)\Big), \ \tau = \omega t, \ \rho = r\sqrt[2k]{\omega}, \end{aligned} \tag{4}$$

здесь $A_p \in \mathbb{R}$, $p = \overline{1,\infty}$; $u_s : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ и $y_s : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ —регулярные функции, а $w_s(\psi,\rho)$ и $z_s(\psi,\rho,\tau)$ — погранслойные, то есть $w_s(\psi,\rho)|_{\rho=\infty} = 0$,

$z_s(\psi,\rho,\tau)|_{\rho=\infty} = 0$. При этом функции $y_s(x,\tau)$, $z_s(\psi,\rho,\tau)$ — 2π — периодичны по τ с нулевым по τ средним, то есть $\langle y_s(x,\cdot)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} y_s(x,\tau)d\tau = 0$, и $\langle z_s(\psi,\rho,\cdot)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} z_s(\psi,\rho,\tau)d\tau = 0$.

Прежде чем сформулировать основной результат, определим четыре типа линейных задач:

$$1)\ \begin{cases} L_0 u(x) = P(x), \\ (P(x),z_0(x)) = 0, \\ (u(x),z_0(x)) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u(x)}{\partial \eta}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ldots, \ \frac{\partial^{k-1} u(x)}{\partial \eta^{k-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{\partial y(x,\tau)}{\partial \tau} = f(x)e^{ik\tau}, \\ \langle y(x,\tau)\rangle = 0, k - \text{натуральное}; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^{2k} w(\psi,\rho)}{\partial \rho^{2k}} = B(\psi,\rho), \\ w(\psi,\rho)|_{\rho=\infty} = 0; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} l_0(\psi)\dfrac{\partial^{2k} g(\psi,\rho)}{\partial^{2k}\rho} - isg(\psi,\rho) = C(\psi,\rho), \\ g(\psi,\rho)|_{\rho=\infty} = 0, \\ g(\psi,\rho)|_{\rho=0} = g_0(x), \end{cases} \qquad s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \rho \in [0,\infty).$$

Здесь $l_0(\psi)$ — функция, определенная выше, $\psi \in \partial\Omega$ — параметр; $P(x)$, $f(x)$, $g_0(x)$ — известные бесконечно гладкие на $\overline{\Omega}$ и, соответственно, на $\partial\Omega$ функции; $B(\psi,\rho)$ и $C(\psi,\rho)$ — известные погранслойные квазимногочлены по ρ, коэффициенты которых зависят от ψ. Задачи этих четырех типов, очевидно, однозначно разрешимы.

Введем еще обозначение частичной суммы ряда (4):

$$u^p_\omega(x,t) = (\omega^1 A_1 + \omega^{\frac{2k-1}{2k}} A_2 + \omega^{\frac{2k-2}{2k}} A_3 + \ldots + \omega^{\frac{1}{2k}} A_{2k})a_0(x) + \\ + \sum_{s=0}^{p} \omega^{-\frac{s}{2k}}\Big(u_s(x) + w_s(\psi,\rho) + A_{2k+s+1}a_0(x) + \\ + y_s(x,\tau) + z_s(\psi,\rho,\tau)\Big),\ \tau = \omega t,\ \rho = r\sqrt[2k]{\omega}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Существует число $\omega_0 > 0$, при котором справедливы следующие утверждения.*

1. Задача (1) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное $\frac{2\pi}{\omega}$ - периодическое по времени t классическое вещественное бесконечно дифференцируемое решение $u_\omega(x,t)$.

2. Построение любой частичной суммы $u^p_\omega(x,t)$ ряда (4) сводится к решению конечного числа однозначно разрешимых задач вида 1)-4).

3. Ряд (4) является полным асимптотическим разложением решения $u_\omega(x,t), \omega \gg 1$. Более того, для любого $l \geqslant 0$ и любого целого $p \geqslant 0$ при $\omega \geqslant \omega_0$ справедлива оценка

$$||u_\omega - u^p_\omega||_{C^{l,\frac{l}{2k}}_{x,t}(Q)} \leqslant C_{p,l}\,\omega^{-\frac{p+1-l}{2k}}$$

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В этом разделе содержатся некоторые известные вспомогательные результаты, на которые мы опираемся в данной статье при доказательстве теоремы.

Рассмотрим задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения порядка $2k$

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha|\ \leqslant 2k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x), \tag{6}$$

где

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \ \text{ − мультииндекс}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u(x)}{\partial \eta}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \dots,\ \frac{\partial^{k-1} u(x)}{\partial \eta^{k-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Здесь Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с C^∞ — гладкой границей $\partial\Omega$, коэффициенты $a_\alpha \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ — вещественные функции и удовлетворяют условию эллиптичности.

В работе будем использовать следующие известные пространства вещественных функций: $C^l := C^l(\overline{\Omega})$, $H^0 \equiv L_2(\Omega)$, $H^i \equiv W_2^i(\Omega)$, $H_0^i \equiv W_{2,0}^i(\Omega)$, $i = \overline{1,2k}$.

Для всех функций $u \in H_0^{2k}$ справедливо неравенство коэрцитивности (см. [11]):

$$||u||_{H^{2k}} \leqslant c\Big(||Lu||_{H^0} + ||u||_{H^0}\Big), \tag{8}$$

где константа $c > 0$ не зависит от u.

Символом A_0 будем обозначать действующий в H^0 линейный оператор с областью определения $D(A_0) = H_0^{2k}$, $A_0 u = Lu$, $u \in D(A_0)$. Из (8) следует его замкнутость. Кроме того, согласно [8], существует такое число a_0, что $Re\lambda \geqslant a_0$ комплексной плоскости принадлежит резольвентному множеству оператора A_0, и справедлива оценка:

$$||(\lambda I - A_0)^{-1}|| \leqslant c(1 + |\lambda|)^{-1},\ Re\lambda \geqslant a_0, \tag{9}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от λ. Из (9) следует (см. [8], [9]), что оператор A_0 порождает аналитическую полугруппу линейных операторов e^{tA_0}, $t \geqslant 0$, так что справедливы равенства (см. [9]):

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tA_0} u = A_0 e^{tA_0} u,\ u \in H^0,\ t > 0, \tag{10}$$

$$A_0 e^{tA_0} u = e^{tA_0} A_0 u,\ u \in D(A_0),\ t > 0. \tag{11}$$

Из оценки (9) следует, что оператор $\lambda I - A_0$ сильно позитивен (см. [8]), а значит определены его дробные степени $\alpha \in \mathbb{R}$ (см., например, [8]). В работе будут использованы некоторые важные неравенства. При любом фиксированном $T > 0$ справедливы следующие оценки:

$$\| (\lambda I - A_0)^\alpha e^{tA_0} u \|_{H^0} \leqslant ct^{-\alpha} \| u \|_{H^0}, \alpha > 0, \tag{12}$$

$$\| \frac{\partial}{\partial x_i} e^{tA_0} u \|_{H^0} \leqslant ct^{-\frac{1}{2}} \| u \|_{H^0},\ \| e^{tA_0} \frac{\partial}{\partial x_i} u \|_{H^0} \leqslant ct^{-\frac{1}{2}} \| u \|_{H^0}, \text{где}\, t \in [0,T], \tag{13}$$

$$\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} (e^{t_2 A_0} - e^{t_1 A_0}) u \|_{H^0} \leqslant ct_1^{-\mu - \frac{k}{2}} (t_2 - t_1)^\mu \| u \|_{H^0}, \tag{14}$$

$$i = \overline{1,n};\ k = 0,1;\ 0 < \mu \leqslant 1;\ 0 < t_1 < t_2 \leqslant T.$$

Неравенства (12) имеются в [8], (13) — в [9], (14) — в [12].

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ $\frac{2\pi}{\omega}$ — ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ

В этом пункте мы докажем утверждение 1 Теоремы 1.

Пусть A и B — линейные операторы в H^0 с областями определения $D(A) = D(B) = \{v \in W_2^{2k}(\Omega) : v(x,t)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial \eta}\Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{k-1} v(x,t)}{\partial \eta^{k-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0\}$, такие что $Au = L_0 u$, $Bu = L_1 u$. От задачи (1), (2) перейдем к ее естественной операторной трактовке

$$\frac{du}{dt} = A_{\omega 1} u + \sum_{1 \leqslant |s| \leqslant m} \Big(g_s u + d_s\Big) e^{is\omega t} + d_0(x),\ \omega \gg 1. \tag{15}$$

в H^0. Здесь $A_{\omega 1} = A + \omega^{-1} B$, g_s и d_s — вектор-функции в H^0; $u(x,t)$ — неизвестная вектор-функция со значениями в H_0^{2k}.

Исследуем спектр оператора $A_{\omega 1}, \omega \gg 1$.

Легко видеть, что семейство операторов $A_{\omega 1}$, рассматриваемых при комплексных $\varepsilon = \omega^{-1}$ вблизи $\varepsilon = 0$, является аналитическим семейством в смысле Като [13, гл. XII.1, с. 24]. Отсюда, согласно теории Като-Релиха [13, гл. XII.1, с. 25], в комплексной плоскости найдется окружность Γ_0 с центром в нуле достаточно малого радиуса, такая что при $\omega \gg 1$ внутри нее существует единственная точка λ_ω спектра оператора $A_{\omega 1}$, которая является простым собственным значением, аналитичным по $\varepsilon = \omega^{-1}$.

Этому собственному значению соответствует аналитический в метрике H_0^{2k} по ε собственный вектор $a_\omega = a_0 + \omega^{-1} a_1 + \dots$, $a_i \in H_0^{2k}$, $i = 0,1\dots$. Таким образом,

$$A_{\omega 1} a_\omega = (\omega^{-1}\lambda_1 + \omega^{-2}\lambda_2 + \dots)(a_0 + \omega^{-1} a_1 + \dots). \tag{16}$$

Отсюда следует равенство:

$$Aa_1 = -Ba_0 + \lambda_1 a_0,$$

Умножая его скалярно на z_0, и учитывая соотношения (3), находим

$$\lambda_1 = \frac{(Ba_0, z_0)}{(a_0, z_0)} \neq 0. \tag{17}$$

Таким образом,

$$\lambda_\omega = \omega^{-1}\lambda_1 + \omega^{-2}\lambda_2 + \dots,\ a_\omega = a_0 + \omega^{-1} a_1 + \omega^{-2} a_2 + \dots$$

Введем в рассмотрение спектральные проекторы (см. [13, гл. XII.2, с.21]):

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (\lambda I - A_{\omega 1})^{-1} dx,\ Q_\omega = I - P_\omega,\ \omega \gg 1. \tag{18}$$

Пусть число $T_0 > 0$ удовлетворяет условию $e^{\lambda T_0} \neq 1$, $\lambda \in \sigma(A)$ и пусть $T_\omega = \Big[T_0 \dfrac{\omega}{2\pi}\Big] \dfrac{2\pi}{\omega}$.

В силу (17) имеем

$$\Big|\Big|(e^{T_\omega A_{\omega 1}} - I)^{-1} P_\omega\Big|\Big| = O(\omega^{-1}),\ \Big|\Big|(e^{T_\omega A_{\omega 1}} - I)^{-1} Q_\omega\Big|\Big| = O(1),\ \omega \to \infty. \tag{19}$$

Заметим, что коэффициенты уравнения (1) являются $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодичными по t, а следовательно $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодичны по t и коэффициенты (15). Таким образом для доказательства существования и единственности $\frac{2\pi}{\omega}$ — периодического решения уравнения (15) достаточно доказать указанные результаты для задачи о T_ω —периодических решениях уравнения (15) (т.к. вместе с $u(t)$ решением (15) является $u(t+2\pi\omega^{-1})$).

Пусть вектор $z_\omega \in H^{2k}$ удовлетворяет условиям

$$A^*_{\omega_1} z_\omega = \overline{\lambda_\omega} z_\omega,\ (a_\omega, z_\omega) = 1.$$

Тогда, очевидно, справедливы равенства

$$P_\omega u = (u,z_\omega)a_\omega,\ Q_\omega u = u - (u,z_\omega)a_\omega.$$

В уравнении (15) сделаем одну замену переменных типа классической замены переменных Крылова-Боголюбова:

$$\begin{gathered} u = z + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} (ik\omega I - A_{\omega 1})^{-1} (g_k z) e^{ik\omega t}, \\ z = z_1 + w, z_1 = P_\omega z = (z,z_\omega)a_\omega = \xi(t)a_\omega,\ w = Q_\omega z. \end{gathered} \tag{20}$$

Получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} =& A_{\omega 1} z - \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} \Big(is\omega - A_{\omega 1}\Big)^{-1} g_s e^{is\omega t} \frac{d}{dt} z + \\ &+ \sum_{1\leqslant|p|,|s|\leqslant m} g_p \Big(is\omega - A_{\omega 1}\Big)^{-1} g_s z e^{i(p+s)\omega t} + \sum_{0\leqslant|s|\leqslant m} d_s e^{is\omega t} \end{aligned} \tag{21}$$

Проектируя его на подпространства $P_\omega H^0 \equiv l_\omega$, $Q_\omega H^0 \equiv M_\omega$, придем к системе

$$\begin{aligned} \Big(1+\alpha\Big)\frac{d\xi}{dt} - \lambda_\omega \xi = &- \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} \Big(ik\omega - \lambda_\omega\Big)^{-1} \Big(g_k \frac{dw}{dt}, z_\omega\Big) e^{ik\omega t} + \\ &+ \sum_{0\leqslant|k|,|l|\leqslant m, k+l\neq 0} \Big(g_k (il\omega - A_{\omega 1})^{-1} g_l(\xi a_\omega + w), z_\omega\Big) e^{i(k+l)\omega t} + \\ &+ \sum_{0<|k|\leqslant m} \Big(g_{-k}[(ik\omega - A_{\omega 1})^{-1} - (ik\omega)^{-1}] g_k(\xi a_\omega + w), z_\omega\Big) + \\ &+ \sum_{0\leqslant|k|\leqslant m} \Big(d_k, z_\omega\Big) e^{ik\omega t}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} - A_{\omega 1} w = &- \sum_{1\leqslant|k|\leqslant m} e^{ik\omega t} Q_\omega (ik\omega - A_{\omega 1})^{-1} g_k \frac{d}{dt}(\xi a_\omega + w) + \\ &+ \sum_{0<|k|,|l|\leqslant m} Q_\omega g_k (il\omega - A_{\omega 1})^{-1} g_l (\xi a_\omega + w) e^{i(k+l)\omega t} + \\ &+ \sum_{0\leqslant|k|\leqslant m} Q_k d_k e^{ik\omega t} \equiv \Gamma_\omega(\xi, w) + D_\omega, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\alpha = \sum\limits_{0\leqslant|k|\leqslant m} (ik\omega - \lambda_\omega)^{-1} (g_k a_\omega, z_\omega) e^{ik\omega t} = O(\omega^{-1}),\ \omega \to \infty.$

Из (23) получаем

$$\Big(g_k\frac{dw}{dt},z_\omega\Big)=\Big(\frac{dw}{dt},\overline{g_k}z_\omega\Big)=(w,A^*_{\omega 1}\overline{g_k}z_\omega)-$$
$$-\sum_{0\leqslant|s|\leqslant m}e^{is\omega t}\frac{d}{dt}\Big(\xi a_\omega+w,\overline{g_s}(is\omega-A_{\omega 1})^{-1*}Q^*_\omega\overline{g_k}z_\omega\Big)+$$
$$+\sum_{0<|l|,|s|\leqslant m}\Big(\xi a_\omega+w,\overline{g_s}(is\omega-A_{\omega 1})^{-1*}\overline{g_l}Q_\omega{}^*\overline{g_k}\Big)e^{i(l+s)\omega t}+ \tag{24}$$
$$+\sum_{0\leqslant|s|\leqslant m}\Big(g_kQ_\omega d_s,z_\omega\Big)e^{is\omega t}.$$

Равенство (22) с учетом (24) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt}-\lambda_\omega\xi=[(1+\alpha)^{-1}-1]\lambda_\omega\xi+(1+\alpha)^{-1}\Big(\sum_{0<|k|\leqslant m}e^{ik\omega t}(w,b_2)+$$
$$+\sum_{0\leqslant|k|\leqslant 2m}e^{ik\omega t}\frac{d}{dt}(\xi a_\omega+w,b_3)+\sum_{0\leqslant|k|\leqslant 3m}e^{ik\omega t}(\xi a_\omega+w,b_4)+ \tag{25}$$
$$+\sum_{0\leqslant|k|\leqslant 2m}e^{ik\omega t}(\xi a_\omega+w,b_5)+(\xi a_\omega+w,b_1)+\sum_{0\leqslant|k|\leqslant m}(d_{k\omega},z_\omega)e^{ik\omega t}\Big)\equiv$$
$$\equiv\Gamma^{(1)}_\omega(\xi,w)+D^{(1)}_\omega,$$

где

$$||b_1||\leqslant c\omega^{-2},\ ||b_2||\leqslant c\omega^{-1},\ ||b_3||\leqslant c\omega^{-2},\ ||b_4||\leqslant c\omega^{-2},\ ||b_5||\leqslant c\omega^{-1}.$$

От задачи о T_ω — периодических по времени t решениях системы (25), (23) перейдем к эквивалентной ей (в случае классических решений) системе интегральных уравнений

$$\xi(t)=\Big(1-e^{\lambda_\omega T_\omega}\Big)^{-1}\int\limits_0^{T_\omega}e^{\lambda_\omega(T_\omega+t-s)}\Big[\Gamma^{(1)}_\omega\Big(\xi(t),w(t)\Big)+D^{(1)}_\omega\Big]ds+$$
$$+\int\limits_0^t e^{\lambda_\omega(t-s)}\Big[\Gamma^{(1)}_\omega\Big(\xi(t),w(t)\Big)+d_\omega\Big]ds=A^{(1)}\theta+c_\omega,$$

$$w(t)=\Big(I-e^{A_{\omega 1}T_\omega}\Big)^{-1}\int\limits_0^{T_\omega}e^{A_{\omega 1}(T_\omega+t-s)}\Big[\Gamma_\omega\Big(\xi(t),w(t)\Big)+D_\omega\Big]ds+$$
$$+\int\limits_0^t e^{A_{\omega 1}(t-s)}\Big[\Gamma_\omega\Big(\xi(t),w(t)\Big)+D_\omega\Big]ds=A^{(2)}\theta+C_\omega,$$

где

$$\theta=(\xi(t),w(t)). \tag{26}$$

Пусть $\mu\in[0{,}1]$. Символом $C_{\mu,0}\Big([0,T_\omega],H^0\Big)\equiv C_{\mu,0}$ обозначим банахово пространство определенных на отрезке $[0,T_\omega]$ вектор-функций $\theta=(\xi,w)$, $\xi(t)\in C$, $w(t)\in M_\omega$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\theta(0)=\theta(T_\omega),$$
$$\|\theta\|_{C_{\mu,\,0}\Big([0,T_\omega],\,B\Big)}=\max_{t\in[0,T_\omega]}\|\theta(t)\|_B+\sup_{0\leqslant t_1<t_2<T_\omega}\|\theta(t_2)-\theta(t_1)\|(t_2-t_1)^{-\mu}<\infty.$$

Докажем, что при достаточно больших ω оператор $\overline{A}_\omega = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{pmatrix}$ действует в пространстве $C_{\mu,0}$, $\mu \in (0,1]$, и выполнено неравенство

$$||\overline{A}_\omega|| < \frac{1}{2}. \tag{27}$$

Доказательство в полном объеме мы не приводим, поскольку оно слишком громоздко. Заметим еще, что оценка бесконечномерной компоненты $A^{(2)}$ по существу проще, чем одномерной компоненты $A^{(1)}$, поскольку в последней присутствует неограничено растущий при $\omega \to \infty$ сомножитель $(1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1}$:

$$\left|(1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1}\right| = O(\omega),\ \omega \to \infty.$$

С учетом сказанного, оценим подробно лишь одно из слагаемых компоненты $A^{(1)}\theta$. Именно, рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned}
&A_1^{(1)}\theta = \\
&= (1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1} \int\limits_0^{T_\omega} e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - \tau)} (1+\alpha)^{-1} \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant 2m} e^{ik\omega t} \frac{d}{dt} (\xi(\tau) a_\omega + w(\tau), b_3) d\tau = \\
&= (1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1} \int\limits_0^{T_\omega} e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - \tau)} \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant 2m} e^{ik\omega t} [(1+\alpha)^{-1}(\lambda_\omega - ik\omega) + \\
&+ \frac{d}{dt}(1+\alpha)^{-1}] (\xi(\tau) a_\omega + w(\tau), b_3) d\tau + \\
&+ e^{\lambda_\omega t}(1 + \alpha(0))^{-1} \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant 2m} (\xi(0) a_\omega + w(0), b_3) \equiv B^{(1)}\theta + B^{(2)}\theta,
\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$||B^{(2)}\theta||_{C_{\mu,0}} \leqslant c\omega^{-2} ||\theta||_{C_{\mu,0}},\ c = const > 0. \tag{29}$$

Воспользуемся очевидным представлением

$$\begin{aligned}
B^{(1)}\theta = (1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1} \sum_{0 \leqslant |k| \leqslant 2m} \sum_{j=1}^{[\frac{T_0\omega}{2\pi}]} \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \Big[e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - \tau)} p_\omega(\tau) (\xi(\tau) a_\omega + w(\tau), b_3) - \\
- e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - \tau_j)} p_\omega(\tau_j) (\xi(\tau_j) a_\omega + w(\tau_j), b_3) \Big] e^{is\omega\tau} d\tau,
\end{aligned} \tag{30}$$

где $\tau_k = \dfrac{2\pi}{\omega} k$, $p_\omega(\tau)$ — функция, заключенная в квадратные скобки в равенстве (28).

Получим

$$||B^{(1)}\theta||_{C_{0,0}} \leqslant c\omega^{-\mu} ||\theta||_{C_{\mu,0}},\ c = const > 0.$$

Непосредственно из представления (27) с учетом оценки (28) найдем

$$||B^{(1)}\theta||_{C_{1,0}} \leqslant c\omega^{-2} ||\theta||_{C_{0,0}},\ c = const > 0.$$

Используя две последних оценки и неравенство

$$||u||_{C_{\mu,0}} \leqslant ||u||_{C_{0,0}} + ||u||_{C_{1,0}}^{\mu} (2||u||_{C_{0,0}})^{1-\mu}, \tag{31}$$

приходим к оценке

$$||B^{(1)}\theta||_{C_{\mu,0}} \leqslant c\omega^{-\mu}||\theta||_{C_{\mu,0}}. \tag{32}$$

Из (27) при больших ω следует существование единственного решения $\theta \in C_{\mu,0}([0,T_\omega],H^0)$ уравнения (21).

Выражая вектор-функцию $w \in C_{\mu,0}([0,T_\omega],H^0)$ из уравнения (23), находим:

$$\begin{aligned} w(t) = \Big(I - e^{A_{\omega 1}T_\omega}\Big)^{-1} \int_0^{T_\omega} e^{A_{\omega 1}(T_\omega + t - s)}\Big[\Gamma_\omega\Big(\xi(t),w(t)\Big) + D_\omega\Big]ds + \\ + \int_0^t e^{A_{\omega 1}(t-s)}\Big[\Gamma_\omega\Big(\xi(t),w(t)\Big) + D_\omega\Big]ds. \end{aligned} \tag{33}$$

Применяя к последнему равенству изложенную выше методику, получим

$$||w(t)||_{C_\mu(R,H^{2k-1})} \leqslant C||D_\omega||_{H^0}.$$

В виду связи связи вектор-функций u и w, устанавливаем, что

$$||u||_{C_\mu(R,H^{2k-1})} \leqslant C \sum_{0\leqslant k\leqslant m} ||d_k||_{H^0}, \tag{34}$$

где константа C зависит от A, B и g_k $(0 \leqslant k \leqslant m)$, (но не зависит от ω).

Теперь осталось установить бесконечную дифференцируемость решения $u(x,t)$. Пусть $\chi(t)$, $t \in [0,1]$, — бесконечно дифференцируемая функция, такая что $\chi(t) \neq 0$ при $t \in \Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)$ и

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ 1, & \text{если } \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно,что вектор-функция $y(t) = \chi(t)u(t)$, $t \in [0,1]$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} - A_{\omega 1}y = \chi\Big(\sum_{0<k\leqslant m} g_k e^{ik\omega t}u + \sum_{0\leqslant k\leqslant m} d_k e^{ik\omega t}\Big) + \chi' u, \\ &y(0) = 0, \\ &y|_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Поскольку коэффициенты левой части (35) и граница $\partial\Omega$ бесконечно дифференцируемы, а также для этой задачи выполнены условия согласования сколь угодно высокого порядка, то применяя многократно [11, § 7.1, теорема 6], получим, что $u \in C^\infty(\overline{Q})$.

6. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

Подставим ряд (4) в уравнение и граничное условие задачи (1). Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω, причем отдельно для регулярных и для погранслойных слагаемых. Начнем со старшей степени — ω^1:

$$\frac{\partial y_0(x,\tau)}{\partial \tau} = \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} A_1 g_s(x)a_0(x)e^{is\tau},\ \langle y_0(x,\tau)\rangle = 0,$$

так что

$$y_0(x,\tau) = \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} \frac{A_1 g_s(x)a_0(x)}{is}e^{is\tau}. \tag{36}$$

Перейдем к погранслойным слагаемым:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{2k} w_0(\psi,\rho)}{\partial \rho^{2k}} = 0, \\ w_0(\psi,\rho)\big|_{\rho=\infty} = 0; \end{cases} \quad \text{Отсюда } w_0(\psi,\rho)) = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_0(\psi,\rho,\tau)}{\partial \tau} = l_0(\psi)\dfrac{\partial^{2k} z_0(\psi,\rho,\tau)}{\partial \rho^{2k}}, \\ \langle z_0(\psi,\rho,\tau)\rangle = 0, \\ z_0(\psi,\rho,\tau)\big|_{\rho=\infty} = 0, \\ z_0(\psi,\rho,\tau)|_{\Gamma} = -y_0(x,\tau)|_{\Gamma},\ \frac{\partial z_0(\psi,\rho,\tau)}{\partial \rho}\Big|_{\Gamma} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1} z_0(\psi,\rho,\tau)}{\partial \rho^{k-1}}\Big|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Решение задачи для $z_0(\psi,\rho,\tau)$ будем искать в виде

$$z_0(\psi,\rho,\tau) = \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}\Big(\sum_{i=1}^{k} h_i(\psi)e^{\lambda_{is}(\psi)\rho}\Big)e^{is\tau},$$

где функции $h_i(\psi)$ зависят от неизвестного на данном шаге коэффициента A_1.

Приравнивая регулярные и погранслойные коэффициенты при следующих степенях - $\omega^{\frac{2k-s}{2k}}$, $1 \leqslant s \leqslant 2k-1$, получим аналогичные задачи. Вернемся к этим задачам после нахождения коэффициентов A_i, $i = \overline{1,2k}$.

Приравняем регулярные слагаемые при следующих степенях: $\omega^{-\frac{s}{2k}}$, $,0 \leqslant s \leqslant 2k-1$. Начнем со степени ω^0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_{2k}(x,\tau)}{\partial \tau} &= L_0\left(u_0(x) + y_0(x,\tau)\right) + L_1 A_1 a_0(x) \\ &+ \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}(g_s(x)\left(u_0(x) + A_{2k+1}a_0(x) + y_0(x,\tau)\right) + d_s(x))e^{is\tau} + d_0(x). \end{aligned} \tag{37}$$

Применяя к уравнению (37) операцию усреднения по τ, получим

$$0 = L_0 u_0(x) + L_1 A_1 a_0(x) + \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}\frac{g_s(x)g_{-s}(x)}{is}A_1 a_0(x) + d_0(x), \tag{38}$$

или

$$-L_0 u_0(x) = A_1 L_1 a_0(x) + d_0(x).$$

Для нахождения $u_0(x)$ составим задачу

$$\begin{cases} -L_0 u_0(x) = A_1 L_1 a_0(x) + d_0(x) \\ \Big(u_0(x) + w_0(\psi,\rho)\Big)\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \Big(\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} + \dfrac{\partial w_0(\psi,\rho)}{\partial \eta}\Big)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \ldots, \\ \qquad\qquad \Big(\dfrac{\partial^{k-1} u_0(x)}{\partial \eta^{k-1}} + \dfrac{\partial^{k-1} w_0(\psi,\rho)}{\partial \eta^{k-1}}\Big)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ (u_0(x), z_0(x)) = 0. \end{cases}$$

Согласно альтернативе Фредгольма эта задача однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$\Big(A_1 L_1 a_0(x) + d_0(x),\ z_0(x)\Big) = 0,$$

так что

$$A_1 = -\frac{(d_0(x),\ z_0(x))}{(L_1 a_0(x),\ z_0(x))}.$$

Возвращаясь к задаче (36), однозначно находим $y_0(x,\tau)$, а затем $z_0(\psi,\rho,\tau)$.

Далее, вычитая из (37) уравнение (38), имеем:

$$\frac{\partial y_{2k}(x,\tau)}{\partial\tau} = L_0 y_0(x,\tau) + \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}\Big(g_s(x)(u_0(x) + A_{2k+1}a_0(x)) + d_s(x)\Big)e^{is\tau} + \\ + \sum_{\substack{1\leqslant|s|,|l|\leqslant m,\\ s+l\neq 0}} \frac{A_1 g_s(x) g_l(x) a_0(x)}{il} e^{i(s+l)\tau}.$$

Откуда получим вид для y_{2k}:

$$y_{2k}(x,\tau) = \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} \frac{A_{2k+1} g_s(x) a_0(x)}{is} e^{is\tau} + \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} a_s^{(1)} e^{is\tau}$$

Методом математической индукции нетрудно показать, что построение каждого из дальнейших коэффициентов ряда (4) сводится к решению конечного числа задач 1) – 4).

7. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Рассмотрим ряд

$$u_\omega^{p,l} = (\omega^1 A_1 + \omega^{\frac{2k-1}{2k}} A_2 + \omega^{\frac{2k-2}{2k}} A_3 + \ldots + \\ + \omega^{\frac{1}{2k}} A_{2k}) a_0(x) + \sum_{s=0}^{p+4k(l+n-1)-l} \omega^{-\frac{s}{2k}} \Big(u_s(x) + w_s(\psi,\rho) + \\ + A_{2k+s+1} a_0(x) + y_s(x,\tau) + z_s(\psi,\rho,\tau)\Big), \tau = \omega t, \rho = r\sqrt[2k]{\omega}.$$

В силу методики построения коэффициентов асимптотики его частичные суммы $u_\omega^{p,l}$ удовлетворяет соотношениям:

$$\frac{\partial u_\omega^{p,l}(x,t)}{\partial t} - \Big(L_0 + \frac{1}{\omega}L_1\Big)u_\omega^{p,l}(x,t) - \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}\Big(g_s u_\omega^{p,l}(x,t) + d_s(x)\Big)e^{is\omega t} - d_0(x) = r_\omega^{p,l}, \tag{39}$$

$$u_\omega^{p,l}(x,t)\Big|_\Gamma = \frac{\partial u_\omega^{p,l}(x,t)}{\partial\eta}\Big|_\Gamma = \cdots = \frac{\partial^{k-1} u_\omega^{p,l}(x,t)}{\partial\eta^{k-1}}\Big|_\Gamma = 0, \tag{40}$$

где η —вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$.

Здесь

$$||r_\omega^{p,l}||_{W_{x,t}^{0,0}} \leqslant C\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}},$$

Перепишем задачу (39) в операторной форме:

$$\frac{du_\omega^{p,l}}{dt} = (A + \frac{1}{\omega}B)u_\omega^{p,l}(x,t) + \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}\Big(g_s(x)u_\omega^{p,l}(x,t) + d_s(x)\Big)e^{is\omega t} + d_0(x) + r_\omega^{p,l} \tag{41}$$

Обозначим:

$$v_\omega^{p,l} = u - u_\omega^{p,l} \tag{42}$$

Заметим, что (42) является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Big(A + \dfrac{1}{\omega}B\Big)v(x,t) - \sum\limits_{1\leqslant|s|\leqslant m} g_s v(x,t)e^{is\omega t} = r_\omega^{p,l}, \\ v(x,t)|_\Gamma = \frac{\partial v(x,t)}{\partial\eta}\Big|_\Gamma = \cdots = \frac{\partial^{k-1} v(x,t)}{\partial\eta^{k-1}}\Big|_\Gamma = 0\,, \end{cases} \tag{43}$$

где η —вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$.

Для функции $v(x,t)$ на основании (34) получаем оценку

$$||v||_{C_\mu([0,T_\omega],H^{2k-1})} \leqslant C||r_\omega^{p,l}||_{H^0}.$$

Отсюда

$$||v||_{W_{2\,x,t}^{0,0}} \leqslant ||v||_{C_\mu([0,T_\omega],H^{2k-1})} \leqslant C||r_\omega^{p,l}||_{H^0} \leqslant C\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)}{2k}}.$$

Пусть $\chi(t)$, $(t \in [0,1])$ — бесконечно дифференцируемая функция, такая что $\chi(t) \neq 0$ при $t \in \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ и

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \\ 1, \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Из задачи (43) следует, что вектор-функция $b_\omega(t) = \chi(t)v_\omega^{p,l}(t), t \in [0,1]$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{db}{\partial t} - (A + \dfrac{1}{\omega}B)b = \chi\Big[r_\omega^{p,l} - \sum\limits_{1\leqslant|s|\leqslant m} g_s e^{is\omega t}v\Big] - \chi^{'} v, \\ b(0) = \dfrac{\partial b(0)}{\partial\eta} = \cdots = \dfrac{\partial^{k-1}b(0)}{\partial\eta^{k-1}} = 0. \end{cases} \tag{44}$$

Обозначим $f = \chi\Big[r_\omega^{p,l} - \sum\limits_{1\leqslant|s|\leqslant m} g_s e^{is\omega t}v\Big] - \chi^{'} v.$

К задаче (44) применим следующую теорему, которая является следствием [14, Теорема 5.4, с. 118]:

Теорема 2. *Пусть $l = 2kn$, где $n > 0$ — целое число. Пусть $\Gamma \in C^l$, коэффициенты оператора $A_\omega = (A + \frac{1}{\omega}B)$ имеют непрерывные производные $D_t^\mu D_x^\nu$ при $2k\mu + \nu \leqslant l - 2k$. Если $f \in W_{2,\ x,t}^{l-2k,\frac{l-2k}{2k}}(Q)$ и выполнены условия согласования порядка, равного наибольшему целому числу, которое меньше $l - \frac{2k+1}{2}$, то задача (44) однозначно разрешима в классе $\in W_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(Q)$, и при этом имеет место оценка*

$$||b||_{W_2{}_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(Q)} \leqslant C||f||_{W_{2\,x,t}^{l-2k,\frac{l-2k}{2k}}(Q)}.$$

А также воспользуемся следующей известной теоремой вложения Соболева [15]:

Теорема 3. *Пусть $Q = (0,d) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial\Omega \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$). Пусть $k > \frac{n}{2}+s$, где $s \geqslant 0$ —целое. Тогда имеет место следующее вложение*

$$W^k(Q) \subset C^s(\overline{Q}),$$

причем оператор вложения непрерывен.

Применяя к задаче (44) Теорему 2, имеем:

$$\begin{aligned} ||b||_{W_{2\,x,t}^{2k,1}(Q)} &\leqslant C_1\Big|\Big|\chi\Big[r_\omega^{p,l} - \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} g_s e^{is\omega t}v\Big] - \chi^{'} v\Big|\Big|_{W_{2\,x,t}^{0,0}(Q)} \leqslant \\ &\leqslant C_2||\chi r_\omega^{p,l}||_{W_{2\,x,t}^{0,0}}(Q) + C_3||\chi \sum_{1\leqslant|s|\leqslant m} g_s e^{is\omega t}v||_{W_{2\,x,t}^{0,0}(Q)} + \\ &+ C_4||\chi^{'} v||_{W_{2\,x,t}^{0,0}(Q)} \leqslant C_5\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}} + C_6\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}} \leqslant \\ &\leqslant C_7\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получили оценку для функции $b(t)$ в $W_{2\,x,t}^{2k,1}(Q)$. Поскольку $\chi(t)=0$ при $t\in[0,\frac{1}{3}]$ и $\chi(t)=1$ при $t\in[\frac{2}{3},1]$, то $b=v$, при $t\in[\frac{2}{3},1]$ и функция v периодическая по t с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, тогда

$$||v||_{W_{2\,x,t}^{2k,1}(Q)}\leqslant C_5\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}}.$$

Применяя к задаче (44) Теорему 2 еще раз, получаем:

$$\begin{aligned}||b||_{W_{2\,x,t}^{4k,2}(Q)}&\leqslant C_8\Big|\Big|\chi\Big[r_\omega^{p,l}-\sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}g_se^{is\omega t}v\Big]-\chi^{'}v\Big|\Big|_{W_{2\,x,t}^{2k,1}(Q)}\leqslant\\&\leqslant C_9||\chi r_\omega^{p,l}||_{W_{2\,x,t}^{2k,1}(Q)}+C_{10}||\chi\sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}g_se^{is\omega t}v||_{W_{2\,x,t}^{2k,1}(Q)}+\\&+C_{11}||\chi^{'}v||_{W_{2\,x,t}^{2k,1}(Q)}\leqslant C_{12}\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}+2}+C_{13}\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}}\leqslant\\&\leqslant C_{14}\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}+2}.\end{aligned}$$

Отсюда мы получили оценку для функции $b(t)$ в пространстве $W_{2\,x,t}^{4k,2}(Q)$. Поскольку $\chi(t)=0$ при $t\in[0,\frac{1}{3}]$ и $\chi(t)=1$ при $t\in[\frac{2}{3},1]$, то $b=v$, при $t\in[\frac{2}{3},1]$ и функция v периодическая по t с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, тогда

$$||v||_{W_{2\,x,t}^{4k,2}(Q)}\leqslant C_{14}\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}+2}.$$

Применяя к задаче (44) Теорему 2 $(l+n)$ раз, получим:

$$\begin{aligned}||b||_{W_{2\,x,t}^{2k(l+n),l+n}(Q)}&\leqslant c_1||\chi\Big[r_\omega^{p,l}-\sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}g_se^{is\omega t}v\Big]-\chi^{'}v||_{W_{2\,x,t}^{2k(l+n-1),l+n-1}(Q)}\leqslant\\&\leqslant c_2||\chi r_\omega^{p,l}||_{W_{2\,x,t}^{2k(l+n-1),l+n-1}(Q)}+\\&+c_3||\chi\sum_{1\leqslant|s|\leqslant m}g_se^{is\omega t}v||_{W_{2\,x,t}^{2k(l+n-1),l+n-1}(Q)}+\\&+c_4||\chi^{'}v||_{W_{2\,x,t}^{2k(l+n-1),l+n-1}(Q)}\leqslant c_5\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}+2(l+n-1)}+\\&+c_6\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}+2(l+n-1)-2}\leqslant\\&\leqslant 2c_5\omega^{-\frac{p+1+4k(l+n-1)-l}{2k}+2(l+n-1)}=c_7\,\omega^{-\frac{p+1-l}{2k}}.\end{aligned}$$

Отсюда мы получили оценку для функции $b(t)$ в $W_{2\,x,t}^{2k(l+n),l+n}(Q)$. Поскольку $\chi(t)=0$ при $t\in[0,\frac{1}{3}]$ и $\chi(t)=1$ при $t\in[\frac{2}{3},1]$, то $b=v$, при $t\in[\frac{2}{3},1]$ и функция v периодическая по t с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, тогда

$$||v||_{W_{2\,x,t}^{2k(l+n),l+n}(Q)}\leqslant c_7\omega^{-\frac{p+1-l}{2k}}.$$

Заметим, что $W_{2\,x,t}^{2k(l+n),l+n}(Q)\subset W_{2\,x,t}^{l+n,l+n}(Q)$, тогда

$$||v||_{W_{2\,x,t}^{l+n,l+n}(Q)}\leqslant c_7\,\omega^{-\frac{p+1-l}{2k}}.$$

Применяя теперь Теорему 3, получаем вложение:

$$W_{2\,x,t}^{l+n,l+n}(Q)\subset C_{x,t}^{l,l}(\overline{Q}),$$

Из вложения $C_{x,t}^{l,l}(\overline{Q})\subset C_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(\overline{Q})$ заключаем, что

$$||v||_{C_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(\overline{Q})}\leqslant c_7\omega^{-\frac{p+1-l}{2k}}.$$

Тогда

$$\|u(x,t)-u^p(x,t)\|_{C_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(\overline{Q})} \leqslant \|u(x,t)-u^{p+1+2k(l+n-1)}(x,t)\|_{C_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(\overline{Q})}+ \\ +\|u^{p+1}(x,t)\|_{C_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(Q)}+\|u^{p+2}(x,t)\|_{C_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(\overline{Q})}+ \\ +\dots+\|u^{p+1+2k(l+n-1)-1}\|_{C_{x,t}^{l,\frac{l}{2k}}(\overline{Q})} \leqslant C_{p,l}\,\omega^{-\frac{p+1-l}{2k}}.$$

Откуда и следует оценка п. 3 Теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. До, Н. Т. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае / Н. Т. До, В. Б. Левенштам // Журн. выч. матем. и мат. физ. — 2011. — Т. 51, № 6. — С. 1043–1055.

2. До, Н. Т. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае / Н. Т. До, В. Б. Левенштам // Диф. уравн. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1190–1192.

3. Гусаченко, В. В. Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае / В. В. Гусаченко, Е. А. Ильичева, В. Б. Левенштам // Журн. выч. матем. и мат. физ. — 2013. — Т. 53, № 7. — С. 1067–1081.

4. Вишик, М. И. Решение некоторых задач в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник Успехи математических наук. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 3—80.

5. Левенштам, В. Б. Асимптотическое интегрирование линейной параболической задачи с высокочастотными коэффициентами в критическом случае / В. Б. Левенштам // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 4. — С. 522–538.

6. Гусаченко, В. В. Асимптотический анализ линейных параболических задач с вырождениями / В. В. Гусаченко, В. Б. Левенштам // Журн. выч. матем. и мат. физ. — 2015. — Т. 55, № 1. — С. 74–88.

7. Вишик, М. И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М. И. Вишик, Л. А. Люстерник // УМН. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.

8. Соломяк М. З. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // ДАН СССР — 1965. — Т. 166, № 6.

9. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М. : Наука. — 1966.

10. Юдович, В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости / В. И. Юдович. — Ростов н/Д : Изд. РГУ, 1985.

11. Эванс, Л. К. Уравнения с частными производными / Л. К. Эванс. — Новосибирск, 2003.

12. Симоненко, И. Б. Обоснование метода усреднения для абстрактных параболических уравнений / И. Б. Симоненко // Матем. сб. — 1970. — Т. 81 (123), № 1. — С. 53–61.

13. Рид, М. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов / М. Рид, Л. Саймон. — М. : Мир, 1977.

14. Солонников, В. Ф. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В. Ф. Солонников // Краевые задачи математической физики. — 1965. — Т. 133, № 3. — С. 1–161.

15. Лионс, Ж. Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж. Л. Лионс, Е. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 372 с.

REFERENCES

1. Do N.T., Levenshtam V.B. Asymptotic integration of a system of differential equations with a large parameter in the critical case. [Do N.T., Levenshtam V.B. Asimptoticheskoe integrirovanie sistemy differencial'nyx uravneniyj s bol'shim parametrom v kriticheskom sluchae]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 6, pp. 1043–1055.

2. Do N.T., Levenshtam V.B. Asymptotic integration of a system of differential equations with high-frequency terms in the critical case. [Do N.T., Levenshtam V.B. Asimptoticheskoe integrirovanie sistemy differencial'nyx uravneniyj s vysokochastotnymi slagaemymi v kriticheskom sluchae]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 8, pp. 1190–1192.

3. Gusachenko V.V., Il'icheva E.A., Levenshtam V.B. Linear parabolic problem: High-frequency asymptotics in the critical case. [Gusachenko V.V., Il'icheva E.A., Levenshtam V.B. Lineyjnaya parabolicheskaya zadacha. Vysokochastotnaya asimptotika v kriticheskom sluchae]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 7, pp. 1067–1081.

4. Vishik M.I., Lyusternik L.A. The solution of some perturbation problems for matrices and self-adjoint or non-self-adjoint differential equations. [Vishik M.I., Lyusternik L.A. Reshenie nekotoryx zadach v sluchae matric i samosopryazhennyx i nesamosopryazhennyx differencial'nyx uravneniyj]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 3, pp. 3—80.

5. Levenshtam V.B. Asymptotic integration of linear parabolic problems with high-frequency coefficients in the critical case. [Levenshtam V.B. Asimptoticheskoe integrirovanie lineyjnoyj parabolicheskoyj zadachi s vysokochastotnymi koefficientami v kriticheskom sluchae]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2014, vol. 96, no. 4, pp. 522–538.

6. Gusachenko V.V., Levenshtam V.B. Asymptotic analysis of linear parabolic problems with singularities. [Gusachenko V.V., Levenshtam V.B. Asimptoticheskiyj analiz lineyjnyx parabolicheskix zadach s vyrozhdeniyami]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 1, pp. 74–88.

7. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. [Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnyyj sloyj dlya lineyjnyx differencial'nyx uravneniyj s malym parametrom]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122.

8. Solomyak M.Z. Application of semigroup theory to the study of differential equations in Banach spaces. [Solomyak M.Z. Primenenie teorii polugrupp k issledovaniyu differencial'nyx uravneniyj v prostranstvax Banaxa]. *DAN SSSR — Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1965, vol. 166, no. 6.

9. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. Integral Operators in Spaces of Summable Functions. [Krasnosel'skiyj M.A., Zabreyjko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskiyj P.E. Integral'nye operatory v prostranstvax summiruemyx funkciyj]. Moscow: Nauka, 1966.

10. Yudovich V.I. Linearization Method in Hydrodynamic Stability Theory. [Yudovich V.I. Metod linearizacii v gidrodinamicheskoyj teorii ustoyjchivosti]. Rostov-on-Don, 1985.

11. Evans L.C. Partial Differential Equations. [Evans L.K. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi]. Novosibirsk, 2003.

12. Simonenko I.B. Justification of the averaging method for abstract parabolic equations. [Simonenko I.B. Obosnovanie metoda usredneniya dlya abstraktnyx parabolicheskix uravneniyj]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1970, vol. 81 (123), no. 1, pp. 53–61.

13. Reed M.C., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 4: Analysis of operators. [Rid M., Sayjmon L. Metody sovremennoyj matematicheskoyj fiziki. T. 4: Analiz operatorov]. Moscow, 1977. . Izd. Mir. — 1977. — T. 4.

14. Solonnikov V.F. On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general type. [Solonnikov V.F. O kraevyx zadachax dlya lineyjnyx parabolicheskix sistem differencial'nyx uravneniyj obshhego vida]. *Kraevye zadachi matematicheskoyj fiziki — Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, 1965, vol. 133, no. 3, pp. 1–161.

15. Lions J.L., Maggenes E. Nonhomogeneous boundary value problems and their applications. [Lions ZH.L., Madzhenes E. Neodnorodnye granichnye zadachi i ix prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 372 p.

Гусаченко Валентин Васильевич, аспирант Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: lestat.anarhist@yandex.ru

Gusachenko Valentin V., post-graduate student of southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: lestat.anarhist@yandex.ru