

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С ЗАТУХАНИЕМ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

Е. Г. Беломытцева, А. Ф. Курин, Е. Б. Туленко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.11.2016 г.

Аннотация. В третьем приближении асимптотического метода усреднения при произвольных начальных условиях построены решения уравнения Маттье с постоянным затуханием в нулевой, первой, второй и третьей областях параметрического резонанса. Получены также решения на границах и вблизи указанных областей. В случае нулевой области уравнение Маттье приводится к известной в методе усреднения системе уравнений в стандартной форме. При анализе в первой, второй и третьей областях использована система с быстрыми фазами. Приведены примеры. Формулы теории проверены численным решением уравнения Маттье. Имеются указания на результаты, которые совпадают с полученными ранее другими авторами.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение Маттье, параметрический резонанс, метод усреднения, амплитуда, фаза.

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE MATHIEU EQUATION WITH DAMPING AT PARAMETRIC RESONANCE

E. G. Belomytseva, A. F. Kurin, E. B. Tulenko

Abstract. In the third approximation of the asymptotic averaging method for arbitrary initial conditions, solutions of the Mathieu equation with constant damping in the zero, first, second and third regions of parametric resonance are constructed. Solutions are also obtained at the boundaries and near the indicated regions. In the zero region, the Mathieu equation reduces to an equation system in the standard form, known in the averaging method. In the first, second, and third regions, a system with fast phases is used for the analysis. Examples are given. Theoretical formulae are proven with a numerical solution of the Mathieu equation. References to similar results, obtained by other authors, are given.

Keywords: Cauchy problem, Mathieu equation, parametric resonance, averaging method, amplitude, phase.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящей работой продолжается цикл статей [1], [2], [3], содержащих решение задачи Коши для уравнений Маттье и Хилла. Полученные формулы полезны для приложений. В работе аналитически в третьем приближении асимптотического метода усреднения [4], [5] решено уравнение Маттье с постоянным затуханием в нулевой, первой, второй и третьей областях параметрического резонанса, а также на границах областей и вне этих областей вблизи границ. Во всех случаях получено решение $z(t)$ при произвольных начальных значениях. Укажем на существование эффективных численно-аналитических методов [6], [7], позволяющих интегрировать уравнение Маттье с высокой точностью в большом диапазоне значений параметров уравнения.

Отметим давний интерес к уравнению Маттье с затуханием. Так, в работе [8] показано существование области на плоскости параметров a и q уравнения, в которой амплитуды быстрых

колебаний, составляющих $z(t)$, экспоненциально затухают без осцилляций. Эта узкая область расположена между областью параметрического резонанса и областью, где указанные амплитуды экспоненциально затухают, совершая колебания. В монографии [9] вычислены границы первой, второй и третьей областей параметрического резонанса соответственно в первом, втором и третьем приближениях.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

Будем решать уравнение Матье с затуханием

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + [a + q \cos(2t)]z = 0 \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad (1.2)$$

в котором точки означают дифференцирование по вещественному t , а q и a - вещественные параметры.

Считая сначала $a > 0$, преобразуем уравнение к виду, удобному для использования метода усреднения, как это сделано в [4], [1], [2].

При $q = \alpha = 0$ уравнение (1.1) имеет общее решение $z = b \cos(\omega_0 t + \zeta)$, в котором $\omega_0 = \sqrt{a}$ - частота, а b, ζ - произвольные постоянные. Следуя идее Лагранжа в его методе вариации произвольных постоянных, решение уравнения (1.1) при $q \neq 0, \alpha \neq 0$ будем искать в виде

$$z = b(t) \cos \psi(t). \quad (1.3)$$

После преобразований для переменных ван дер Поля $b(t)$ (амплитуда) и $\psi(t)$ (фаза) получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \frac{q}{2\omega_0} b \sin(2\psi) \cos(2t) - \frac{\alpha b}{2} [1 - \cos(2\psi)], \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \frac{q}{2\omega_0} [1 + \cos(2\psi)] \cos(2t) - \frac{\alpha}{2} \sin(2\psi), \end{aligned} \quad (1.4)$$

эквивалентную уравнению (1.1). Введем фазы

$$\varphi_1 = 2(\psi - t), \quad \varphi_2 = 2(\psi + t), \quad \varphi_3 = 2t, \quad \varphi_4 = 2\psi. \quad (1.5)$$

Тогда из уравнений (1.4) следует система для b и фаз

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \varepsilon b (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) - 0.5 \alpha b (1 - \cos \varphi_4), \\ \dot{\varphi}_1 &= 2(\omega_0 - 1) + 2\varepsilon (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3) - \alpha \sin \varphi_4, \\ \dot{\varphi}_2 &= 2(\omega_0 + 1) + 2\varepsilon (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3) - \alpha \sin \varphi_4, \\ \dot{\varphi}_3 &= 2, \\ \dot{\varphi}_4 &= 2\omega_0 + 2\varepsilon (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3) - \alpha \sin \varphi_4 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\varepsilon = q/(4\omega_0)$.

Возьмем параметр $q > 0$, как в [1], [2]. При $q < 0$ в построенных в настоящей работе решениях следует заменить t на $\pi/2 + t$, поскольку при такой замене получаем уравнение (1.1) с положительным параметром q . Далее будем считать параметр ε малым.

Малый коэффициент затухания α представим в виде

$$\alpha = \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \varepsilon^3 \alpha_3 + \dots \quad (1.7)$$

Такая запись позволит в дальнейшем анализе выбирать порядок малости α . Так, если $\alpha_1 \neq 0$, имеем $\alpha \sim \varepsilon$. Если $\alpha_1 = 0$, получаем $\alpha \sim \varepsilon^2$. Значения $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ дают $\alpha \sim \varepsilon^3$.

Начальные условия (1.2) для уравнения (1.1) с помощью выражения (1.3) преобразуются в начальные (при $t = 0$) условия для системы (1.4)

$$b(0) = b_0 = \sqrt{z_0^2 + (\dot{z}_0/\omega_0)^2}, \quad \operatorname{tg} \psi(0) = \operatorname{tg} \psi_0 = -\dot{z}_0/(\omega_0 z_0).$$

Уравнения для фаз в системе (1.6) интегрируются с начальными значениями

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_4(0) = 2\psi_0, \quad \varphi_3(0) = 0. \quad (1.8)$$

2. ФОРМУЛЫ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ

Система (1.6) с учетом формулы (1.7) в асимптотическом методе усреднения относится к системе с несколькими быстро вращающимися фазами [4], [5] вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X_1(x,y) + \varepsilon^2 X_2(x,y) + \varepsilon^3 X_3(x,y) + \dots \\ \dot{y} &= \omega + \varepsilon Y_1(x,y) + \varepsilon^2 Y_2(x,y) + \varepsilon^3 Y_3(x,y) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x - вектор медленных переменных, а y - вектор быстрых фаз.

При резонансе $a \approx 1$, когда $\omega_0 \approx 1$, медленными переменными являются амплитуда $b = x^1$ и фаза $\varphi_1 = x^2$, поскольку, как следует из (1.6), $\dot{b} \sim \varepsilon$ и $\dot{\varphi}_1 \sim \varepsilon$. Фазы $\varphi_{2,3,4}$ быстрые.

При резонансах $a \approx 4$ ($\omega_0 \approx 2$) и $a \approx 9$ ($\omega_0 \approx 3$) вектор x имеет только одну составляющую b . Однако, как увидим ниже, в процессе вычислений возникает медленная комбинационная фаза: $\theta = \varphi_1 - \varphi_3$ в случае $a \approx 4$ и $\theta = \varphi_1 - 2\varphi_3$, если $a \approx 9$.

Известно [4], [5], что решение системы уравнений (2.1) имеет вид разложения по малому параметру

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^3 u_3(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^3 v_3(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

где новые переменные \bar{x}, \bar{y} (средние) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \varepsilon^3 A_3(\bar{x}) + \dots \\ \dot{\bar{y}} &= \omega + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \varepsilon^3 B_3(\bar{x}) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для нахождения функций u, v, A, B подставляем (2.2), (2.3) в систему (2.1), разлагая функции X, Y в ряды по степеням ε , учитывая при этом, что ω не зависит от x, y . Из равенства выражений при одинаковых степенях ε в левой и правой частях уравнений (2.1) получаем систему дифференциальных уравнений для u, v . Приведем здесь эту систему в третьем приближении метода усреднения для произвольных чисел M медленных и N быстрых переменных.

Формулы первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}^k} \omega^k &= X_1 - A_1, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}^k} \omega^k &= Y_1 - B_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В последующих приближениях к этим формулам добавляются системы уравнений. Во втором приближении - это система

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}^k} \omega^k &= \sum_{i=1}^M \frac{\partial X_1}{\partial \bar{x}^i} u_1^i + \sum_{k=1}^N \frac{\partial X_1}{\partial \bar{y}^k} v_1^k + X_2 - \sum_{i=1}^M \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}^i} A_1^i - \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}^k} B_1^k - A_2, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}^k} \omega^k &= \sum_{i=1}^M \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{x}^i} u_1^i + \sum_{k=1}^N \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{y}^k} v_1^k + Y_2 - \sum_{i=1}^M \frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}^i} A_1^i - \sum_{k=1}^N \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}^k} B_1^k - B_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В третьем приближении к (2.4), (2.5) добавляются уравнения для u_3, v_3

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_3}{\partial \bar{y}^k} \omega^k &= \sum_{i=1}^M \frac{\partial X_1}{\partial \bar{x}^i} u_2^i + \sum_{k=1}^N \frac{\partial X_1}{\partial \bar{y}^k} v_2^k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 X_1}{\partial (\bar{x}^i)^2} (u_1^i)^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{i_1=2, i_1 > i}^M \frac{\partial^2 X_1}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^{i_1}} u_1^i u_1^{i_1} + \\ &+ \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 X_1}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{y}^k} u_1^i v_1^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 X_1}{\partial (\bar{y}^k)^2} (v_1^k)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{k_1=2, k_1 > k}^N \frac{\partial^2 X_1}{\partial \bar{y}^k \partial \bar{y}^{k_1}} v_1^k v_1^{k_1} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial X_2}{\partial \bar{x}^i} u_1^i + \\ &+ \sum_{k=1}^N \frac{\partial X_2}{\partial \bar{y}^k} v_1^k + X_3 - \sum_{i=1}^M \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}^i} A_2^i - \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}^k} B_2^k - \sum_{i=1}^M \frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}^i} A_1^i - \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}^k} B_1^k - A_3, \\ \sum_{k=1}^N \frac{\partial v_3}{\partial \bar{y}^k} \omega^k &= \sum_{i=1}^M \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{x}^i} u_2^i + \sum_{k=1}^N \frac{\partial Y_1}{\partial \bar{y}^k} v_2^k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 Y_1}{\partial (\bar{x}^i)^2} (u_1^i)^2 + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{i_1=2, i_1 > i}^M \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^{i_1}} u_1^i u_1^{i_1} + \\ &+ \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{y}^k} u_1^i v_1^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 Y_1}{\partial (\bar{y}^k)^2} (v_1^k)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{k_1=2, k_1 > k}^N \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \bar{y}^k \partial \bar{y}^{k_1}} v_1^k v_1^{k_1} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial Y_2}{\partial \bar{x}^i} u_1^i + \\ &+ \sum_{k=1}^N \frac{\partial Y_2}{\partial \bar{y}^k} v_1^k + Y_3 - \sum_{i=1}^M \frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}^i} A_2^i - \sum_{k=1}^N \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}^k} B_2^k - \sum_{i=1}^M \frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}^i} A_1^i - \sum_{k=1}^N \frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}^k} B_1^k - B_3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В формулах (2.4)-(2.6) функции X, Y и их производные берутся при $x = \bar{x}, y = \bar{y}$.

Три системы уравнений (2.4)-(2.6) интегрируются последовательно, начиная с системы первого приближения (2.4). Отметим, что при интегрировании полагаем равными нулю произвольные функции медленной переменной \bar{x} , от выбора которых не зависит точность вычислений (см. [5]). Тогда в (2.2) функции u, v будут давать только быстрые колебания, а \bar{x}, \bar{y} - усредненные по быстрым колебаниям величины (средние).

Заметим также, что в третьем приближении метода усреднения в решении (2.2) системы (2.1) следует учитывать члены до ε^2 включительно [5].

Начальные значения средних $\bar{x}(0), \bar{y}(0)$ вычисляются через начальные значения $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ для системы (2.1) по методике, изложенной в работе [2].

3. РЕЗОНАНС $a \approx 1$

При $a \approx 1$ медленными переменными, как указывалось, являются b и φ_1 , так что $x = (x^1, x^2) = (b, \varphi_1), y = (y^1, y^2, y^3) = (\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Тогда из формул (1.6) с учетом (1.7) следуют выражения X, Y и ω в системе (2.1)

$$\begin{aligned} X_1^1 &= b(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) - 0.5\alpha_1 b(1 - \cos \varphi_4), \\ X_2^1 &= \frac{2\omega_0 - 2}{\varepsilon} + 2(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3) - \alpha_1 \sin \varphi_4, \\ X_3^1 &= -0.5\alpha_2 b(1 - \cos \varphi_4), \quad X_2^2 = -\alpha_2 \sin \varphi_4, \quad X_3^3 = -0.5\alpha_3 b(1 - \cos \varphi_4), \\ X_3^2 &= -\alpha_3 \sin \varphi_4, \quad Y_1^1 = Y_1^3 = 2(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3) - \alpha_1 \sin \varphi_4, \\ Y_2^1 &= Y_2^3 = -\alpha_2 \sin \varphi_4, \quad Y_3^1 = Y_3^3 = -\alpha_3 \sin \varphi_4, \quad Y_1^2 = Y_2^2 = Y_3^2 = 0, \\ \omega^1 &= 2(\omega_0 + 1), \quad \omega^2 = 2, \quad \omega^3 = 2\omega_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Функции u_1, v_1 , входящие в разложения (2.2) искомого решения x, y по малому параметру, вычисляются интегрированием системы (2.4), в которой $N = 3$. При этом A_1, B_1 находятся

из условия ограниченности u_1, v_1 путем усреднения правых частей уравнений по быстрым фазам. В результате с учетом значения $\omega^2 = 2$ получаем

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \bar{b} \sin \bar{\varphi}_1 - 0.5\alpha_1 \bar{b}, \quad A_1^2 = \frac{2\omega_0 - 2}{\varepsilon} + 2 \cos \bar{\varphi}_1, \quad B_1^1 = B_1^3 = 2 \cos \bar{\varphi}_1, \quad B_1^2 = 0, \\ u_1^1 &= -\frac{\bar{b} \cos \bar{\varphi}_2}{\omega^1} + \frac{\alpha_1 \bar{b} \sin \bar{\varphi}_4}{2\omega^3}, \quad u_1^2 = \frac{2 \sin \bar{\varphi}_2}{\omega^1} + 2 \sin \bar{\varphi}_3 + \frac{\alpha_1 \cos \bar{\varphi}_4}{\omega^3}, \\ v_1^1 &= v_1^3 = u_1^2, \quad v_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Эти функции, а также выражения $X_{1,2}, Y_{1,2}$ из (3.1) используются в системе второго приближения метода усреднения (2.5), в которой $M = 2, N = 3$. Из условия ограниченности u_2, v_2 следуют

$$\begin{aligned} A_2^1 &= -\frac{\bar{b}\alpha_1 \cos \bar{\varphi}_1}{2} - \frac{\bar{b}\alpha_2}{2}, \quad A_2^2 = -\frac{2}{\omega^1} - \frac{\alpha_1^2}{2\omega^3} + \alpha_1 \sin \bar{\varphi}_1, \\ B_2^1 &= B_2^3 = A_2^2, \quad B_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

С учетом этих выражений в результате интегрирования уравнений (2.5) получаем

$$\begin{aligned} u_2^1 &= \bar{b} \left\{ -\frac{\cos(2\bar{\varphi}_2)}{4(\omega^1)^2} - \cos \bar{\varphi}_1 \cos \bar{\varphi}_3 - \frac{\cos(\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_3)}{\omega^1 + 2} + \frac{\cos \bar{\varphi}_4}{\omega^3} + \right. \\ &+ \alpha_1 \left[\frac{\sin(\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_4)}{4\omega^1\omega^3} + \frac{3 \sin \bar{\varphi}_3}{4\omega^1\omega^3} + \frac{\sin \bar{\varphi}_2}{2\omega^1} \right] + \alpha_1^2 \frac{\cos(2\bar{\varphi}_4)}{16(\omega^3)^2} + \alpha_2 \frac{\sin \bar{\varphi}_4}{2\omega^3} \left. \right\}, \\ u_2^2 &= \frac{\sin(2\bar{\varphi}_2)}{(\omega^1)^2} - \frac{4 \sin(2\bar{\varphi}_3)}{(\omega^1)^2} + \frac{(\omega^1 - 4) \sin(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_3)}{\omega^1 - 2} + \sin(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_3) + \\ &+ \frac{2 \sin(\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_3)}{\omega^1 + 2} + \alpha_1 \left[\frac{\cos(\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_4)}{\omega^1\omega^3} - \frac{\cos \bar{\varphi}_3}{\omega^1\omega^3} + \frac{\cos \bar{\varphi}_2}{\omega^1} \right] - \\ &- \alpha_1^2 \frac{\sin(2\bar{\varphi}_4)}{4(\omega^3)^2} + \alpha_2 \frac{\cos \bar{\varphi}_4}{\omega^3}, \quad v_2^1 = v_2^3 = u_2^2, \quad v_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку, как указывалось, уравнение (1.1) решается в третьем приближении метода усреднения, из системы (2.6) следует определить только A_3, B_3 . Используя функции (3.2)-(3.4), после усреднения правых частей уравнений (2.6) получаем

$$\begin{aligned} A_3^1 &= \bar{b} \left\{ \left[\frac{1}{(\omega^1)^2} - \frac{1}{2} \right] \sin \bar{\varphi}_1 + \frac{\alpha_1}{4} \left(\frac{1}{\omega^3} - \frac{1}{2} \right) [3 - \cos(2\bar{\varphi}_1)] + \right. \\ &+ \frac{5\alpha_1^2}{16\omega^3} \left(\frac{1}{\omega^1} - \frac{1}{2\omega^3} \right) \sin \bar{\varphi}_1 - \frac{\alpha_2 \cos \bar{\varphi}_1}{2} - \frac{\alpha_3}{2} \left. \right\}, \\ A_3^2 &= 2 \left[\frac{1}{(\omega^1)^2} - \frac{1}{2} \right] \cos \bar{\varphi}_1 + \alpha_1 \left(\frac{1}{\omega^3} - \frac{1}{2} \right) \sin(2\bar{\varphi}_1) + \\ &+ \frac{\alpha_1^2}{\omega^3} \left(\frac{1}{\omega^1} - \frac{1}{2\omega^3} \right) \cos \bar{\varphi}_1 + \alpha_2 \sin \bar{\varphi}_1 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\omega^3}, \quad B_3^1 = B_3^3 = A_3^2, \quad B_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Оценим слагаемые в этих выражениях. С учетом формул для ω из (3.1) имеем

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\omega^3} = \frac{\omega_0 - 1}{\omega^3} \sim \varepsilon, \quad \frac{1}{\omega^1} - \frac{1}{2\omega^3} = \frac{\omega_0 - 1}{4\omega_0(\omega_0 + 1)} \sim \varepsilon,$$

поскольку $\omega_0 = 1 + \varepsilon \dots$ при $a \approx 1$. А так как слагаемые $\sim \varepsilon$ в A_3 приведут к появлению членов $\sim \varepsilon^4$ в уравнениях (2.3), то в третьем приближении метода усреднения следует пренебречь в формулах (3.5) слагаемыми, содержащими множители $1/2 - 1/\omega^3$ и $1/\omega^1 - 1/2\omega^3$.

Учитывая эти оценки, используя формулы (3.2),(3.3),(3.5), а также выражения $\varepsilon = q/4\omega_0, \omega_0 = \sqrt{a}$, запишем систему дифференциальных уравнений (2.3) для средних значений медленных переменных

$$\dot{\bar{b}} = 0.5\bar{b}(r \sin \theta - \alpha - \beta \cos \theta), \quad \dot{\theta} = s + r \cos \theta + \beta \sin \theta. \quad (3.6)$$

Здесь обозначено $\theta = \bar{\varphi}_1$. Коэффициенты равны

$$\begin{aligned} r &= \frac{q}{2\sqrt{a}} - \frac{q^3(1 + 4\sqrt{a} + 2a)}{128a\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)^2}, & \beta &= \frac{q(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2)}{4\sqrt{a}} \approx \frac{q\alpha}{4\sqrt{a}}, \\ s &= 2(\sqrt{a} - 1) - \frac{q^2}{16a(\sqrt{a} + 1)} - \frac{\varepsilon^2\alpha_1^2}{4\sqrt{a}} - \frac{\varepsilon^3\alpha_1\alpha_2}{2\sqrt{a}} \approx \\ &\approx 2(\sqrt{a} - 1) - \frac{q^2}{16a(\sqrt{a} + 1)} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{a}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь с учетом формулы (1.7) в выражениях β и s добавлены слагаемые $\sim \varepsilon^4$: $q\varepsilon^3\alpha_3/(4\sqrt{a})$ и $-\varepsilon^4\alpha_2^2/(4\sqrt{a})$ соответственно. При этом выражения упрощаются и сохраняется точность третьего приближения метода усреднения. Таким образом, в дальнейших вычислениях используется коэффициент затухания $\alpha \sim \varepsilon$.

Замена переменных

$$P = \bar{b} \sin \frac{\theta}{2}, \quad R = \bar{b} \cos \frac{\theta}{2}, \quad (3.8)$$

которая использовалась в [9], приводит систему (3.6) к линейной однородной системе с постоянными коэффициентами

$$\dot{P} = \frac{\beta - \alpha}{2}P + \frac{r + s}{2}R, \quad \dot{R} = \frac{r - s}{2}P - \frac{\beta + \alpha}{2}R. \quad (3.9)$$

Отсюда следует уравнение осциллятора

$$\ddot{P} + \alpha\dot{P} + \frac{\lambda}{4}P = 0, \quad (3.10)$$

где обозначено

$$\lambda = s^2 - r^2 - \beta^2 + \alpha^2, \quad (3.11)$$

и функция R , выраженная через P , имеет вид

$$R = \frac{2}{r + s} \left(\dot{P} + \frac{\alpha - \beta}{2}P \right). \quad (3.12)$$

Переменные \bar{b} и θ в системе (3.6) выражаются через P и R по формулам

$$\bar{b} = \sqrt{P^2 + R^2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{P}{R}. \quad (3.13)$$

Из корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения (3.10)

$$k_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{D}}{2}, \quad k_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{D}}{2}, \quad D = \alpha^2 - \lambda \quad (3.14)$$

закключаем, что при $\lambda < 0$ корень $k_1 > 0$, то есть имеем параметрический резонанс. Уравнение

$$\lambda = 0 \quad (3.15)$$

определяет границу резонанса.

С использованием формул (3.11) и (3.7) это уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} 4(\sqrt{a} - 1)^2 - \frac{q^2}{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)} + \frac{q^4(3 + 8\sqrt{a} + 4a)}{256a^2(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{q^6(1 + 4\sqrt{a} + 2a)^2}{128^2a^3(\sqrt{a} + 1)^4} + \\ + \frac{\alpha^2}{\sqrt{a}} + \frac{q^2\alpha^2(1 - 2\sqrt{a} - 2a)}{32a\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)} + \frac{\alpha^4}{16a} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ищем решение в виде ряда по степеням q

$$a = 1 + qa_1 + q^2 a_2 + q^3 a_3 + \dots, \quad (3.17)$$

сохраняя точность третьего приближения метода усреднения. Тогда из первого слагаемого $4(\sqrt{a} - 1)^2$ в (3.16) следует, что в этом уравнении потребуются члены до $\sim q^4$ включительно. Постоянный коэффициент затухания α в (3.16) возьмем в виде $\alpha = kq$, учитывая оценки $\alpha \sim \varepsilon$, $\varepsilon \sim q$. Используя разложения

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= 1 + q \frac{a_1}{2} + q^2 \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_1^2}{8} \right) + q^3 \left(\frac{a_3}{2} - \frac{a_1 a_2}{4} + \frac{a_1^3}{16} \right) + \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} &= 1 - q \frac{a_1}{2} + q^2 \left(\frac{3a_1^2}{8} - \frac{a_2}{2} \right) + \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{a} + 1} &= \frac{1}{2} \left[1 - q \frac{a_1}{4} + q^2 \left(\frac{5a_1^2}{16} - \frac{a_2}{4} \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

уравнение (3.16) записываем в виде

$$\begin{aligned} & q^2 \left(a_1^2 - \frac{1}{4} + k^2 \right) + q^3 a_1 \left(2a_2 - \frac{a_1^2}{2} + \frac{3}{16} - \frac{k^2}{2} \right) + q^4 \left[2a_1 a_3 + \frac{5a_1^4}{16} - \right. \\ & \left. - \frac{3a_1^2 a_2}{2} - \frac{5a_1^2}{32} + a_2^2 + \frac{3a_2}{16} + \frac{15}{1024} + k^2 \left(\frac{3a_1^2}{8} - \frac{a_2}{2} - \frac{3}{64} \right) + \frac{k^4}{16} \right] + o(q^4) \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при q^2, q^3, q^4 , получаем систему трех алгебраических уравнений относительно $a_{1,2,3}$. Решение первого уравнения

$$a_1 = \pm \frac{\sqrt{1 - 4k^2}}{2}$$

позволяет вычислить a_2 из второго уравнения

$$a_2 = -\frac{1}{32}.$$

Тогда из третьего уравнения следует

$$a_3 = \mp \frac{1 + 8k^2}{512\sqrt{1 - 4k^2}}.$$

В результате по формуле (3.17) получаем на плоскости aOq границу первой области параметрического резонанса в третьем приближении метода усреднения

$$\begin{aligned} a^+ &= 1 + \frac{\sqrt{q^2 - 4\alpha^2}}{2} - \frac{q^2}{32} - \frac{q^4 + 8q^2\alpha^2}{512\sqrt{q^2 - 4\alpha^2}} + o(q^3), \\ a^- &= 1 - \frac{\sqrt{q^2 - 4\alpha^2}}{2} - \frac{q^2}{32} + \frac{q^4 + 8q^2\alpha^2}{512\sqrt{q^2 - 4\alpha^2}} + o(q^3). \end{aligned} \quad (3.19)$$

При $\alpha = 0$ отсюда получаем выражения, совпадающие с известными разложениями собственных значений a_{s1}, a_{c1} (см., например, [1]). На рис. 1 в качестве примера построена граница (3.19) (кривая 2) области I параметрического резонанса при $\alpha = 0.25$. Эта же граница, полученная численным решением уравнения (1.1), изображена линией 1.

Из уравнения $a^+ = a^-$ находим

$$q^2 = 4\alpha^2 + \frac{3}{16}\alpha^4.$$

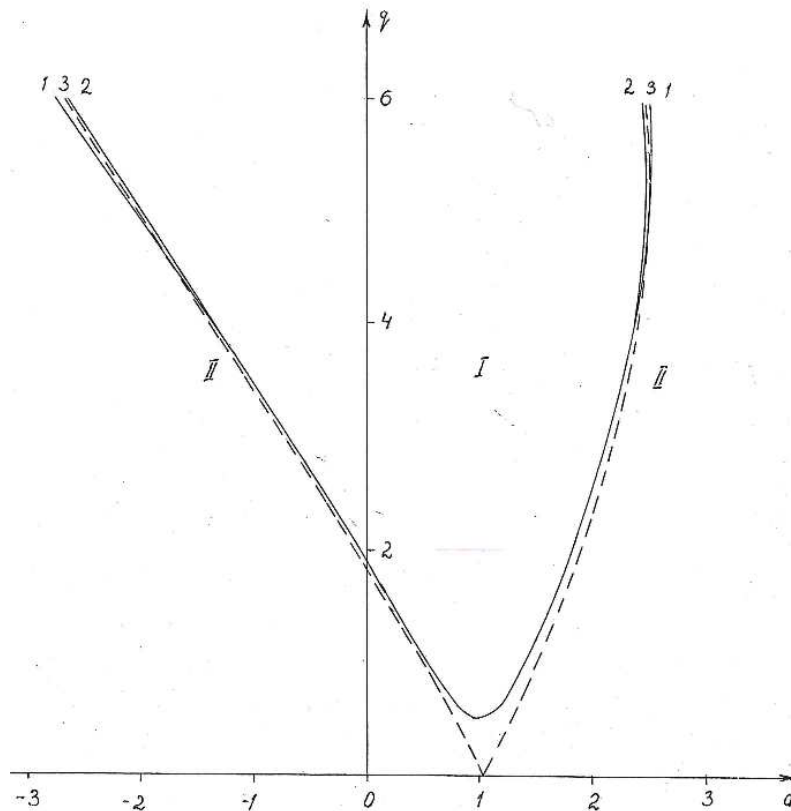


Рис. 1.

Отсюда следует минимальное значение параметра q , при котором возможен резонанс,

$$q = 2\alpha + \frac{3}{64}\alpha^3 + \dots$$

При этом

$$a = a^+ = a^- = 1 - \frac{\alpha^2}{8} + \dots$$

Отметим, что несмотря на условие $a > 0$, при котором из (1.1) получена система (1.6) и, как следствие, уравнение (3.16), его решение в виде a^- из (3.19) оказывается справедливым и при $a \leq 0$ (см. рис. 1).

В области параметрического резонанса решение уравнения осциллятора (3.10) с начальными значениями $P(0)$ и

$$\dot{P}(0) = \frac{r+s}{2}R(0) + \frac{\beta-\alpha}{2}P(0),$$

которое следует из первого уравнения системы (3.9), имеет вид

$$P(t) = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \left[(\sqrt{D} + \beta)P(0) + (r+s)R(0) \right] e^{k_1 t} + \left[(\sqrt{D} - \beta)P(0) - (r+s)R(0) \right] e^{k_2 t} \right\}. \quad (3.20)$$

Функцию $R(t)$ вычисляем по формуле (3.12)

$$R(t) = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \left[(r-s)P(0) + (\sqrt{D} - \beta)R(0) \right] e^{k_1 t} + \left[(s-r)P(0) + (\sqrt{D} + \beta)R(0) \right] e^{k_2 t} \right\}. \quad (3.21)$$

Отметим существование в указанной области неустойчивого затухающего решения, если начальные значения $P(0), R(0)$ удовлетворяют условию

$$(\sqrt{D} + \beta)P(0) + (r + s)R(0) = 0. \quad (3.22)$$

Тогда обращается в нуль коэффициент при растущей экспоненте не только в (3.20), но и в (3.21), поскольку эти коэффициенты пропорциональны, в чем убеждаемся с помощью формулы для D из (3.14) и формулы (3.11).

На границе области резонанса ($\lambda = 0$) решение системы (3.9) получается из формул (3.20),(3.21) при $k_1 = 0, k_2 = -\alpha$

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2\alpha} \{(\alpha + \beta)P(0) + (r + s)R(0) + [(\alpha - \beta)P(0) - (r + s)R(0)] e^{-\alpha t}\}, \\ R(t) &= \frac{1}{2\alpha} \{(r - s)P(0) + (\alpha - \beta)R(0) + [(s - r)P(0) + (\alpha + \beta)R(0)] e^{-\alpha t}\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

При условии

$$(\alpha - \beta)P(0) - (r + s)R(0) = 0 \quad (3.24)$$

решение будет постоянным.

Если $D < 0$, то есть $\lambda > \alpha^2$, корни $k_{1,2}$ (3.14) комплексно сопряженные, и решение P, R системы (3.9) описывает затухающие колебания с частотой

$$\Omega = \frac{\sqrt{-D}}{2} = \frac{\sqrt{\lambda - \alpha^2}}{2}. \quad (3.25)$$

Границу области таких колебаний находим из уравнения $\lambda = \alpha^2$, которое с использованием формул (3.11),(3.7), $\alpha = kq$, разложений (3.17),(3.18) и сохранением членов до $\sim q^4$ включительно записывается в виде

$$\begin{aligned} & q^2 \left(a_1^2 - \frac{1}{4} \right) + q^3 a_1 \left(2a_2 - \frac{a_1^2}{2} + \frac{3}{16} - \frac{k^2}{2} \right) + q^4 \left[2a_1 a_3 + \frac{5a_1^4}{16} - \right. \\ & \left. - \frac{3a_1^2 a_2}{2} - \frac{5a_1^2}{32} + a_2^2 + \frac{3a_2}{16} + \frac{15}{1024} + k^2 \left(\frac{3a_1^2}{8} - \frac{a_2}{2} - \frac{3}{64} \right) + \frac{k^4}{16} \right] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Из алгебраической системы, которая получается из равенства нулю коэффициентов при q^2, q^3, q^4 , получаем

$$a_1 = \pm \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{32} + \frac{k^2}{4}, \quad a_3 = \mp \frac{1}{512}.$$

Подставляя эти выражения в (3.17), получаем на плоскости aOq границу (пунктирная кривая 3 на рис. 1) области II медленных затухающих колебаний функций P, R в третьем приближении метода усреднения

$$a^{+'} = 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{32} - \frac{q^3}{512} + \frac{\alpha^2}{4} + \dots, \quad a^{-'} = 1 - \frac{q}{2} - \frac{q^2}{32} + \frac{q^3}{512} + \frac{\alpha^2}{4} + \dots \quad (3.26)$$

На этой границе $D = 0, k_1 = k_2 = -\alpha/2$, и решение системы (3.9) имеет вид

$$\begin{aligned} P(t) &= \left\{ P(0) + \frac{1}{2} [\beta P(0) + (r + s)R(0)] t \right\} e^{-0.5\alpha t}, \\ R(t) &= \left\{ R(0) + \frac{1}{2} [(r - s)P(0) - \beta R(0)] t \right\} e^{-0.5\alpha t}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В области II ($D < 0$) вблизи ее границы медленные затухающие колебания определяются выражениями

$$\begin{aligned} P(t) &= \left\{ P(0) \cos(\Omega t) + \frac{1}{2\Omega} [\beta P(0) + (r + s)R(0)] \sin(\Omega t) \right\} e^{-0.5\alpha t}, \\ R(t) &= \left\{ R(0) \cos(\Omega t) + \frac{1}{2\Omega} [(r - s)P(0) - \beta R(0)] \sin(\Omega t) \right\} e^{-0.5\alpha t}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Между границами области I параметрического резонанса (кривая 2 на рис. 1) и области II медленных затухающих колебаний функций P и R (кривая 3) имеется область, для которой $0 < \lambda < \alpha^2$. Здесь по формулам (3.14) получаем $D > 0$ и различные $k_{1,2} < 0$, причем с увеличением λ корень k_1 уменьшается от 0 до $-\alpha/2$, а k_2 растет от $-\alpha$ до $-\alpha/2$. С увеличением q ширина этой области экспоненциально затухающих P и R уменьшается. При фиксированном q ширину можно вычислить с помощью формул (3.19), (3.26) и рис. 1. В этой области для P и R справедливы выражения (3.20), (3.21). При определенном выборе начальных значений $P(0), R(0)$ получаем решение с одной экспонентой. Как указывалось, существование области показано в работе [8].

Начальные значения $P(0), R(0)$ в формулах (3.20), (3.21), (3.23), (3.27), (3.28) находятся по формулам (3.8) при $t = 0$

$$P(0) = \bar{b}(0) \sin \frac{\theta(0)}{2}, \quad R(0) = \bar{b}(0) \cos \frac{\theta(0)}{2}. \quad (3.29)$$

В свою очередь, начальные значения средних $\bar{b}(0)$ и $\theta(0) = \bar{\varphi}_1(0)$ вычисляются, как указывалось в п. 2, по методике, изложенной в [2]. Так, для $\bar{x}(0) = (\bar{b}(0), \bar{\varphi}_1(0))$ имеем

$$\bar{x}(0) = x_0 + \varepsilon U_1(x_0, y_0) + \varepsilon^2 U_2(x_0, y_0) + \dots,$$

где

$$U_1 = -u_1, \quad U_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}^i} u_1^i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}^k} v_1^k - u_2.$$

Здесь u_1, v_1, u_2 определяются выражениями в (3.2), (3.4). Эти функции и производные в U_2 вычисляются при $\bar{x} = x_0 = (b_0, 2\psi_0)$ и $\bar{y} = y_0 = (2\psi_0, 0, 2\psi_0)$. Значения фаз y_0 получены из формул (1.5) при $t = 0$.

После вычислений получаем

$$\begin{aligned} \bar{b}(0) &= b_0 \left\{ 1 + \frac{q \cos(2\psi_0)}{8\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)} + \frac{q^2}{16a} \left[\frac{3}{8(\sqrt{a} + 1)^2} + \frac{(a + 2\sqrt{a} - 1) \cos(2\psi_0)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)} - \frac{\cos(4\psi_0)}{16(\sqrt{a} + 1)^2} \right] - \frac{\alpha \sin(2\psi_0)}{4\sqrt{a}} - \frac{q\alpha}{16\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)} \left[\sin(2\psi_0) - \frac{\sin(4\psi_0)}{4\sqrt{a}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2}{64a} [6 + \cos(4\psi_0)] \right\} + o(q^2) \dots, \\ \theta(0) &= 2\psi_0 - \frac{q \sin(2\psi_0)}{4\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)} - \frac{q^2}{16a} \left[\frac{2(a + 2\sqrt{a} - 1) \sin(2\psi_0)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 2)} - \frac{\sin(4\psi_0)}{4(\sqrt{a} + 1)^2} \right] - \frac{\alpha \cos(2\psi_0)}{2\sqrt{a}} + \frac{q\alpha}{8\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)} \left[\frac{1}{2\sqrt{a}} - \cos(2\psi_0) + \frac{\cos(4\psi_0)}{2\sqrt{a}} \right] - \\ &\quad - \frac{\alpha^2 \sin(4\psi_0)}{16a} + o(q^2) \dots. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Наконец, выведем формулу для решения $z(t)$ уравнения (1.1). Подставим в выражение (1.3) амплитуду b и фазу ψ в виде разложений по степеням ε

$$\begin{aligned} b &= \bar{b} + \varepsilon u_1^1 + \varepsilon^2 u_2^1 + \dots, \\ \psi &= \frac{\varphi_2}{2} - t = \frac{\bar{\varphi}_2}{2} - t + \frac{\varepsilon v_1^1}{2} + \frac{\varepsilon^2 v_2^1}{2} + \dots = \bar{\psi} + \frac{\varepsilon v_1^1}{2} + \frac{\varepsilon^2 v_2^1}{2} + \dots, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где обозначено

$$\bar{\psi} = \frac{\bar{\varphi}_2}{2} - t. \quad (3.32)$$

Тогда с учетом равенств $v_1^1 = u_1^2$, $v_2^1 = u_2^2$ получаем выражение

$$z(t) = \bar{b} \cos \bar{\psi} + \varepsilon \left(u_1^1 \cos \bar{\psi} - \frac{\bar{b}u_1^2}{2} \sin \bar{\psi} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left[\left(u_2^1 - \frac{\bar{b}(u_1^2)^2}{8} \right) \cos \bar{\psi} - \frac{1}{2}(u_1^1 u_1^2 + \bar{b}u_2^2) \sin \bar{\psi} \right] + \dots$$

Используя далее формулы u_1 и u_2 из (3.2) и (3.4), выражая все фазы через θ и t , заменяя средние \bar{b} и θ на P и R по формулам (3.8), приходим окончательно к выражению

$$z(t) = R \cos t - P \sin t - \frac{q}{8} \left[\frac{R \cos t + P \sin t}{\sqrt{a}} - \frac{R \cos(3t) - P \sin(3t)}{\sqrt{a} + 1} \right] + \\ + \frac{\alpha}{4\sqrt{a}} (R \sin t + P \cos t) - \frac{q^2}{128a(\sqrt{a} + 1)^2} \left\{ \frac{12a\sqrt{a} + 20a + \sqrt{a} - 8}{2\sqrt{a}} (R \cos t - P \sin t) + \right. \\ \left. + (3a + 6\sqrt{a} + 1)[R \cos(3t) + P \sin(3t)] - \frac{a\sqrt{a} + 2a + \sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 2} [R \cos(5t) - P \sin(5t)] \right\} - \\ - \frac{q\alpha}{32\sqrt{a}} \left[\frac{R \sin t - P \cos t}{\sqrt{a}} - \frac{R \sin(3t) + P \cos(3t)}{\sqrt{a} + 1} \right] - \frac{\alpha^2}{64a} (R \cos t - P \sin t).$$

Если здесь не учитывать слагаемые с $q^2, q\alpha, \alpha^2$, будем иметь $z(t)$ во втором приближении метода усреднения.

Медленно меняющиеся амплитудные множители $P(t), R(t)$ в трех областях на плоскости aOq и на границах областей определяются выражениями (3.20), (3.21), (3.23), (3.27), (3.28).

4. РЕЗОНАНС $a \approx 4$

Если $a \approx 4$, в системе (1.6) медленной переменной x является только b . Все фазы быстрые, то есть $y = (y^1, y^2, y^3, y^4) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. В системе (2.1) с учетом формулы (1.7) имеем функции и частоты

$$X_1 = b(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) - 0.5\alpha_1 b(1 - \cos \varphi_4), \quad X_2 = -0.5\alpha_2 b(1 - \cos \varphi_4), \\ X_3 = -0.5\alpha_3 b(1 - \cos \varphi_4), \quad Y_1^1 = Y_1^2 = Y_1^4 = 2(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2 \cos \varphi_3) - \\ - \alpha_1 \sin \varphi_4, \quad Y_2^1 = Y_2^2 = Y_2^4 = -\alpha_2 \sin \varphi_4, \quad Y_3^1 = Y_3^2 = Y_3^4 = -\alpha_3 \sin \varphi_4, \\ Y_1^3 = Y_2^3 = Y_3^3 = 0, \quad \omega^1 = 2(\omega_0 - 1), \quad \omega^2 = 2(\omega_0 + 1), \quad \omega^3 = 2, \quad \omega^4 = 2\omega_0. \quad (4.1)$$

В системах (2.4)-(2.6) $M = 1, N = 4$. Интегрирование этих систем, как в п.3, приводит к системе для средних

$$\dot{\bar{b}} = 0.5\bar{b}(r \sin \theta - \alpha - \beta \cos \theta), \quad \dot{\theta} = s + r \cos \theta + \beta \sin \theta, \quad (4.2)$$

где

$$r = -\frac{q^2}{8a}, \quad \beta = -\frac{q^2 \varepsilon \alpha_1}{32a}, \quad s = 2(\sqrt{a} - 2) - \frac{q^2}{8\sqrt{a}(a-1)} - \frac{\varepsilon^2 \alpha_1^2}{4\sqrt{a}} - \frac{\varepsilon^3 \alpha_1 \alpha_2}{2\sqrt{a}}. \quad (4.3)$$

Уравнения (4.2) отличаются от (3.6) только выражениями для коэффициентов. Поэтому с помощью замены (3.8) из (4.2) получается система (3.9), из которой следует уравнение осциллятора (3.10) для P с параметром λ (3.11). Функция R выражается через P по формуле (3.12). Справедливы также формулы (3.13) и выражения для корней характеристического уравнения (3.14). Уравнение (3.15), определяющее границу области параметрического резонанса, записывается с помощью формул (3.11), (4.3).

Анализ уравнения (3.15) показывает, что при $a \approx 4$ параметрический резонанс возможен при малом затухании $a \sim \varepsilon^2$.

Граница области резонанса определяется равенствами

$$a^+ = 4 + \frac{q^2}{24} + \sqrt{\frac{q^4}{256} - 4\alpha^2} + o(q^2), \quad a^- = 4 + \frac{q^2}{24} - \sqrt{\frac{q^4}{256} - 4\alpha^2} + o(q^2), \quad (4.4)$$

полученными в результате решения уравнения $\lambda = 0$ в виде разложения $a = 4 + qa_1 + q^2a_2 + q^3a_3 + \dots$ аналогичного (3.17).

На рис. 2 кривая 2 - граница указанной области (обозначена как I) при $\alpha = 0.05$, построенная по формулам (4.4). Кривая 1 получена численным решением уравнения (1.1), кривая 4 - путем точного решения биквадратного относительно q уравнения $\lambda = 0$.

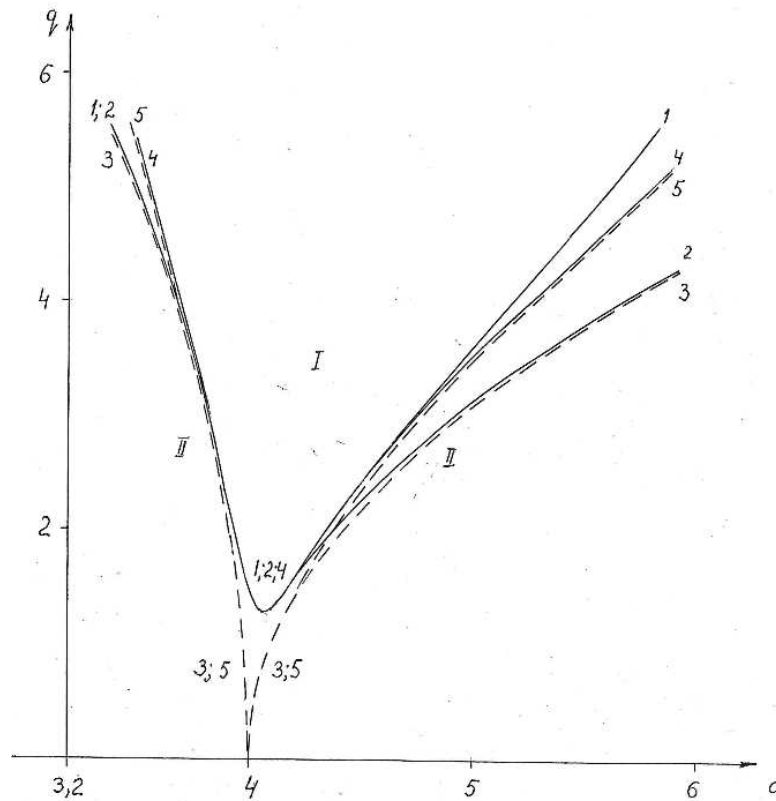


Рис. 2.

Согласно (4.4) минимум границы области параметрического резонанса приходится на $q = 4\sqrt{2\alpha}$ $a = 4 + 4\alpha/3$.

В связи с этим результатом укажем на неточности в монографии [9] Так, подкоренное выражение в неравенствах (17.63) должно иметь вид $h^2 - 16\delta^2/\nu^2$, и, как следствие, неравенство (17.66) - вид $h > 2\sqrt{\delta/\nu}$. Отметим, что правильный результат получается по тем же формулам (17.61),(14.6),(14,12),(14.13) в [9], которые использовались там при выводе указанных неравенств.

Границу области медленных затухающих колебаний функций $P(t), R(t)$ находим из уравнения $\lambda = \alpha^2$

$$a^{+'} = 4 + \frac{5}{48}q^2 + q^4 \dots, \quad a^{-'} = 4 - \frac{1}{48}q^2 + q^4 \dots \quad (4.5)$$

Эта граница в третьем приближении совпадает с границей a_{c2}, a_{s2} области параметрического резонанса уравнения Матье без затухания [1]. Кривая 3 (пунктир) на рис. 2 построена по

формулам (4.5), кривая 5 (пунктир) получена из биквадратного относительно q уравнения $\lambda = \alpha^2$.

В области параметрического резонанса I (рис. 2) $\lambda < 0$, и решение P и R системы (3.9) определяется формулами (3.20) и (3.21) соответственно. В частности, при условии (3.22) существует затухающее решение.

На границе 2 области резонанса $\lambda = 0$, и функции P и R вычисляются по формулам (3.23). При условии (3.24) эти функции не зависят от t .

Если $\lambda > \alpha^2$, то есть $D < 0$, имеем в области II (рис. 2) затухающие колебания P и R (3.28) с частотой (3.25). На границе этой области $\lambda = \alpha^2$ ($D = 0$), и решение системы (3.9) имеет вид (3.27).

Как при резонансе $a \approx 1$ (см. п. 3), между областями I и II имеется узкая область экспоненциально затухающих P (3.20) и R (3.21).

Во всех перечисленных формулах начальные значения $P(0)$ и $R(0)$ находим по формулам (3.29), в которых $\bar{b}(0)$ и $\theta(0)$ вычисляются, как в п. 3. В результате получаем

$$\begin{aligned} \bar{b}(0) &= b_0 \left\{ 1 + \frac{q \cos(2\psi_0)}{4(a-1)} + \frac{q^2}{32a} \left[\frac{3(3a+1)}{4(a-1)^2} + \frac{\cos(2\psi_0)}{\sqrt{a}+2} - \frac{a \cos(4\psi_0)}{2(a-1)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \sin(2\psi_0)}{4\sqrt{a}} + \frac{q\alpha}{8\sqrt{a}(a-1)} \left[\sin(2\psi_0) + \frac{\sin(4\psi_0)}{4} \right] + \frac{\alpha^2}{64a} [6 + \cos(4\psi_0)] \right\} + o(q^2), \\ \theta(0) &= 2\psi_0 - \frac{q \sin(2\psi_0)}{2(a-1)} + \frac{q^2}{16a} \left[-\frac{\sin(2\psi_0)}{\sqrt{a}+2} + \frac{a \sin(4\psi_0)}{(a-1)^2} \right] - \frac{\alpha \cos(2\psi_0)}{2\sqrt{a}} + \\ &\quad + \frac{q\alpha}{4\sqrt{a}(a-1)} \left[\frac{1}{2} + \cos(2\psi_0) + \frac{\cos(4\psi_0)}{2} \right] - \frac{\alpha^2 \sin(4\psi_0)}{16a} + o(q^2), \end{aligned}$$

где начальные значения b_0, ψ_0 переменных ван дер Поля выражаются через начальные значения z_0, \dot{z}_0 для уравнения (1.1) по формулам п. 1

$$b(0) = b_0 = \sqrt{z_0^2 + (\dot{z}_0/\omega_0)^2}, \quad \text{tg } \psi(0) = \text{tg } \psi_0 = -\dot{z}_0/(\omega_0 z_0).$$

Запишем, наконец, решение $z(t)$ уравнения (1.1) в виде разложения по ε

$$\begin{aligned} z(t) &= R \cos(2t) - P \sin(2t) - \frac{q}{8} \left[\frac{R}{\sqrt{a}-1} - \frac{R \cos(4t) - P \sin(4t)}{\sqrt{a}+1} \right] + \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\sqrt{a}} [R \sin(2t) + P \cos(2t)] + \frac{q^2}{128a} \left\{ \frac{(-a^2 - a\sqrt{a} + 4a + \sqrt{a} - 5)R \cos(2t)}{(a-1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3a^2 - a\sqrt{a} - 10a + \sqrt{a} + 9)P \sin(2t)}{(a-1)^2} + \frac{a}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)} [R \cos(6t) - P \sin(6t)] \right\} - \\ &\quad - \frac{q\alpha}{32\sqrt{a}} \left[\frac{P}{\sqrt{a}-1} - \frac{R \sin(4t) + P \cos(4t)}{\sqrt{a}+1} \right] - \frac{\alpha^2}{64a} [R \cos(2t) - P \sin(2t)]. \end{aligned}$$

Если здесь не учитывать слагаемые с $q^2, q\alpha, \alpha^2$, будем иметь $z(t)$ во втором приближении метода усреднения.

Медленно меняющиеся амплитудные множители $P(t), R(t)$ в трех областях на плоскости aOq и на границах областей определяются выражениями (3.20), (3.21), (3.23), (3.27), (3.28).

5. РЕЗОНАНС $a \approx 9$

Если $a \approx 9$, в системе (1.6) медленной переменной является b . Все фазы быстрые, как в п. 4. В системе (2.1) с учетом формулы (1.7) функции $X_{1,2,3}, Y_{1,2,3}$ и частоты ω определяются формулами (4.1).

В результате интегрирования систем (2.4)-(2.6)имеем систему для средних

$$\dot{b} = 0.5(r \sin \theta - \alpha), \quad \dot{\theta} = s + r \cos \theta, \quad (5.1)$$

где

$$r = \frac{q^3}{64a\sqrt{a}} \left[1 + \frac{1}{2(\sqrt{a} + 1)} \right], \quad s = 2(\sqrt{a} - 3) - \frac{q^2}{8\sqrt{a}(a - 1)} - \frac{\varepsilon^2 \alpha_1^2}{4\sqrt{a}} - \frac{\varepsilon^3 \alpha_1 \alpha_2}{2\sqrt{a}}. \quad (5.2)$$

Поскольку система (5.1) следует из (3.6)при $\beta = 0$, справедлива замена переменных (3.8), благодаря которой получается линейная система (3.9) и уравнение осциллятора (3.10), в котором теперь

$$\begin{aligned} \lambda &= s^2 - r^2 + \alpha^2 = \\ &= 4(\sqrt{a} - 3)^2 - \frac{(\sqrt{a} - 3)q^2}{2\sqrt{a}(a - 1)} + \frac{q^4}{64a(a - 1)^2} - \frac{q^6}{64^2 a^3} \left[1 + \frac{1}{2(\sqrt{a} + 1)} \right]^2 + \\ &+ \varepsilon^2 \alpha_1^2 \left[\frac{q^2}{16a(a - 1)} - \frac{\sqrt{a} - 3}{\sqrt{a}} \right] + \varepsilon^3 \alpha_1 \alpha_2 \left[\frac{q^2}{8a(a - 1)} - \frac{2(\sqrt{a} - 3)}{\sqrt{a}} \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon^4 \alpha_1^4}{16a} + \frac{\varepsilon^5 \alpha_1^3 \alpha_2}{4a} + \frac{\varepsilon^6 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{4a} + \alpha^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это выражение получено с использованием формул (5.2).

Используя разложение (3.17), из анализа корней уравнения (3.15) заключаем, что параметрический резонанс появляется при значениях затухания $\alpha \sim \varepsilon^3$. Граница области параметрического резонанса определяется выражениями

$$a^+ = 9 + \frac{q^2}{64} + \sqrt{\left(\frac{q^3}{512}\right)^2 - 9\alpha^2}, \quad a^- = 9 + \frac{q^2}{64} - \sqrt{\left(\frac{q^3}{512}\right)^2 - 9\alpha^2}. \quad (5.4)$$

На рис. 3 указанная граница показана при $\alpha = 0.005$. Кривая 1 получена численным решением уравнения (1.1), кривая 2 построена по формулам (5.4).

Из этих формул следуют значения параметров, на которые приходится минимум границы области параметрического резонанса

$$q = 8\sqrt[3]{3\alpha}, \quad a = 9 + \sqrt[3]{9\alpha^2}.$$

Как и в случае резонанса $a \approx 4$ (см. п. 3), имеются неточности в монографии [9]. Правильные подкоренное выражение в (17.64) имеет вид $3^{12}h^6/2^{18} - 3^2 2^2 \delta^2/\nu^2$, а неравенство (17.67) выглядит как

$$h > \frac{8}{3} \sqrt[3]{\frac{2\delta}{9\nu}}.$$

Эти формулы получаются с использованием (17.61),(14.6),(14.12),(14.13) в [9].

Границу области медленных затухающих колебаний функций P и R (область II на рис. 3) находим, как в п. 3 и в п. 4, из уравнения $\lambda = \alpha^2$

$$a^{+'} = 9 + \frac{q^2}{64} + \frac{q^3}{512} + \frac{\alpha^2}{4} + q^4 \dots, \quad a^{-'} = 9 + \frac{q^2}{64} - \frac{q^3}{512} + \frac{\alpha^2}{4} + q^4 \dots,$$

если $\alpha \sim \varepsilon$ и

$$a^{+'} = 9 + \frac{q^2}{64} + \frac{q^3}{512} + q^4 \dots, \quad a^{-'} = 9 + \frac{q^2}{64} - \frac{q^3}{512} + q^4 \dots, \quad (5.5)$$

если $\alpha \sim \varepsilon^2$ или $\alpha \sim \varepsilon^3$.

На рис. 3 эта граница показана пунктирной линией 3. Ширину узкой области экспоненциально затухающих (без колебаний) функций P и R между кривыми 2 и 3 (между областями I и II) можно определить с помощью формул (5.4) и (5.5).

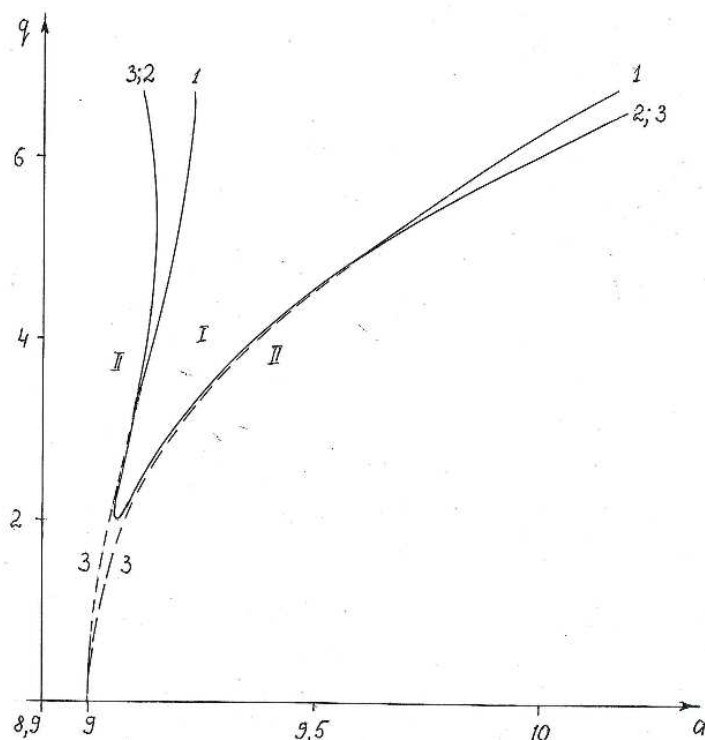


Рис. 3.

Формулы для решения P, R системы уравнений (3.9) получены в п. 3. В области параметрического резонанса I это выражения (3.20), (3.21), на границе этой области - (3.23), в области II затухающих колебаний - (3.28), на границе этой области - (3.27), в области экспоненциально затухающих функций P и R - формулы (3.20), (3.21). Во всех этих формулах начальные значения $P(0), R(0)$ находим по формулам (3.29), где $\bar{b}(0)$ и $\theta(0)$ вычисляются, как в п. 3. При этом используются функции u, v из (4.2) и (5.1). В результате получаем

$$\begin{aligned} \bar{b}(0) &= b_0 \left\{ 1 + \frac{q \cos(2\psi_0)}{4(a-1)} + \frac{q^2}{16a} \left[\frac{3(3a+1)}{8(a-1)^2} - \frac{2 \cos(2\psi_0)}{a-4} - \frac{a \cos(4\psi_0)}{4(a-1)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha \sin(2\psi_0)}{4\sqrt{a}} + \frac{q\alpha}{32\sqrt{a}(a-1)} [4 \sin(2\psi_0) + \sin(4\psi_0)] + \frac{\alpha^2}{64a} [6 + \cos(4\psi_0)] \right\} + o(q^2), \\ \theta(0) &= 2\psi_0 - \frac{q \sin(2\psi_0)}{2(a-1)} + \frac{q^2}{16a} \left[\frac{4 \sin(2\psi_0)}{a-4} + \frac{a \sin(4\psi_0)}{(a-1)^2} \right] - \frac{\alpha \cos(2\psi_0)}{2\sqrt{a}} + \\ &\quad + \frac{q\alpha}{8\sqrt{a}(a-1)} [1 + 2 \cos(2\psi_0) + \cos(4\psi_0)] - \frac{\alpha^2 \sin(4\psi_0)}{16a} + o(q^2), \end{aligned}$$

где начальные значения b_0, ψ_0 выражаются через z_0, \dot{z}_0 по формулам (4.6).

Решение $z(t)$ получаем в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= R \cos(3t) - P \sin(3t) - \frac{q}{8} \left[\frac{R \cos t - P \sin t}{\sqrt{a}-1} - \frac{R \cos(5t) - P \sin(5t)}{\sqrt{a}+1} \right] + \\ &\quad + \frac{\alpha}{4\sqrt{a}} [R \sin(3t) + P \cos(3t)] + \frac{q^2}{128a} \left\{ \frac{(-2a^2 + 7a - 7)[R \cos(3t) - P \sin(3t)]}{(a-1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a[R \cos(7t) - P \sin(7t)]}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)} + \frac{a(R \cos t + P \sin t)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-2)} \right\} - \\ &\quad - \frac{q\alpha}{32\sqrt{a}} \left[\frac{R \sin t + P \cos t}{\sqrt{a}-1} - \frac{R \sin(5t) + P \cos(5t)}{\sqrt{a}+1} \right] - \frac{\alpha^2}{64a} [R \cos(3t) - P \sin(3t)]. \end{aligned}$$

Если в этой формуле не учитывать члены с $q^2, \alpha q, \alpha^2$, получим $z(t)$ во втором приближении метода усреднения. Как указывалось, функции $P(t), R(t)$ в трех областях и на границах областей определяются формулами (3.20), (3.21), (3.23), (3.27), (3.28).

6. РЕЗОНАНС $a \approx 0$

Будем теперь считать в уравнении (1.1) $q \ll 1$,

$$a = q^2 a_1, \quad \alpha = q \alpha_1. \quad (6.1)$$

Тогда уравнение приводится к системе уравнений в стандартной форме в методе усреднения

$$\dot{x} = qX_1(t, x) + q^2 X_2(t, x) + q^3 X_3(t, x) + q^4 \dots, \quad (6.2)$$

если воспользоваться заменой переменных Боголюбова в задаче о маятнике с вибрирующей точкой подвеса [9]

$$z = \varphi + \frac{q}{4} \varphi \cos(2t), \quad \dot{z} = q\Omega - \frac{q}{2} \varphi \sin(2t). \quad (6.3)$$

После преобразований для новых переменных $x = (x^1, x^2) = (\varphi, \Omega)$ получаем систему вида (6.2)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= q\Omega - \frac{q^2}{4} \Omega \cos(2t) + \frac{q^3}{16} \Omega \cos^2(2t) + q^4 \dots, \\ \dot{\Omega} &= q \left\{ \frac{\Omega}{2} \sin(2t) - a_1 \varphi - \frac{\varphi}{4} \cos^2(2t) - \alpha_1 \left[\Omega - \frac{\varphi}{2} \sin(2t) \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{q^2}{4} \left[\frac{\Omega}{4} \sin(4t) + a_1 \varphi \cos(2t) \right] + \frac{q^3}{64} \Omega \sin(4t) \cos(2t) + q^4 \dots, \end{aligned} \quad (6.4)$$

в которой

$$\begin{aligned} X_1^1 &= \Omega, & X_2^1 &= -\frac{1}{4} \Omega \cos(2t), & X_3^1 &= \frac{1}{32} \Omega [1 + \cos(4t)], \\ X_1^2 &= \frac{1}{2} \Omega \sin(2t) - a_1 \varphi - \frac{1}{8} \varphi [1 + \cos(4t)] - \alpha_1 \left[\Omega - \frac{1}{2} \varphi \sin(2t) \right], \\ X_2^2 &= -\frac{1}{16} \Omega \sin(4t) - \frac{a_1}{4} \varphi \cos(2t), & X_3^2 &= \frac{1}{128} \Omega [\sin(6t) + \sin(2t)]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Начальные значения для для системы (6.4) получаем из выражений (6.3) при $t = 0$

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{z_0}{1 + q/4}, \quad \Omega(0) = \Omega_0 = \frac{\dot{z}_0}{q}. \quad (6.6)$$

Решим систему (6.4) в третьем приближении метода усреднения. Известно [9], [4], что решение имеет вид

$$x = \bar{x} + q u_1(t, \bar{x}) + q^2 u_2(t, \bar{x}) + q^3 \dots, \quad (6.7)$$

где новая переменная \bar{x} находится из уравнения

$$\dot{\bar{x}} = q A_1(\bar{x}) + q^2 A_2(\bar{x}) + q^3 A_3(\bar{x}) + q^4 \dots \quad (6.8)$$

Система уравнений для определения функций u и A приведена в [1] (см. там формулы

(2.7)). Интегрируя уравнения, получаем

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \bar{\Omega}, \quad A_1^2 = -\left(a_1 + \frac{1}{8}\right)\bar{\varphi} - \alpha_1\bar{\Omega}, \quad A_2^1 = A_2^2 = 0, \\ A_3^1 &= \frac{\bar{\Omega}}{16} + \frac{\alpha_1\bar{\varphi}}{32}, \quad A_3^2 = -\left(\frac{a_1}{16} + \frac{9}{2048}\right)\bar{\varphi} - \frac{\alpha_1\bar{\Omega}}{32}, \\ u_1^1 &= 0, \quad u_1^2 = -\frac{\bar{\varphi}}{32}\sin(4t) - \left(\frac{\bar{\Omega}}{4} + \frac{\alpha_1\bar{\varphi}}{4}\right)\cos(2t), \quad u_2^1 = \frac{\bar{\varphi}}{128}\cos(4t) - \\ &- \left(\frac{\bar{\Omega}}{4} + \frac{\alpha_1\bar{\varphi}}{8}\right)\sin(2t), \quad u_2^2 = \left(-\frac{5\bar{\varphi}}{256} - \frac{a_1\bar{\varphi}}{4} + \frac{\alpha_1\bar{\Omega}}{8} + \frac{\alpha_1^2\bar{\varphi}}{8}\right)\sin(2t) + \\ &+ \left(\frac{3\bar{\Omega}}{128} + \frac{\alpha_1\bar{\varphi}}{128}\right)\cos(4t) + \frac{\bar{\varphi}}{768}\sin(6t). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Функции A позволяют записать систему уравнений (6.8) для средних $\bar{\varphi}, \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varphi}} &= \left(q + \frac{q^3}{16}\right)\bar{\Omega} + \frac{\alpha_1 q^3}{32}\bar{\varphi}, \\ \dot{\bar{\Omega}} &= -\left[\frac{q}{8} + \frac{9q^3}{2048} + a_1\left(q + \frac{q^3}{16}\right)\right]\bar{\varphi} - \alpha_1\left(q + \frac{q^3}{32}\right)\bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

При $\alpha_1 = 0$ эта система совпадает с (8.1) в [1].

Из (6.10) с учетом формул (6.1) получаем уравнение осциллятора

$$\ddot{\bar{\varphi}} + \alpha\dot{\bar{\varphi}} + \frac{\lambda}{4}\bar{\varphi} = 0. \quad (6.11)$$

Здесь

$$\lambda = 4a\left(1 + \frac{q^2}{8}\right) + \frac{q^2}{2} + \frac{25q^4}{512} - \frac{\alpha^2 q^2}{8}. \quad (6.12)$$

С помощью функций u из (6.9) запишем решение (6.7) системы (6.4)

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\varphi} + q^2\left[\frac{\bar{\varphi}}{128}\cos(4t) - \frac{\bar{\Omega}}{4}\sin(2t)\right] - \frac{\alpha q \bar{\varphi}}{8}\sin(2t), \\ \Omega &= \bar{\Omega} - q\left[\frac{\bar{\varphi}}{32}\sin(4t) + \frac{\bar{\Omega}}{4}\cos(2t)\right] - \frac{\alpha \bar{\varphi}}{4}\cos(2t) + q^2\left[-\frac{5\bar{\varphi}}{256}\sin(2t) + \right. \\ &+ \left.\frac{3\bar{\Omega}}{128}\cos(4t) + \frac{\bar{\varphi}}{768}\sin(6t)\right] - \frac{a\bar{\varphi}}{4}\sin(2t) + q\alpha\left[\frac{\bar{\varphi}}{128}\cos(4t) + \frac{\bar{\Omega}}{8}\sin(2t)\right] + \frac{\alpha^2 \bar{\varphi}}{8}\sin(2t). \end{aligned}$$

Полагая здесь $t = 0$, используя формулы (6.6), получаем начальные значения для системы (6.10)

$$\bar{\varphi}(0) = z_0\left(1 - \frac{q}{4} + \frac{7q^2}{128}\right), \quad \bar{\Omega}(0) = \frac{z_0}{q}\left(1 + \frac{q}{4} + \frac{5q^2}{128}\right) + \frac{z_0\alpha}{q}\left(\frac{q}{4} - \frac{q^2}{128}\right). \quad (6.13)$$

Начальными значениями для уравнения осциллятора (6.11) будут $\bar{\varphi}(0)$ из (6.13) и

$$\dot{\bar{\varphi}}(0) = \dot{z}_0\left(1 + \frac{q}{4}\right) + z_0\frac{q\alpha}{4}. \quad (6.14)$$

Это выражение получено из первого уравнения (6.10) при $t = 0$ с использованием формул (6.13).

Корни характеристического уравнения для уравнения (6.11) определяются формулами (3.14). Граница области I параметрического резонанса на плоскости aOq следует из уравнения (3.15) с использованием (6.12)

$$a = -\frac{q^2}{8} + \frac{7q^4}{2048} + \frac{q^2\alpha^2}{32}. \quad (6.15)$$

Как и при резонансах $a \approx 1; 4; 9$, границу области II медленных затухающих колебаний функции $\bar{\varphi}(t)$ находим из уравнения $\lambda = \alpha^2$

$$a' = -\frac{q^2}{8} + \frac{7q^4}{2048} + \frac{\alpha^2}{4}. \quad (6.16)$$

На рис. 4 для $\alpha = 0.25$ указанные границы показаны кривыми 2 и 3 (пунктир) соответственно. Кривая 1 получена численным решением уравнения (1.1). Между областями I и II (между кривыми 2 и 3) имеется узкая область экспоненциально затухающего решения уравнения (6.11).

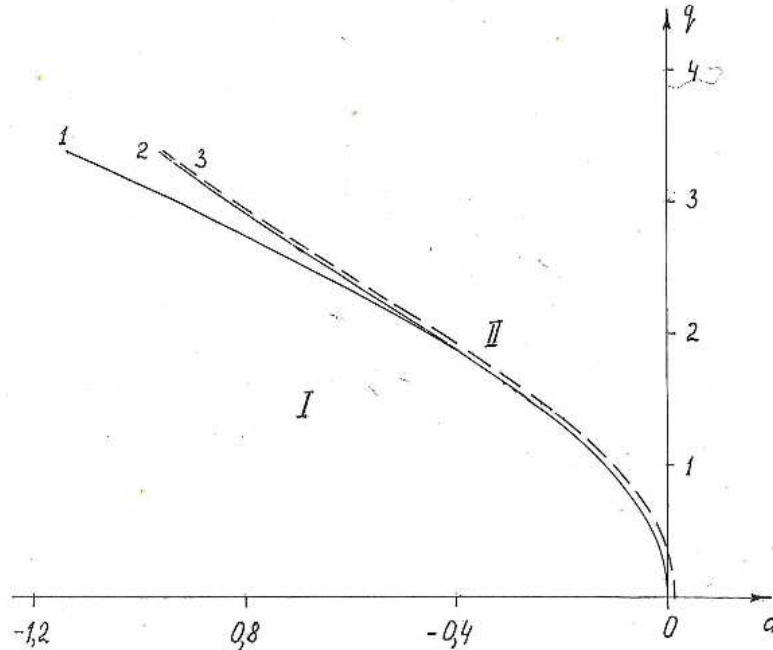


Рис. 4.

В области I параметрического резонанса ($\lambda < 0$) $k_{1,2}$ (3.14) вещественные, и решение уравнения (6.11) с учетом начальных значений $\bar{\varphi}(0)$, $\dot{\bar{\varphi}}(0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t) &= \frac{1}{k_1 - k_2} \left\{ [\dot{\bar{\varphi}}(0) - k_2 \bar{\varphi}(0)] e^{k_1 t} - [\dot{\bar{\varphi}}(0) - k_1 \bar{\varphi}(0)] e^{k_2 t} \right\} = \\ &= \left[\bar{\varphi}(0) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{D}}{2} t + \frac{\alpha \bar{\varphi}(0) + 2 \dot{\bar{\varphi}}(0)}{\sqrt{D}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{D}}{2} t \right] e^{-0.5 \alpha t}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

При условии

$$\dot{\bar{\varphi}}(0) - k_2 \bar{\varphi}(0) = 0$$

имеем неустойчивое затухающее решение.

На границе области параметрического резонанса ($\lambda = 0$) корни $k_1 = 0$, $k_2 = -\alpha$. Из уравнения (6.11) получаем

$$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(0) + \frac{\dot{\bar{\varphi}}(0)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (6.18)$$

Если $\dot{\bar{\varphi}}(0) = 0$ решение постоянное.

В области *II* медленных затухающих колебаний функций $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{\Omega}(t)$ имеем $\lambda > \alpha^2$, $k_{1,2} = -0.5(-\alpha \pm \sqrt{-D} i)$,

$$\bar{\varphi}(t) = \left[\bar{\varphi}(0) \cos \frac{\sqrt{-D}}{2} t + \frac{\alpha \bar{\varphi}(0) + 2\dot{\bar{\varphi}}(0)}{\sqrt{-D}} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2} t \right] e^{-0.5\alpha t}. \quad (6.19)$$

Эта формула справедлива вблизи границы области *II*.

На самой границе области *II* $\lambda = \alpha^2$, $k_{1,2} = -0.5\alpha$, и решение уравнения (6.11) записывается как

$$\bar{\varphi}(t) = \left[\bar{\varphi}(0) + \frac{\alpha \bar{\varphi}(0) + 2\dot{\bar{\varphi}}(0)}{2} t \right] e^{-0.5\alpha t}. \quad (6.20)$$

В области экспоненциально затухающих колебаний функций $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{\Omega}(t)$ справедливы неравенства $0 < \lambda < \alpha^2$, $k_{1,2} < 0$, и функция $\bar{\varphi}(t)$ имеет вид (6.17).

Решение $z(t)$ уравнения (1.1) следует из первой формулы (6.3)

$$z = \left[1 + \frac{q}{4} \cos(2t) \right] \varphi = \left[1 + \frac{q}{4} \cos(2t) \right] (\bar{\varphi} + qu_1^1 + q^2 u_2^1 + q^3 \dots).$$

Подставим сюда функции $u_{1,2}^1$ из (6.9). В u_2^1 выразим $\bar{\Omega}$ через $\bar{\varphi}$, $\dot{\bar{\varphi}}$, используя первое уравнение системы (6.10). В результате получаем

$$z(t) = \left[1 + \frac{q}{4} \cos(2t) + \frac{q^2}{128} \cos(4t) - \frac{\alpha q}{8} \sin(2t) \right] \bar{\varphi} - \left[\frac{q}{4} \sin(2t) + \frac{q^2}{32} \sin(4t) \right] \dot{\bar{\varphi}}.$$

Здесь амплитудный множитель $\bar{\varphi}(t)$ в трех областях на плоскости aOq и на границах областей определяется выражениями (6.17)-(6.20).

Другой амплитудный множитель $\dot{\bar{\varphi}}$ получается дифференцированием этих выражений. В областях параметрического резонанса *I* и экспоненциально затухающих $\bar{\varphi}$, $\dot{\bar{\varphi}}$ приходим к выражению

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \left[\dot{\bar{\varphi}}(0) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{D}}{2} t + \frac{(D - \alpha^2)\bar{\varphi}(0) - 2\alpha\dot{\bar{\varphi}}(0)}{2\sqrt{D}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{D}}{2} t \right] e^{-0.5\alpha t}.$$

В области *II* медленных затухающих колебаний указанных функций получаем

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \left[\dot{\bar{\varphi}}(0) \cos \frac{\sqrt{-D}}{2} t + \frac{(D - \alpha^2)\bar{\varphi}(0) - 2\alpha\dot{\bar{\varphi}}(0)}{2\sqrt{-D}} \sin \frac{\sqrt{-D}}{2} t \right] e^{-0.5\alpha t}.$$

На границе области *I* (кривая 2 на рис. 4)

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \dot{\bar{\varphi}}(0) e^{-\alpha t}.$$

Наконец, на границе области *II* (кривая 3 на рис. 4) производная равна

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \left\{ \dot{\bar{\varphi}}(0) - \frac{\alpha}{2} \left[\dot{\bar{\varphi}}(0) + \frac{\alpha}{2} \bar{\varphi}(0) \right] t \right\} e^{-0.5\alpha t}.$$

Во всех полученных выражениях начальное значение $\bar{\varphi}(0)$ вычисляется по первой формуле из (6.13), $\dot{\bar{\varphi}}(0)$ - по формуле (6.14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курин, А. Ф. Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе / А. Ф. Курин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48, № 4. — С. 633–650.

2. Курин, А. Ф. Задача Коши для уравнения Матье вдали от параметрического резонанса / А. Ф. Курин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1419–1433.
3. Курин, А. Ф. Спектральный критерий устойчивости и задача Коши для уравнения Хилла при параметрическом резонансе / А. Ф. Курин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 3. — С. 498–511.
4. Гребеников, Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е. А. Гребеников. — М. : Наука, 1986.
5. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. — М. : Наука, 1981.
6. Гребеников, Е. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов. — М. : Наука, 1979.
7. Гребеников, Е. А. Введение в резонансную аналитическую динамику / Е. А. Гребеников, Ю. А. Митропольский, Ю. А. Рябов. — М. : Янус-К, 1989.
8. Горелик, Г. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами / Г. Горелик // Ж. технич. физ. — 1935. — Т. 5, № 3. — С. 489–517.
9. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974.

REFERENCES

1. Kurin A.F. The Cauchy problem for the Mathieu equation at the parametric resonance. [Kurin A.F. Zadacha Koshi dlya uravneniya Mat'e pri parametricheskom rezonanse]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 4, pp. 633–650.
2. Kurin A.F. The Cauchy problem for the Mathieu equation away from parametric resonance. [Kurin A.F. Zadacha Koshi dlya uravneniya Mat'e vdali ot parametricheskogo rezonansa]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 8, pp. 1419–1433.
3. Kurin A.F. Spectral stability criterion and the Cauchy problem for the hill equation at parametric resonance. [Kurin A.F. Spektral'nyy kriteriyj ustojchivosti i zadacha Koshi dlya uravneniya Xilla]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 3, pp. 498–511.
4. Grebenikov E.A. Averaging method in applied problems. [Grebenikov E.A. Metod usredneniya v prikladnyx zadachax]. Moscow: Nauka, 1986.
5. Moiseev N.N. Asymptotic methods of nonlinear mechanics. [Moiseev N.N. Asimptoticheskie metody nelinejnoj mexaniki]. Moscow: Nauka, 1981.
6. Grebenikov E.A., Ryabov Yu.A. Constructive methods of analysis of nonlinear systems. [Grebenikov E.A., Ryabov Yu.A. Konstruktivnye metody analiza nelinejnyx sistem]. Moscow: Nauka, 1979.
7. Grebenikov E.A., Mitropolskii Yu.A., Ryabov Yu.A. Introduction to resonance analytical dynamics. [Grebenikov E.A., Mitropol'skiy Yu.A., Ryabov Yu.A. Vvedenie v rezonansnyu analiticheskuyu dinamiku]. Moscow, 1989.
8. Gorelik G. Resonance phenomena in linear systems with periodically changing parameters. [Gorelik G. Rezonansnye yavleniya v linejnyx sistemax s periodicheski menyayushhimisya parametrami]. *ZHurnal texnicheskoy fiziki — Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 1935, vol. 5, no. 3, pp. 489–517.
9. Bogolyubov N.N., Mitropolskii Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. [Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyx kolebaniy]. Moscow: Nauka, 1974.

Беломытцева Е. Г., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия

E-mail: bell-lenochk@mail.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Belomytseva E. G., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: bell-lenochk@mail.ru

Tel.: +7(473)220-87-48

Курин А. Ф., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия

E-mail: afkurin@mail.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Kurin A. F., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: afkurin@mail.ru

Tel.: +7(473)220-87-48

Туленико Е. В., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия

E-mail: tulenko@mail.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Tulenko E. V., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: tulenko@mail.ru

Tel.: +7(473)220-87-48