УДК 517.983 + 517.927.2

МЕТОД СБАЛАНСИРОВАННОГО ОБРЕЗАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ*

Е. Г. Беломытцева, В. Г. Курбатов, Е. Б. Туленко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.11.2016 г.

Аннотация. Изучается система

$$x'(t) = Ax(t) + bu(t),$$
$$y(t) = cx(t) + du(t),$$

в предположении, что спектр матрицы A не пересекает мнимую ось. Это предположение обеспечивает существование ограниченного на $\mathbb{R}$ выхода y при любом ограниченном входе u. Ограниченное решение строится в виде специальной аналитической функции от матрицы A. Описывается модификация метода сбалансированного обрезания. Метод основан на построении замены переменных T, превращающей грамианы достижимости и наблюдаемости исходной системы в одну и ту же диагональную матрицу. Этот метод позволяет приблизить функцию Грина исходной системы функцией Грина системы, в которой порядок матрицы A существенно меньше. Приводится численный пример, иллюстрирующий эффективность метода.

Ключевые слова: задача об ограниченных решениях, функциональное исчисление, функция Грина, сбалансированное обрезание, грамиан.

THE METHOD OF BALANCED TRUNCATION FOR THE BOUNDED SOLUTIONS PROBLEM

E. G. Belomytseva, V. G. Kurbatov, E. B. Tulenko

Abstract. We investigate the system

$$x'(t) = Ax(t) + bu(t),$$
$$y(t) = cx(t) + du(t).$$

under the assumption that the spectrum of the matrix A does not intersect the imaginary axis. This assumption ensures the existence of a bounded output y for every bounded input u. A modification of the method of balanced truncation is described. The method is based on the change T of variables that turns the reachability and observability gramians into the same diagonal matrix. The method allows one to approximate Green's function of the initial system by Green's function of a system in which the order of the matrix A is essentially smaller. A numerical example that illustrates the effectiveness of the method is given.

Keywords: bounded solutions problem, functional calculus, Green's function, functional calculus, balanced truncation, gramian.

Рассмотрим линейную стационарную систему, динамика которой описывается уравнениями

$$x'(t) = Ax(t) + bu(t),$$
$$y(t) = cx(t) + du(t).$$

* Работа поддержана Министерством образования и науки РФ, государственное задание № 3.1761.2017/ПЧ.

Здесь A — квадратная матрица, b — матрица-столбец, c — матрица-строка, а d — число. Функция u имеет смысл входного сигнала, функция y — выходного, а вектор $x(t)$ — внутреннего состояния. Например, если уравнение $x'(t) = Ax(t)$ описывает работу радиосхемы, то b соответствует контактам, через которые подается входной сигнал u (напряжение или ток), а c – контактам, с которых снимается выходной сигнал y.

Предполагается, что порядок N матрицы A достаточно велик, в силу чего прямое использование этих уравнений приводит к большим затратам компьютерного времени и памяти.

С другой стороны, для больших систем часто оказывается, что полная модель является избыточной в том смысле, что некоторые ее части с рассматриваемыми входом и выходом связаны слабо. В этом случае разумно перейти к модели меньшего порядка, описывающей ту же систему приближенно. Такой переход называют *понижением порядка* (order reduction).

Понижение порядка можно осуществлять как из физических соображений, путем выявления физических процессов, которые в данной задаче малосущественны, так и чисто математическими методами путем анализа связи между u, y и x. Методам второго типа посвящены работы [15], [16], [19], [25], [26] и многие другие. Настоящая статья посвящена одному из таких методов — методу сбалансированного обрезания (balanced truncation) [22], [15], [19], [24].

В отличие от работ [22], [15], [19] мы применяем метод сбалансированного обрезания не к устойчивой начальной задаче, а к задаче об ограниченных решениях, т. е. по сути к обратному к дифференциальному оператору, рассматриваемому на действительной оси. Напомним, что *задачей об ограниченных решениях* называют [1], [3], [5], [6], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [17] поиск ограниченного на $\mathbb{R}$ выхода y, соответствующего ограниченному на $\mathbb{R}$ входу u; предполагается, что спектр матрицы A не пересекает мнимую ось. Отметим также работы [28], [18], в которых метод сбалансированного обрезания применяется к неустойчивым системам.

Другая, чисто математическая, интерпретация рассматриваемой в статье задачи состоит в следующем. Предположим, что спектр матрицы A не пересекает мнимую ось. Тогда, как известно (см. ниже теорему 3), дифференциальное уравнение

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

имеет единственное ограниченное решение x при любом ограниченном свободном члене f. При этом решение допускает представление

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s) f(t-s)\, ds.$$

Матричнозначную функцию $\mathcal{G}$ называют *функцией Грина* задачи об ограниченных решениях. Предположим, нас интересует только одна компонента $\mathcal{G}_{ij}$ функции Грина. В работе описывается модификация метода сбалансированного обрезания, позволяющая приблизить $\mathcal{G}_{ij}$ компонентой $\widehat{\mathcal{G}}_{i'j'}$ функции Грина уравнения

$$\widehat{x}'(t) = \widehat{A}x(t) + \widehat{f}(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

в котором матрица $\widehat{A}$ имеет существенно меньший порядок, чем матрица A.

1. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Элементы пространства $\mathbb{C}^N$ будем представлять себе как матрицы-столбцы. Пространство $\mathbb{C}^N$ будем рассматривать с евклидовой нормой $|\cdot|$ и порождающим ее скалярным произведением $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Символом $\mathbb{C}^{N\times N}$ будем обозначать множество всех матриц размера $N \times N$. Символами x^H и A^H будем обозначать транспонированные комплексно сопряженные матрицы; A^{-H} означает обратную к квадратной матрице A^H; для $b \in \mathbb{C}^N$ матрица b^H является строкой.

Будем обозначать символом $\mathbf{1}$ единичную матрицу. Пусть $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Многочлен

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{1} - A)$$

называют *характеристическим многочленом* матрицы A. Полный набор $\sigma(A)$ корней характеристического многочлена называют [13] *спектром* матрицы A.

Пусть $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее $\sigma(A)$, а $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. *Функцию f от матрицы A* определяют [13, гл. V, § 1], [5, p. 17] по формуле

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}\,d\lambda,$$

где контур Γ окружает $\sigma(A)$.

Предложение 1 ([13, теорема 5.2.5])**.** *Отображение $f \mapsto f(A)$ сохраняет алгебраические операции:*

$$\begin{aligned}(f+g)(A) &= f(A) + g(A),\\ (\alpha f)(A) &= \alpha f(A),\\ (fg)(A) &= f(A)g(A),\end{aligned}$$

где операции $f+g$, αf и fg понимаются поточечно.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Динамической системой (точнее, математической моделью непрерывной линейной стационарной динамической системы с одним входом и одним выходом) называют [15], [23] систему уравнений

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) + b\,u(t),\\ y(t) &= c\,x(t) + d\,u(t).\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, b,$c^H \in \mathbb{C}^N$ — заданные матрицы (тем самым c — матрица-строка), а $d \in \mathbb{C}$. Функция u имеет смысл входного сигнала, функция y — выходного, а вектор $x(t)$ — внутреннего состояния. Число N называют *порядком* или *размерностью фазового пространства* динамической системы.

С точки зрения прикладной интерпретации постановка задачи (1) означает следующее. Дифференциальное уравнение $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ описывает систему, состоящую из многих объектов; координаты пространства $\mathbb{C}^N$ соответствуют параметрам (состояниям) разных объектов (например, система представляет собой радиосхему; составляющие объекты — резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности; параметры объектов — токи и напряжения). Управление системой осуществляется посредством изменения одного параметра; ему соответствует вектор b; иными словами, входной сигнал u меняет только этот параметр (например, u — это входное напряжение или входной ток, а b описывает контакты, к которым входной сигнал u приложен). Нас интересует изменение также только одного параметра; ему соответствует функционал c (например, это напряжение на двух других контактах).

Понятно, что динамическая система полностью определяется заданием A, b, c и d. Поэтому информацию о ней удобно сокращенно записывать в виде блочной матрицы

$$\Xi = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array}\right), \tag{2}$$

которую называют [15, с. 64] *фазовым представлением* (state space description) системы (1).

Полезно отметить следующую теорему.

Теорема 2 ([15, с. 65]). *Явная зависимость выхода y от входа и системы* (1) *при наличии начального условия*

$$x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

задается формулой

$$y(t) = c\Big(e^{A(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-r)}bu(r)\,dr\Big) + du(t).$$

3. ЗАДАЧА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, рассмотрим функции

$$\exp_{+,t}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda t}, & \text{если } t > 0,\\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

$$\exp_{-,t}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } t > 0,\\ -e^{\lambda t}, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

$$g_t(\lambda) = \begin{cases} \exp_{-,t}(\lambda), & \text{если } \operatorname{Re}\lambda > 0,\\ \exp_{+,t}(\lambda), & \text{если } \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases}$$

Функция g_t не определена при $\operatorname{Re}\lambda = 0$. При любом фиксированном $t \neq 0$ эти три функции являются аналитическими по λ на своей области определения.

Обозначим через $C = C(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ банахово пространство всех непрерывных ограниченных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ с нормой $\|f\| = \|f\|_C = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$. Обозначим через $C^1 = C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ банахово пространство всех непрерывно дифференцируемых функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$, ограниченных вместе с производной, с нормой $\|x\| = \|x\|_{C^1} = \|x'\|_C + \|x\|_C$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (на всей действительной оси $\mathbb{R}$)

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Задачей об ограниченных решениях для уравнения (4) называют [5], [6], [3], [11], [12], [8], [9] задачу о нахождении решения $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$, соответствующего $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$. *Задачей об ограниченных решениях* для динамической системы (1) будем называть задачу о нахождении решения $y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, соответствующего $u \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Теорема 3 ([5, теорема 4.1, с. 81]). *Уравнение* (4) *имеет единственное решение $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ для любой $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда спектр $\sigma(A)$ матрицы A не пересекает мнимую ось. Это решение допускает представление*

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s)f(t-s)\,ds,$$

где

$$\mathcal{G}(t) = g_t(A), \qquad t \neq 0.$$

Функцию $\mathcal{G}$ называют [5] *функцией Грина* задачи об ограниченных решениях для уравнения (4).

Следствие 4. *Пусть спектр $\sigma(A)$ матрицы A не пересекает мнимую ось. Тогда при любой $u \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ система* (1) *имеет решение $y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, задаваемое формулой*

$$x(t) = c\biggl(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s)bu(t-s)\,ds\biggr) + d\,u(t),$$

или

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s)\,u(t-s)\,ds + d\,u(t),$$

где

$$G(t) = c\,\mathcal{G}(t)b, \qquad t \neq 0.$$

4. ГРАМИАНЫ ДОСТИЖИМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ

В дальнейшем будем считать, что спектр матрицы A не пересекает мнимую ось. В нашем изложении важную роль будут играть матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s)bb^H\mathcal{G}(s)^H\,ds, \\ \mathcal{Q} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s)^Hc^Hc\,\mathcal{G}(s)\,ds, \end{aligned} \tag{5}$$

имеющие размер $N \times N$. Их аналоги для случая начальной задачи называют [15] *грамианами достижимости и наблюдаемости* (reachability and observability gramians) соответственно. Сохраним те же названия.

Предложение 5. *Грамианы* (5) *являются эрмитовыми и неотрицательно определенными матрицами.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{C}^N$ имеем

$$\langle\mathcal{P}x,x\rangle = \biggl\langle \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s)bb^H\mathcal{G}(s)^Hx\,ds,\, x\biggr\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^H\mathcal{G}(s)bb^H\mathcal{G}(s)^Hx\,ds. \tag{6}$$

Заметим, что $x^H\mathcal{G}(s)b$ — комплексное число, а $b^H\mathcal{G}(s)^Hx$ — сопряженное к нему. Поэтому подынтегральное выражение неотрицательно. Следовательно, матрица $\mathcal{P}$ неотрицательно определена. Остается напомнить [2, 10.44], что всякая неотрицательно определенная матрица является эрмитовой.

Случай матрицы $\mathcal{Q}$ аналогичным образом вытекает из представления

$$\langle\mathcal{Q}x,x\rangle = \biggl\langle \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(s)^Hc^Hc\,\mathcal{G}(s)x\,ds,\, x\biggr\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^H\mathcal{G}(s)^Hc^Hc\,\mathcal{G}(s)x\,ds. \quad \square$$

Замечание 6. Не вникая в подробности [15], отметим, что квадратичные формы $x \mapsto \langle\mathcal{P}x,x\rangle$ и $x \mapsto \langle\mathcal{Q}x,x\rangle$ показывают, насколько сильно фазовое состояние x связано с векторами входа b и выхода c. При уменьшении размерности фазового вектора x (см. § 6) разумно в первую очередь отрезать те части, которые слабо связано как с b, так и с c. Обрезание называют сбалансированным, если учет b и c является равноправным. Ниже это достигается путем подбора замены T, которая превращает оба грамиана $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ в одну и ту же матрицу Σ.

5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Пусть $T \in \mathbb{C}^{N\times N}$ — обратимая матрица. Сделаем в уравнениях (1) замену

$$\widehat{x} = Tx, \qquad x = T^{-1}\widehat{x}. \tag{7}$$

В результате такой замены уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} T^{-1}\widehat{x}'(t) &= AT^{-1}\widehat{x}(t) + bu(t),\\ y(t) &= cT^{-1}\widehat{x}(t) + du(t). \end{aligned}$$

После умножения первого уравнения на T приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \widehat{x}'(t) &= TAT^{-1}\widehat{x}(t) + Tbu(t),\\ y(t) &= cT^{-1}\widehat{x}(t) + du(t). \end{aligned}$$

Понятно, что эти уравнения задают ту же зависимость y от u, что и уравнения (1). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7 ([20, предложение 6.1])**.** *Пусть $T \in \mathbb{C}^{N\times N}$ — произвольная обратимая матрица. Тогда система с фазовым представлением* (2) *эквивалентна (в том смысле, что задает ту же зависимость y от u) системе с фазовым представлением*

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{b}\\ \widetilde{c} & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & Tb\\ \hline cT^{-1} & d \end{array}\right). \tag{8}$$

При этом начальное условие (3)*, очевидно, заменяется на*

$$\widetilde{x}(t_0) = Tx_0.$$

Функции Грина, соответствующую системе (8), будем обозначать символами $\widetilde{\mathcal{G}}$ и $\widetilde{G}$, а соответствующие грамианы — символами $\widetilde{\mathcal{P}}$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}$.

Предложение 8. *В результате замены* (7) *грамианы преобразуются по формулам:*

$$\widetilde{\mathcal{P}} = T\mathcal{P}T^{H}, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}} = T^{-H}\mathcal{Q}T^{-1}.$$

Доказательство. В силу равенства $\widetilde{A} = TAT^{-1}$ имеем

$$\widetilde{\mathcal{G}}(s) = T\mathcal{G}(s)T^{-1}, \qquad \widetilde{\mathcal{G}}(s)^{H} = T^{-H}\mathcal{G}(s)^{H}T^{H}. \tag{9}$$

Умножая определения (5) на T, T^{H} и обратные к ним с подходящих сторон, получаем

$$\begin{aligned} T\mathcal{P}T^{H} &= \int_{-\infty}^{\infty} T\mathcal{G}(s)bb^{H}\mathcal{G}(s)^{H}T^{H}\,ds,\\ T^{-H}\mathcal{Q}T^{-1} &= \int_{-\infty}^{\infty} T^{-H}\mathcal{G}(s)^{H}c^{H}c\,\mathcal{G}(s)T^{-1}\,ds. \end{aligned}$$

Или

$$T\mathcal{P}T^H = \int_{-\infty}^{\infty} T\mathcal{G}(s)T^{-1}Tbb^HT^HT^{-H}\mathcal{G}(s)^HT^H\,ds,$$

$$T^{-H}\mathcal{Q}T^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} T^{-H}\mathcal{G}(s)^HT^HT^{-H}c^HcT^{-1}T\mathcal{G}(s)T^{-1}\,ds.$$

Воспользуемся равенствами (9):

$$T\mathcal{P}T^H = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{G}}(s)Tbb^HT^H\widetilde{\mathcal{G}}(s)^H\,ds,$$

$$T^{-H}\mathcal{Q}T^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{G}}(s)^HT^{-H}c^HcT^{-1}\widetilde{\mathcal{G}}(s)\,ds.$$

Наконец, воспользуемся тождествами $\widetilde{b} = Tb$ и $\widetilde{c} = cT^{-1}$ из формулы (8):

$$T\mathcal{P}T^H = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{G}}(s)\widetilde{b}\widetilde{b}^H\widetilde{\mathcal{G}}(s)^H\,ds,$$

$$T^{-H}\mathcal{Q}T^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\mathcal{G}}(s)^H\widetilde{c}^H\widetilde{c}\widetilde{\mathcal{G}}(s)\,ds. \quad \square$$

6. ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА

Если по причине большой размерности N фазового пространства $\mathbb{C}^N$ решение системы (1) требует необоснованно больших затрат ресурсов (памяти и быстродействия), то строят приближенную модель, которая использует фазовое пространство $\mathbb{C}^n$ существенно меньшей размерности n. На физическом уровне подобный переход обычно означает, что из модели исключают учет некоторых физических явлений, которые по тем или иным соображениям являются малосущественными. На математическом уровне это сводится к замене матрицы A матрицей $\widehat{A}$ так, чтобы решение y системы (1) изменилось незначительно. Тем самым, мы приходим к следующему понятию.

Системой пониженного порядка (reduced order system) по отношению к системе (1) называют [15], [25], [26] систему

$$\begin{aligned} \widehat{x}'(t) &= \widehat{A}\widehat{x}(t) + \widehat{b}u(t), \\ \widehat{y}(t) &= \widehat{c}\,\widehat{x}(t) + du(t), \end{aligned} \tag{10}$$

в которой порядок n матрицы $\widehat{A}$ значительно меньше порядка N матрицы A, но решение $\widehat{y}$ близко к решению y системы (1).

Метод построения системы (10) называют *проекционным*, если коэффициенты $\widehat{A}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$ в системе пониженного порядка (10) выражаются через коэффициенты исходной системы (1) по формулам

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \Lambda AV, \\ \widehat{b} &= \Lambda b, \\ \widehat{c} &= cV, \end{aligned} \tag{11}$$

где $V \in {}^{N\times n}$, а $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times N}$. Коэффициенты системы (10) принято записывать в виде матрицы

$$\widehat{\Xi} = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda\widehat{A}\Lambda^H & \Lambda\widehat{b} \\ \hline \widehat{c}V & d \end{array}\right).$$

Идею проекционных методов обычно связывают с именем Галеркина[1)] .

Из технических соображений будем всегда предполагать, что выполнено *условие нормировки*

$$\Lambda V = \mathbf{1}_{n\times n}, \tag{12}$$

где $\mathbf{1}_{n\times n}$ — единичная матрица размера $n \times n$. Более того, обычно мы будем предполагать, что выполнено более сильное условие (13) из следующего предложения.

Предложение 9. *Пусть столбцы матрицы V ортонормированы и матрица Λ определена по формуле*[2)]

$$\Lambda = V^H. \tag{13}$$

Тогда условие (12) *выполнено, а строки матрицы Λ также ортонормированы. Кроме того, матрица $V\Lambda \in \mathbb{C}^{N\times N}$ задает ортогональный проектор P на линейную оболочку столбцов матрицы V. И обратно, всякий ортогональный проектор P задается таким образом.*

Доказательство. Доказательство очевидно. □

7. АЛГОРИТМ СБАЛАНСИРОВАННОГО ОБРЕЗАНИЯ

Понятно, что качество приближения посредством системы (10) принципиально зависит от выбора матриц V и Λ. По смыслу эти матрицы отрезают от фазового вектора x некоторые координаты. В настоящем параграфе описывается модификация метода сбалансированного обрезания (balanced truncation) [22], [15], [19], обычно применяемого для построения системы пониженного порядка с устойчивой матрицей A.

Представим матрицы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ в виде [15, с. 210]

$$\mathcal{P} = UU^H, \qquad U^H\mathcal{Q}U = K\Sigma^2K^H, \tag{14}$$

где первая формула — это разложение Холецкого [2], [4] матрицы $\mathcal{P}$, а вторая — результат приведения самосопряженной, неотрицательно определенной матрицы $U^H\mathcal{Q}U$ к диагональному виду с помощью унитарного преобразования K; в пакете “Математика” [27], [7] обе эти процедуры реализованы в виде отдельных команд. Таким образом, U — верхне-треугольная матрица, K — унитарная, а Σ — диагональная неотрицательно определенная.

Замечание 10. Из (14) видно разложение Холецкого и для $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q} = (UK\Sigma)(UK\Sigma)^H.$$

Определим матрицу T по формуле [15, с. 210]

$$T = \Sigma^{1/2}K^HU^H. \tag{15}$$

При этом, очевидно,

$$T^{-1} = UK\Sigma^{-1/2}.$$

[1)] Строго говоря, в методе Галеркина рассматривается алгебраическое уравнение $Ax = f$, а не дифференциальное и обсуждается последовательность уравнений пониженного порядка.

[2)] В случае выполнения этого условия метод обычно называют методом Бубнова–Галеркина.

Выполним в системе (1) замену (15). В результате возникнет система с матрицей

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{b} \\ \widetilde{c} & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & Tb \\ \hline cT^{-1} & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma^{1/2}K^HU^HAUK\Sigma^{-1/2} & \Sigma^{1/2}K^HU^Hb \\ \hline cUK\Sigma^{-1/2} & d \end{array}\right).$$

Теорема 11. *После выполнения замены* (15) *оба грамиана совпадают с матрицей* Σ:

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \Sigma, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}} = \Sigma.$$

Доказательство. В силу предложения 8 имеем

$$\widetilde{\mathcal{P}} = T\mathcal{P}T^H, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}} = (T^{-1})^H\mathcal{Q}T^{-1}.$$

Подставим сюда вместо T представление (15):

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \Sigma^{1/2}K^HU^{-1}\mathcal{P}(U^{-1})^HK\Sigma^{1/2}, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}} = \Sigma^{-1/2}K^HU^H\mathcal{Q}UK\Sigma^{-1/2}.$$

Наконец, подставим сюда формулы (14):

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \Sigma^{1/2}K^HU^{-1}UU^H(U^{-1})^HK\Sigma^{1/2}, \qquad \widetilde{\mathcal{Q}} = \Sigma^{-1/2}K^HK\Sigma^2K^HK\Sigma^{-1/2}.$$

После очевидных сокращений получаются нужные формулы. □

Преобразование системы, при котором грамианы становятся одинаковыми, называют [22], [15], [19] *балансированием.* Целесообразность балансирования объяснялась выше в замечании 6.

Возьмем произвольное натуральное число $n < N$. По смыслу n существенно меньше N. Рассмотрим матрицу $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times N}$ ортогонального проектирования на первые n координат:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\Lambda^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Систему пониженного порядка (11), соответствующую фазовому представлению

$$\left(\begin{array}{c|c} \Lambda\widetilde{A}\Lambda^H & \Lambda\widetilde{b} \\ \hline \widetilde{c}\Lambda^H & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda\Sigma^{1/2}K^HU^HAUK\Sigma^{-1/2}\Lambda^H & \Lambda\Sigma^{1/2}K^HU^Hb \\ \hline cUK\Sigma^{-1/2}\Lambda^H & d \end{array}\right), \tag{16}$$

называют системой, полученной в результате *сбалансированного обрезания* исходной системы (1).

8. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Численный эксперимент проводился средствами пакета "Математика" [27], [7]. Было взято число $N = 30$ и сформирована матрица A размера $N \times N$, состоящая из случайных

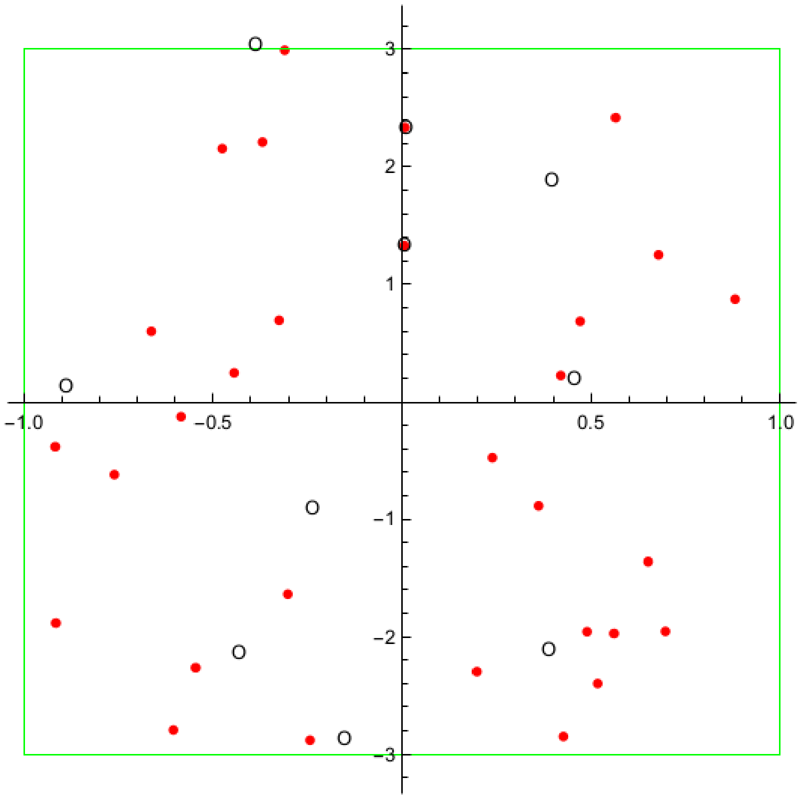

Рис. 1. *Спектры матриц* A *(показаны точками) и* $\widehat{A}=\Lambda\widetilde{A}\Lambda^H$ *(показаны кружками)*

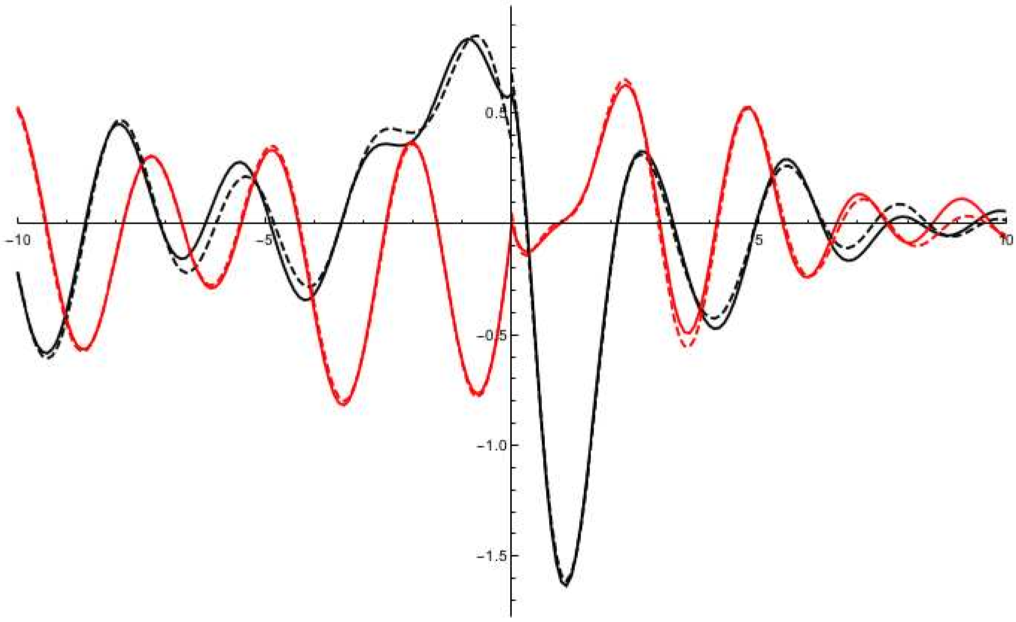

Рис. 2. *Функции Грина систем* (1) *(действительная часть показана темной сплошной линией, а мнимая — бледной сплошной линией) и* (10) *(действительная часть показана темной пунктирной линией, а мнимая — бледной пунктирной линией)*

комплексных чисел, спектр которой содержится (равномерно распределен) в прямоугольнике $[-1,1] \times [-3i,3i]$. Матрицы b и c также составлены из случайных чисел, в качестве d взят ноль. Методом работы [21] была найдена функция Грина $\mathcal{G}$ уравнения (4), а затем с помощью следствия 4 — функция Грина системы (1). Стандартными командами пакета "Математика" были построены разложения (14), вычислена матрица (15) и выполнена соответствующая замена переменных. В качестве n было взято число 10, построена система (16) пониженного порядка, найдены спектр матрицы $\widehat{A}$ и функция Грина $\widehat{\mathcal{G}}$ новой системы (10). Результаты вычислений показаны на рис. 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков, А. Г. Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений / А. Г. Баскаков // Математ. сб. — 2015. — Т. 206, № 8. — С. 1049–1086.

2. Воеводин, В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.

3. Годунов, С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами : учебное пособие. Т. 1: Краевые задачи / С. К. Годунов. — Новосибирск : Издательство Новосибирского унверситета, 1994. — 264 с.

4. Голуб, Д. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

5. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. Нелинейный анализ и его приложения. — М. : Наука, 1970. — 536 с.

6. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

7. Курбатов, В. Г. Пакет "Математика" в прикладных научных исследованиях : учебное пособие / В. Г. Курбатов, В. Е. Чернов. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — 240 с.

8. Массера, Х. Л. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер. — М. : Мир, 1970. — 456 с.

9. Панков, А. А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений / А. А. Панков. — Киев : Наукова думка, 1985. — 182 с.

10. Печкуров, А. В. Бисекториальные операторные пучки и задача об ограниченных решениях / А. В. Печкуров // Известия вузов. Математика. — 2012. — № 3. — С. 31–41.

11. Харман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Харман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

12. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М. : Мир, 1985. — 376 с.

13. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : ИЛ, 1962. — 829 с.

14. Akhmerov, R. R. Exponential dichotomy and stability of neutral type equations / R. R. Akhmerov, V. G. Kurbatov // J. Differential Equations. — 1988. — V. 76, № 1. — P. 1–25.

15. Antoulas, A. C. Approximation of large-scale dynamical systems / A. C. Antoulas. — Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005. — 479 p

16. Benner, P. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems / P. Benner, S. Gugercin, K. Willcox // SIAM Rev. — 2015. — V. 57, № 4. — P. 483–531.

17. Boichuk, A. A. Bounded solutions of linear differential equations in a Banach space / A. A. Boichuk, A. A. Pokutnii // Nonlinear Oscillations. — 2006. — V. 9, № 1. — P. 3–14.

18. Flinois, T. L. B. Projection-free approximate balanced truncation of large unstable systems / T. L. B. Flinois, A. S. Morgans, P. J. Schmid // Phys. Rev. E (3). — 2015. — V. 92, № 2. —

P. 023012, 20.

19. Gugercin, S. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results / S. Gugercin, A. C. Antoulas // Internat. J. Control. — 2004. — V. 77, № 8. — P. 748–766.

20. Kurbatov, V. G. Krylov subspace methods of approximate solving differential equations from the point of view of functional calculus / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova // Eurasian Math. J. — 2012. — V. 3, № 4. — P. 53–80.

21. Kurbatov, V. G. Computation of Green's function of the bounded solutions problem / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova // Computational Methods in Applied Mathematics. — Published Online 2017-10-12. — https://doi.org/10.1515/cmam–2017–0042.

22. Moore, B. C. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction / B. C. Moore // IEEE Trans. Automat. Control. — 1981. — V. 26, № 1. — P. 17–32.

23. Polderman, J. W. Introduction to mathematical systems theory / J. W. Polderman, J. C. Willems. — New York : Springer-Verlag, 1998. — 424 p.

24. Reis, T. Balanced truncation model reduction of second-order systems / T. Reis, T. Stykel // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. — 2008. — V. 14, № 5. — P. 391–406.

25.Simoncini, V. Recent computational developments in Krylov subspace methods for linear systems / V. Simoncini, D. B. Szyld // Numer. Linear Algebra Appl. — 2007. — V. 14, № 1. — P. 1–59.

26. van der Vorst, H. A. Iterative Krylov methods for large linear systems / H. A. van der Vorst. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003. 221 p.

27. Wolfram, S. An Elementary Introduction to the Wolfram Language / S. Wolfram. — Champaign, IL : Wolfram Media, 2017. — 339 p.

28. Zhou, K. Balanced realization and model reduction for unstable systems / K. Zhou, G. Salomon, E. Wu // Internat. J. Robust Nonlinear Control. — 1999. — V. 9, № 3. — P. 183–198.

REFERENCES

1. Baskakov, A.G. Estimates for the Green's function and parameters of exponential dichotomy of a hyperbolic operator semigroup and linear relations. [Baskakov A.G. Ocenki funkcii Grina i parametrov eksponencial'noyj dixotomii giperbolicheskoyj polugruppy operatorov i lineyjnyx otnosheniyj]. *Matematicheskij sbornik – Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1049–1086.

2. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu. A. Matrices and computations. [Voevodin V.V., Kuznecov Yu.A. Matricy i vychisleniya]. Moscow: Nauka, 1984, 320 p.

3. Godunov, S.K. Ordinary differential equations with constant coefficient. [Godunov S.K. Obyknovennye differencial'nye uravneniya s postoyannymi koefficientami : uchebnoe posobie. T. 1: Kraevye zadachi]. Novosibirsk, 1994, 264 p.

4. Golub G.H., Van Loan Ch.F. Matrix computations. [Golub D., Van Loun Ch. Matrichnye vychisleniya]. Moscow: Mir, 1999, 548 p.

5. Daleckiĭ J.L., Kreĭn M.G. Stability of solutions of differential equations in Banach space. [Daleckiyj Yu.L., Kreyjn M.G. Ustoyjchivost' resheniyj differencial'nyx uravneniyj v banaxovom prostranstve]. Moscow: Nauka, 1970, 536 p.

6. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoĭ teorii ustoĭchivosti. [Demidovich B.P. Lekcii po matematicheskoyj teorii ustoyjchivosti]. Moscow: Nauka, 1967, 472 p.

7. Kurbatov V.G., Chernov W.E. 'Mathematica' package in applied scientific reseachers. [Kurbatov V.G., Chernov V.E. Paket "Matematika" v prikladnyx nauchnyx issledovaniyax : uchebnoe posobie]. Voronezh : VGU Publishing House, 2016, 240 p.

8. Massera J.L., Schäffer J.J. Linear differential equations and function spaces. [Massera X.L., Sheffer X.X. Lineyjnye differencial'nye uravneniya i funkcional'nye prostranstva]. Moscow: Mir,

1970, 456 p.

9. Pankov A.A. Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. [Pankov A.A. Ogranichennye i pochti periodicheskie resheniya nelineyjnyx differencial'no-operatornyx uravneniyj]. Kiev, 1985, 182 p.

10. Pechkurov A.V. Bisectorial operator pencils and the problem of bounded solutions. [Pechkurov A.V. Bisektorial'nye operatornye puchki i zadacha ob ogranichennyx resheniyax]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2012, no. 3, pp. 31–41.

11. Hartman P. Ordinary differential equations. [Xarman F. Obyknovennye differencial'nye uravneniya]. Moscow: Mir, 1970, 720 p.

12. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. [Xenri D. Geometricheskaya teoriya polulineyjnyx parabolicheskix uravneniyj]. Moscow: Mir, 1985, 376 p.

13. Hille E., Phillips R.S. Functional analysis and semi-groups. [Xille E., Fillips R. Funkcional'nyyj analiz i polugruppy]. Moscow, 1962, 829 p.

14. Akhmerov R.R., Kurbatov V.G. Exponential dichotomy and stability of neutral type equations. J. Differential Equations, 1988, vol. 76, no. 1, pp. 1–25.

15. Antoulas A.C. Approximation of large-scale dynamical systems. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005, 479 p.

16. Benner P., Gugercin S., Willcox K. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems. SIAM Rev., 2015, vol. 57, no. 4, pp. 483–531.

17. Boichuk A.A., Pokutnii A.A. Bounded solutions of linear differential equations in a Banach space. Nonlinear Oscillations, 2006, vol. 9, no. 1, pp. 3–14.

18. Flinois T.L.B., Morgans A.S., Schmid P.J. Projection-free approximate balanced truncation of large unstable systems. Phys. Rev. E (3), 2015, vol. 92, no. 2, pp. 023012, 20.

19. Gugercin S., Antoulas A.C. A survey of model reduction by balanced truncation and some new results. Internat. J. Control, 2004, vol. 77, no. 8, pp. 748–766.

20. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Krylov subspace methods of approximate solving differential equations from the point of view of functional calculus. Eurasian Math. J., 2012, vol. 3, no. 4, pp. 53–80.

21. Kurbatov V.G., Kurbatova I.V. Computation of Green's function of the bounded solutions problem. Computational Methods in Applied Mathematics. Published Online 2017-10-12. https://doi.org/10.1515/cmam–2017–0042.

22. Moore, B. C. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. IEEE Trans. Automat. Control, 1981, vol. 26, no. 1, pp. 17–32.

23. Polderman J.W., Willems J.C. Introduction to mathematical systems theory. New York: Springer-Verlag, 1998, 424 p.

24. Reis T., Stykel T. Balanced truncation model reduction of second-order systems. Math. Comput. Model. Dyn. Syst., 2008, vol. 14, no. 5, pp. 391–406.

25. Simoncini V., Szyld D.B. Recent computational developments in Krylov subspace methods for linear systems. Numer. Linear Algebra Appl., 2007, vol. 14, no. 1, pp. 1–59.

26. van der Vorst, H. A. Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 221 p.

27. Wolfram S. An Elementary Introduction to the Wolfram Language. Champaign, IL : Wolfram Media, 2017, 339 p.

28. Zhou K., Salomon G., Wu E. Balanced realization and model reduction for unstable systems. Internat. J. Robust Nonlinear Control, 1999, vol. 9, no. 3, pp. 183–198.

Беломытцева Е. Г., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия
E-mail: bell-lenochk@mail.ru
Тел.: +7(473)220–87–48

Belomytseva E. G., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: bell-lenochk@mail.ru
Tel.: +7(473)220–87–48

Курбатов В. Г., доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет, в. н. с. кафедры математической физики, Воронеж, Россия
E-mail: kv51@inbox.ru
Тел.: +7(473)220–87–48

Kurbatov V. G., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kv51@inbox.ru
Tel.: +7(473)220–87–48

Туленко Е. Б., кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет, доцент кафедры математической физики, Воронеж, Россия
E-mail: tulenko@mail.ru
Тел.: +7(473)220–87–48

Tulenko E. B., Department of Mathematical Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: tulenko@mail.ru
Tel.: +7(473)220–87–48