УДК 519.624.3

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

А. Д. Баев[1], Е. А. Бородина[2], Ф. В. Голованева[1], С. А. Шабров[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*

[2] — *Воронежский государственный университет инженерных технологий*

Поступила в редакцию 12.07.2016 г.

Аннотация. В работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения граничной задачи, возникающей при описании малых поперечных деформаций системы, состоящей из стержня, оба конца которого защемлены, и при этом объект помещен в неоднородную упругую среду (двойную «подушку») с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения. При анализе решений мы используем поточечный метод Ю. В. Покорного, показавший свою эффективность не только для математических моделей второго порядка, но и для четвертого порядка, и для моделей с разрывными решениями. Доказана оценка погрешности, которая подтверждается рядом проведенных численных экспериментов.

Ключевые слова: математическая модель, метод конечных элементов, поточечный подход, граничная задача.

THE ADAPTATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE MATHEMATICAL MODEL OF THE SIXTH ORDER

A. D. Baev, E. A. Borodina, F. V. Golovanova, S. A. Shabrov

Abstract. In this paper, the finite element method is adapted to find an approximate solution of the boundary value problem arising in the description of small transverse deformations of a system consisting of a rod, both ends of which are clamped, and the object is placed in an inhomogeneous elastic medium (double «cushion») with localized features leading to loss of smoothness in the solution. In the analysis of solutions, we use the flow method of the Yu. V. Porornii, which has shown its effectiveness not only for mathematical models of the second order, but also for the fourth order, and for models with discontinuous solutions. An error estimate is proved, which is confirmed by a number of numerical experiments.

Keywords: mathematical model, finite element method, point approach, boundary value problem.

В работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)u'_x\right)'_{\sigma}(x) + u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решение уравнения из (1) мы будем искать в классе E^{σ} — непрерывно дифференцируемых на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, производная $u'_x(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{xx}(x)$ μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $u'''_{xx\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x)$ непрерывно дифференцируема на

$[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. При этом решение математической модели (1) будем искать в классе E_0^σ — функций $u(x)$, принадлежащих E^σ, и удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$.

В дальнейшем мы будем придерживаться терминологии из [1]–[3].

Уравнение (1) задано почти всюду (по мере σ) на следующем расширении отрезка $[0;\ell]$. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$ зададим метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значений $\xi - 0$, $\xi + 0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x < \xi - 0 < \xi + 0 < y$ для всех x, y для которых выполнялись неравенства $x < \xi < y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi - 0$ и $\xi + 0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x;y)$.

Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ само уравнение принимает вид

$$-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta\left(ru''_{xx}\right)'_x(\xi) - \Delta\left(g(x)u'_x\right)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi), \tag{2}$$

где $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

Относительно коэффициентов $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ мы предполагаем выполненными следующие условия: 1) $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение; 2) $\inf\limits_{x\in[0;\ell]} p(x) > 0$; 3) $r(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$; 4) $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$; 5) функция $\mu(x)$, порождающая на $[0;\ell]$ меру, строго возрастает на $[0;\ell]$.

В последнее время особое внимание уделяется построению и изучению моделей малых деформаций струнных, стержневых и струнно-стержневых систем. Это вызвано их актуальностью во многих отраслях естествознания и техники. В то же время, наличие особенностей (как внутренних, так и внешних) у таких систем приводит к потере свойства гладкости решения соответствующих им математических моделей. Этот факт исключает возможность использования классических производных. В то же время применение теории обобщенных функций к таким моделям не дает требуемого эффекта, так как возникает ряд трудноразрешимых проблем. Во-первых, возникает проблема умножения обобщенной функции на разрывную; во-вторых, удается доказать только слабую разрешимость возникающих граничных задач, что не достаточно для приложений. В данной работе к изучаемому объекту мы применим поточечный подход, берущий начало в работе Стилтьеса о колебании нити с бусинами и получивший дальнейшее развитие в работах М. Г. Крейна, Ф. Р. Гантмахера, О. Келлога. Данный подход был расширен Ю. В. Покорным и его учениками при изучении одномерных объектов [1]–[8]. Последнее позволило исследовать задачи о деформациях струны, стержня, помещенных во внешнюю среду с локализованными особенностями, наличие которых приводят к потере гладкости у решения.

Далее для простоты мы полагаем $\ell = 1$, $\mu(x) = x$ и $p(x) = 1$.

1. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Приближенное решение $u_N(x)$ математической модели (1) будем искать в виде

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k\varphi_{3k-2}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k\varphi_{3k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} c_k\varphi_{3k}(x). \tag{3}$$

Здесь a_k, b_k и c_k — значение функции, первой и второй производной соответственно в узловой точке; $\varphi_i(x)$ — базисные функции, которые строятся следующим образом.

Отрезок $[0;\ell]$ разобьем на N частей, точки разбиения обозначим через x_k. Тогда

$$\varphi_{3k-2}(x) = \begin{cases} 1+10\left(\dfrac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^3+15\left(\dfrac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^4+6\left(\dfrac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^5, & x\in[x_{k-1};x_k];\\ 1-10\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^3+15\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^4-6\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^5, & x\in[x_k;x_{k+1}];\\ 0, & x\notin[x_{k-1};x_{k+1}], \end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi_{3k-1}(x) = \begin{cases} x-x_k-6\dfrac{(x-x_k)^3}{(x_k-x_{k-1})^2}-8\dfrac{(x-x_k)^4}{(x_k-x_{k-1})^3}-3\dfrac{(x-x_k)^5}{(x_k-x_{k-1})^4}, & x\in[x_{k-1};x_k];\\ x-x_k-6\dfrac{(x-x_k)^3}{(x_{k+1}-x_k)^2}+8\dfrac{(x-x_k)^4}{(x_{k+1}-x_k)^3}-3\dfrac{(x-x_k)^5}{(x_{k+1}-x_k)^4}, & x\in[x_k;x_{k+1}];\\ 0, & x\notin[x_{k-1};x_{k+1}], \end{cases} \tag{5}$$

$$\varphi_{3k}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x-x_k)^2+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(x-x_k)^3}{x_k-x_{k-1}}+\dfrac{3}{2}\dfrac{(x-x_k)^4}{(x_k-x_{k-1})^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-x_k)^5}{(x_k-x_{k-1})^3}, & x\in[x_{k-1};x_k];\\ \dfrac{1}{2}(x-x_k)^2-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(x-x_k)^3}{x_{k+1}-x_k}+\dfrac{3}{2}\dfrac{(x-x_k)^4}{(x_{k+1}-x_k)^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-x_k)^5}{(x_{k+1}-x_k)^3}, & x\in[x_k;x_{k+1}];\\ 0, & x\notin[x_{k-1};x_{k+1}], \end{cases} \tag{6}$$

$k=1,2,\ldots,N-1$.

В некоторых случаях для удобства формулу (3) будем записывать в виде

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^{3N-3}\alpha_j\varphi_j(x). \tag{7}$$

Уравнение

$$-\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x)+\left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x)-\left(g(x)u'_x\right)'_{\sigma}(x)+u(x)Q'_{\sigma}(x)=F'_{\sigma}(x) \tag{8}$$

умножим на базисную функцию $\varphi_m(x)$, проинтегрируем по мере σ в пределах от 0 до ℓ:

$$\int_0^\ell \Big[-\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x)+\left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x)-\left(g(x)u'_x\right)'_{\sigma}(x)+ \\ + u(x)Q'_{\sigma}(x)\Big]\varphi_m(x)\,d\sigma = \int_0^\ell \varphi_m(x)F'_{\sigma}\,d\sigma. \tag{9}$$

Разбивая интеграл в левой части (9) на четыре, проинтегрировав первый интеграл три раза по частям, второй — два раза, третий — один раз, в силу свойств базисных функций, получим

$$\int_0^\ell pu'''_{xxx}{\varphi_m}'''_{xxx}\,dx+\int_0^\ell ru''_{xx}{\varphi_m}''_{xx}\,dx+\int_0^\ell gu'_x{\varphi_m}'_x\,dx+\int_0^\ell uQ'_{\sigma}\varphi_m\,d\sigma=\int_0^\ell\varphi_mF'_{\sigma}\,d\sigma. \tag{10}$$

Подставляя в последнее равенство вместо $u(x)$ (7), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{3N-3} \alpha_j \left(\int_0^\ell p{\varphi_j}'''_{xxx}{\varphi_m}'''_{xxx}\,dx + \int_0^\ell r{\varphi_j}''_{xx}{\varphi_m}''_{xx}\,dx + \int_0^\ell g{\varphi_j}'_{x}{\varphi_m}'_{x}\,dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^\ell \varphi_j\varphi_m Q'_\sigma\,d\sigma \right) = \int_0^\ell \varphi_m F'_\sigma\,d\sigma, \quad (11)$$

где $m = 1, 2, \ldots, 3N-3$, или в матричной форме

$$A\alpha = \widehat{F}, \quad (12)$$

где A — квадратичная матрица порядка $(3N-3)$, причем

$$A_{km} = \int_0^\ell p{\varphi_k}'''_{xxx}{\varphi_m}'''_{xxx}\,dx + \int_0^\ell r{\varphi_k}''_{xx}{\varphi_m}''_{xx}\,dx + \int_0^\ell g{\varphi_k}'_{x}{\varphi_m}'_{x}\,dx + \int_0^\ell \varphi_k\varphi_m Q'_\sigma\,d\sigma, \quad (13)$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3N-3})^T$ (T — знак транспонирования), $\widehat{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_{3N-3})^T$, $F_m = \int_0^\ell \varphi_m F'_\sigma\,d\sigma$.

Введем обозначение

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \int_0^1 p\varphi'''_{xxx}\psi'''_{xxx}\,dx + \int_0^1 r\varphi''_{xx}\psi''_{xx}\,dx + \int_0^1 g\varphi'_x\psi'_x\,dx + \int_0^1 \varphi\psi\,dQ.$$

Очевидно, что это билинейный симметричный функционал в пространстве непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, имеющих третью производную, суммируемую с квадратом, и удовлетворяющих условиям $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$. Благодаря положительности функции $p(x)$ и неубывания $Q(x)$ он еще и невырожденный:

$$\langle\varphi, \varphi\rangle \geqslant 0, \quad \langle\varphi, \varphi\rangle = 0 \Longleftrightarrow \varphi = 0.$$

Поэтому, может служить скалярным произведением. Тогда коэффициенты

$$A_{ij} = \langle\varphi_i, \varphi_j\rangle = A_{ji} \quad (14)$$

системы (12) образуют матрицу Грамма системы линейно независимых векторов φ_k. Поэтому определитель матрицы A отличен от нуля, следовательно, система (12) имеет единственное решение.

2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Здесь производится оценка близости приближенного решения к точному.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (1); $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда*

$$\langle u - v, u - v\rangle \leqslant \widetilde{C} \cdot h,$$

где константа $\widetilde{C}$ не зависит от $h = 1/N$ (N — количество интервалов на которые производится разбиение отрезка $[0;1]$, причем сетка предполагается равномерной).

Покажем, что задача решения математической модели (1) эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала на множестве $H^{6,\sigma}$ непрерывно дифференцируемых на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, производная $u'_x(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{xx}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $u'''_{xx\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, причём $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x)$ σ-суммируема с квадратом на $\overline{[0;1]}_\sigma$.

В самом деле, решение $u(x)$ математической модели (1), как показал анализ модели в первой главе, принадлежит $H^{6,\sigma}$.

Составим функционал $I(v) = (Lv,v) - 2(F'_\sigma, v)$, где $Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + (ru''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (g(x)u'_x)'_\sigma(x) + u(x)Q'_\sigma(x)$ и $(u,v) = \int\limits_0^1 uv\,d\sigma$.

Выражение (Lv,v) разобьем на четыре, и, как и в первой главе, первый интеграл проинтегрируем три раза по частям, втором — два раза, и третий — один раз:

$$(Lv,v) = \int\limits_0^1 \left(-\left(v'''_{xxx}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(rv''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)v'_x\right)'_\sigma(x) + v(x)Q'_\sigma(x)\right) v\,d\sigma =$$

$$= -\left(v'''_{xxx}\right)''_{xx}(x)v\Big|_0^1 + \left(v'''_{xxx}\right)'_x(x)v'_x\Big|_0^1 - \left(v'''_{xxx}\right)(x)v''_{xx}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 v'''^2_{xxx}\,dx +$$

$$+ \left(rv''_{xx}\right)'_x(x)v\Big|_0^1 - \left(rv''_{xx}\right)(x)v'_x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 rv''^2_{xx}\,dx - \left(gv'_x\right)(x)v\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 gv'^2_x\,dx + \int\limits_0^1 v^2\,dQ. \quad (15)$$

Таким образом, функционал, который необходимо минимизировать, принимает вид

$$I(v) = \int\limits_0^1 v'''^2_{xxx}\,dx + \int\limits_0^1 rv''^2_{xx}\,dx + \int\limits_0^1 gv'^2_x\,dx + \int\limits_0^1 v^2\,dQ - 2\int\limits_0^1 v\,dF, \quad (16)$$

так как внеинтегральные слагаемые в (15) пропадут в силу граничных условий $u(0) = u'_x(0) = = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$.

Решение математической модели (1) и дает минимум функционалу (16) на $H_0^{6,\sigma}$, где $H_0^{6,\sigma}$ — подпространство $H^{6,\sigma}$ функций, удовлетворяющих условию $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$.

Так как функционал (16) содержит производные до третьего порядка, то его можно определить на функциях, у которых третья производная суммируема с квадратом, т. е. на $\widehat{H}_0^3$ — пополнении $H_0^{6,\sigma}$ по энергетической норме

$$\|u\|^2_{\widehat{H}_0^3} = \int\limits_0^1 u'''^2_{xxx}\,dx + \int\limits_0^1 ru''^2_{xx}\,dx + \int\limits_0^1 gu'^2_x\,dx + \int\limits_0^1 u^2\,dQ.$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимума: каждое новое значение $I(v)$ есть предел $I(v_n)$, где $v_n \in H_0^{6,\sigma}$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{H}_0^3} \longrightarrow 0$, если u — функция из $\widehat{H}_0^3$ на которой функционал $I(v)$ принимает наименьшее значение, и если $u \in H_0^{6,\sigma}$ доставлял минимум $I(v)$, то она становится минимизирующей на $\widehat{H}_0^3$.

В обратную сторону: минимизация $I(v)$ на $\widehat{H}_0^3$ приводит к математической модели (1). В самом деле, в работе [9] показано, что при минимизации $\Phi(u)$ на E, мы получим равенство

$$\int\limits_0^\ell \left(u'''_{xxx}(x) - \int\limits_0^x \big(r(s)u''_{xx}(s) - \beta(s)\big)\, ds \right) dh''_{xx}(x) = 0,$$

где $\beta(x) = \int\limits_0^x \big(g(s)u'_x(s) - \alpha(s)\big)\, ds$ и $\alpha(x) = \int\limits_0^x u\, dQ - F(x)$, для любой $h \in E$.

В нашем случае мы получим аналогичное равенство с одной лишь оговоркой $h \in \widehat{H}_0^3$. Отсюда мы получим почти всюду

$$u'''_{xxx}(x) - \int\limits_0^x \big(r(s)u''_{xx}(s) - \beta(s)\big)\, ds = C_1 + C_2 x + C_3 x^2$$

при некоторых постоянных C_1, C_2 и C_3. Как и в первой главе доказывается, что $u \in E$ и удовлетворяет всем граничным условиям. И это замыкает круг: минимизация $I(v)$ на $h \in \widehat{H}_0^3$ эквивалентна решению математической модели (1).

Таким образом, $I(v)$ мы можем минимизировать на $\widehat{H}_0^3$.

После решения линейной системы $A\alpha = \widehat{F}$ мы получим приближенное решение $v(x)$, которое в тоже время будет аппроксимацией Ритца.

Оценим разность между точным решением $u(x)$ и полученным приближенным решением $v(x)$.

Сначала оценим разность между точным решением и ее интерполянтом в энергетической норме; модуль разности между $u(x)$ и $v(x)$ будет еще меньше.

Разность $u(x) - u_I(x)$ обозначим через $w(x)$: $w(x) = u(x) - u_I(x)$, где $u_I(x)$ интерполянт решения дифференциальной модели (1).

Интерполянт $u_I(x)$ точного решения $u(x)$ математической модели (1) можно выразить через базисные следующим образом

$$u_I(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i)\varphi_{3i-2}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} u'_x(x_i)\varphi_{3i-1}(x) \sum_{i=1}^{N-1} u''_{xx}(x_i)\varphi_{3i}(x).$$

Оценим $|w(x)|$ в энергетической норме

$$\|u\|^2_{\widehat{H}_0^3} = \int\limits_0^1 u'''^2_{xxx}\, dx + \int\limits_0^1 r u''^2_{xx}\, dx + \int\limits_0^1 g u'^2_x\, dx + \int\limits_0^1 u^2\, dQ.$$

Так как $w(x_k) = w'_x(x_k) = w''_{xx}(x_k) = 0$ для всех k, то для всех $x \in [x_k; x_{k+1}]$ имеем равенства

$$w(x) = w'''_{xxx}(x_k)\frac{(x-x_k)^3}{3!} + w''''_{xxxx}(x_k)\frac{(x-x_k)^4}{4!} + w'''''_{xxxxx}(x_k+0)\frac{(x-x_k)^5}{5!} + \\ + \int\limits_{x_0}^x \int\limits_{x_0}^s \int\limits_{x_0}^t \int\limits_{x_0}^\tau \int\limits_{x_0}^\eta \int\limits_{x_0+0}^{æ} w''''''_{xxxxx\sigma}(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, dæ\, d\eta\, d\tau\, dt\, ds, \quad (17)$$

$$w'_x(x) = w'''_{xxx}(x_k)\frac{(x-x_k)^2}{2!} + w''''_{xxxx}(x_k)\frac{(x-x_k)^3}{3!} + w'''''_{xxxxx}(x_k+0)\frac{(x-x_k)^4}{4!} +$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0+0}^{æ} w''''''_{xxxxx\sigma}(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\,dæ\,d\eta\,d\tau\,dt, \quad (18)$$

$$w''_{xx}(x) = w'''_{xxx}(x_k)(x-x_k) + w''''_{xxxx}(x_k)\frac{(x-x_k)^2}{2!} + w'''''_{xxxxx}(x_k+0)\frac{(x-x_k)^3}{3!} +$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0+0}^{æ} w''''''_{xxxxx\sigma}(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\,dæ\,d\eta\,d\tau. \quad (19)$$

Покажем, что величины $|w'''_{xxx}(x_k)|$, $|w''''_{xxxx}(x_k)|$ и $|w'''''_{xxxxx}(x_k+0)|$ ограничены константой, не зависящей от h.

В самом деле, имеем

$$w'''''_{xxxxx}(x_k+0) = u'''''_{xxxxx}(x_k+0) + \frac{6\cdot 5!}{h^5}u(x_k) - \frac{6\cdot 5!}{h^5}u(x_{k+1}) +$$
$$+3\cdot\frac{5!}{h^4}u'_x(x_k) + 3\cdot\frac{5!}{h^4}u'_x(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{5!}{h^3}u''_{xx}(x_k) - \frac{1}{2}\cdot\frac{5!}{h^3}u''_{xx}(x_k), \quad (20)$$

или, после несложных преобразований,

$$w'''''_{xxxxx}(x_k+0) = u'''''_{xxxxx}(x_k+0) - 3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s} u''_{xx}(t)\,dt\,ds + 3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}} u''_{xx}(t)\,dt\,ds +$$

$$+\frac{5!}{h^5}u''_{xx}(x_k)\frac{h^2}{2} - \frac{5!}{h^5}u''_{xx}(x_{k+1})\frac{h^2}{2} = u'''''_{xxxxx}(x_k+0) - 3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\big(u''_{xx}(t) - u''_{xx}(x_k)\big)\,dt\,ds +$$

$$+3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\big(u''_{xx}(t) - u''_{xx}(x_{k+1})\big)\,dt\,ds - 2\cdot\frac{5!}{h^5}u''_{xx}(x_k)\frac{h^2}{2} + 2\cdot\frac{5!}{h^5}u''_{xx}(x_{k+1})\frac{h^2}{2} =$$

$$= u'''''_{xxxxx}(x_k+0) - 3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k}^{t}\big(u'''_{xxx}(\tau) - u'''_{xxx}(x_k)\big)\,d\tau\,dt\,ds -$$

$$-3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{t}^{x_{k+1}}\big(u'''_{xxx}(\tau) - u'''_{xxx}(x_{k+1})\big)\,d\tau\,dt\,ds - 3\cdot\frac{5!}{h^5}u'''_{xxx}(x_k)\frac{h^3}{3!} - 3\cdot\frac{5!}{h^5}u'''_{xxx}(x_{k+1})\frac{h^3}{3!} -$$

$$-2\cdot\frac{5!}{h^5}u''_{xx}(x_k)\frac{h^2}{2} + 2\cdot\frac{5!}{h^5}u''_{xx}(x_{k+1})\frac{h^2}{2} =$$

$$= u'''''_{xxxxx}(x_k+0) - 3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k}^{t}\int\limits_{x_k}^{\tau}\big(u''''_{xxxx}(æ) - u''''_{xxxx}(x_k)\big)\,dæ\,d\tau\,dt\,ds +$$

$$+3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{t}^{x_{k+1}}\int\limits_{\tau}^{x_{k+1}}\big(u''''_{xxxx}(æ) - u''''_{xxxx}(x_{k+1})\big)\,dæ\,d\tau\,dt\,ds -$$

$$-3\cdot\frac{5!}{h^5}u''''_{xxxx}(x_k)\frac{h^4}{4!} + 3\cdot\frac{5!}{h^5}u''''_{xxxx}(x_{k+1})\frac{h^4}{4!} +$$

$$+\frac{5!}{h^5}\cdot\frac{h^2}{2}\left[\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s} u''''_{xxxx}(t)\,dt\,ds - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}} u''''_{xxxx}(t)\,dt\,ds\right] =$$

$$= u'''''_{xxxxx}(x_k+0) - 3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k}^{t}\int\limits_{x_k}^{\tau}\int\limits_{x_k}^{æ} u'''''_{xxxxx}(\zeta)\,d\zeta\,dæ\,d\tau\,dt\,ds -$$

$$- 3\cdot\frac{5!}{h^5}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{t}^{x_{k+1}}\int\limits_{\tau}^{x_{k+1}}\int\limits_{æ}^{x_{k+1}} u'''''_{xxxxx}(\zeta)\,d\zeta\,dæ\,d\tau\,dt\,ds + \frac{15}{h}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u'''''_{xxxxx}(\zeta)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{5!}{h^5}\cdot\frac{h^2}{2}\left[\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k}^{t} u'''''_{xxxxx}(\tau)\,d\tau\,dt\,ds - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_{k+1}}^{t} u'''''_{xxxxx}(\tau)\,d\tau\,dt\,ds\right]. \quad (21)$$

Теперь последовательно находим

$$|w'''''_{xxxxx}(x_k+0)| \leqslant \sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u'''''_{xxxxx}(x)| + 6\cdot\frac{5!}{h^5}\cdot\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u'''''_{xxxxx}(x)|\cdot\frac{h^5}{5!} +$$
$$+ \frac{15}{h}\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u'''''_{xxxxx}(x)|\cdot h + \frac{5!}{h^5}\cdot\frac{h^2}{2}\cdot 2\cdot\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u'''''_{xxxxx}(x)|\cdot\frac{h^3}{3!} \leqslant$$
$$\leqslant 42\cdot\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u'''''_{xxxxx}(x)|. \quad (22)$$

Величина $\sup\limits_{x_k<x<x_{k+1}}|u'''''_{xxxxx}(x)|$ ограничена, причем константой зависящей только от коэффициентов модели. Абсолютно аналогично доказывается ограниченность $|w'''_{xxx}(x_k)|$ и $|w''''_{xxxx}(x_k)|$.

Оценим теперь $|w(x)|$, $w'_x(x)$ и $w''_{xx}(x)$, когда $x\in[x_k;x_{k+1}]$. Так как $w(x_k)=w'_x(x_k)=w''_{xx}(x_k)=0$, то из (17), (18) и (19) мы находим

$$|w(x)| \leqslant |w'''_{xxx}(x_k)|\frac{h^3}{3!} + |w''''_{xxxx}(x_k)|\frac{h^4}{4!} + |w'''''_{xxxxx}(x_k+0)|\frac{h^5}{5!} +$$
$$+ \left|\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{s}\int\limits_{x_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0+0}^{æ} |w''''''_{xxxxx\sigma}(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)\,dæ\,d\eta\,d\tau\,dt\,ds\right| \leqslant 4\cdot C_1\cdot h^3, \quad (23)$$

так как $w''''''_{xxxxx\sigma}(x)=u''''''_{xxxxx\sigma}(x)$ и h — малая величина (здесь C_1 — константа ограничивающая величины $|w'''_{xxx}(x_k)|$, $|w''''_{xxxx}(x_k)|$ и $|w'''''_{xxxxx}(x_k+0)|$);

$$|w'_x(x)| \leqslant |w'''_{xxx}(x_k)|\frac{h^2}{2!} + |w''''_{xxxx}(x_k)|\frac{h^3}{3!} + |w'''''_{xxxxx}(x_k+0)|\frac{h^4}{4!} +$$
$$+ \left|\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0+0}^{æ} |w''''''_{xxxxx\sigma}(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)\,dæ\,d\eta\,d\tau\,dt\right| \leqslant 4\cdot C_1\cdot h^2; \quad (24)$$

$$|w''_{xx}(x)| \leqslant |w'''_{xxx}(x_k)|\cdot h + |w''''_{xxxx}(x_k)|\frac{h^2}{2!} + |w'''''_{xxxxx}(x_k+0)|\frac{h^3}{3!} +$$
$$+ \left|\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0+0}^{æ} |w''''''_{xxxxx\sigma}(\zeta)|\,d\sigma(\zeta)\,dæ\,d\eta\,d\tau\right| \leqslant 4\cdot C_1\cdot h. \quad (25)$$

Из равенства

$$w'''_{xxx}(x) = w'''_{xxx}(x_k) + w''''_{xxxx}(x_k)(x-x_k) + w'''''_{xxxxx}(x_k+0)\frac{(x-x_k)^2}{2} +$$

$$+\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k+0}^{t} w''''''_{xxxxx\sigma}(\tau)\,d\sigma(\tau)\,dt\,ds \quad (26)$$

вытекает

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(w'''_{xxx}) \leqslant |w''''_{xxxx}(x_k)|\cdot h + |w'''''_{xxxxx}(x_k+0)|\cdot\frac{h^2}{2}+$$
$$+\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''''_{xxxxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}}(\sigma)\cdot\frac{h^2}{2}\leqslant C_2\cdot h, \quad (27)$$

где

$$C_2 = 2C_1 + \sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''''_{xxxxx\sigma}(x)|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}}(\sigma)$$

и $\bigvee\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}}(u)$ — полная вариация u на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$.

Оценим теперь близость $u_I(x)$ к $u(x)$ по энергетической норме, т. е. оценим $a(w,w)$:

$$a(w,w) = \int\limits_0^1 w'''^2_{xxx}\,dx + \int\limits_0^1 rw''^2_{xx}\,dx + \int\limits_0^1 gw'^2_{x}\,dx + \int\limits_0^1 w^2\,dQ.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^1 w'''^2_{xxx}\,dx = w'''_{xxx}w''_{xx}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 w''_{xx}\,d\left(w'''_{xxx}\right) = -\int\limits_0^1 w''_{xx}\,d\left(w'''_{xxx}\right),$$

так как $w''_{xx}(0) = w''_{xx}(1) = 0$. Далее (для удобства положим $x_0 = 0$ и $x_N = 1$),

$$\int\limits_0^1 w''_{xx}\,d\left(w'''_{xxx}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w''_{xx}\,d\left(w'''_{xxx}\right) + w''_{xx}(0)\Delta^+\left(w'''_{xxx}\right)(0)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1} w''_{xx}(x_k)\Delta\left(w'''_{xxx}\right)(x_k) + w''_{xx}(0)\Delta^-\left(w'''_{xxx}\right)(1), \quad (28)$$

где $\Delta^+\left(w'''_{xxx}\right)(0) = \left(w'''_{xxx}\right)(0+0) - \left(w'''_{xxx}\right)(0)$ и $\Delta^-\left(w'''_{xxx}\right)(1) = \left(w'''_{xxx}\right)(1) - \left(w'''_{xxx}\right)(1-0)$. В равенстве (28) все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $w''_{xx}(x_k) = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, N$.

На основании полученных ранее оценок будем иметь

$$\left|\int\limits_0^1 w''_{xx}\,d\left(w'''_{xxx}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\left|\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w''_{xx}\,d\left(w'''_{xxx}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|w''_{xx}(x)|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}\left(w'''_{xxx}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} 4\cdot C_1\cdot h\cdot C_2\cdot h = 4C_1C_2h, \quad (29)$$

так как $hN = 1$.

Для слагаемого $\int\limits_0^1 r w''^2_{xx}\,dx$ последовательно находим

$$\left|\int\limits_0^1 r w''^2_{xx}\,dx\right| = \left|\int\limits_0^1 w''^2_{xx}\,dR\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\left|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w''^2_{xx}\,dR\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|w''_{xx}(x)|^2\cdot\bigvee_{x_k}^{x_{k+1}}(R) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}(4C_1h)^2\bigvee_{x_k}^{x_{k+1}}(R) = 16C_1^2h^2\bigvee_0^1(R), \quad (30)$$

здесь $R(x) = \int\limits_0^x r(s)\,ds$.

Аналогично оценивается слагаемое $\int\limits_0^1 g w'^2_x\,dx$ $\left(\mathcal{G}(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds\right)$:

$$\left|\int\limits_0^1 g w'^2_x\,dx\right| = \left|\int\limits_0^1 w'^2_x\,d\mathcal{G}\right| = \left|\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w'^2_x\,d\mathcal{G}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|w'_x|^2\cdot\bigvee_{x_k}^{x_{k+1}}(\mathcal{G}) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}(4C_1h^2)^2\bigvee_{x_k}^{x_{k+1}}(\mathcal{G}) = 16C_1^2h^4\bigvee_0^1(\mathcal{G}); \quad (31)$$

и $\int\limits_0^1 w^2\,dQ$ —

$$\left|\int\limits_0^1 w^2\,dQ\right| = \left|\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2\,dQ + \right.$$

$$\left. + \, w^2(0)\Delta^+Q(0) + \sum_{k=1}^{N-1} w^2(x_k)\Delta Q(x_k) + w^2(1)\Delta^-Q(1)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w^2\,dQ\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|w^2(x)|\bigvee_{x_k}^{x_{k+1}}(Q) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1}(4\cdot C_1\cdot h^3)^2\bigvee_{x_k}^{x_{k+1}}(Q) = 16C_1h^6\bigvee_0^1(Q). \quad (32)$$

Из неравенств (29), (30), (31) и (32) мы получим

$$a(w,w) = \int\limits_0^1 w'''^2_{xxx}\,dx + \int\limits_0^1 r w''^2_{xx}\,dx + \int\limits_0^1 g w'^2_x\,dx + \int\limits_0^1 w^2\,dQ \leqslant$$

$$\leqslant 4C_1C_2h + 16C_1^2h^2\bigvee_0^1(R) + 16C_1^2h^4\bigvee_0^1(\mathcal{G}) + 16C_1^2h^6\bigvee_0^1(Q) \leqslant C\cdot h. \quad (33)$$

Остается показать, что интерполянт дает приближение не лучше, чем $v(x)$. Это утверждение основано на аналоге классическому результату теории конечным элементов, в именно

Предположим, что $u_0(x)$ минимизирует $I(u)$ на множестве $\widehat{H}_0^3$, H_N — конечномерное его подпространство. Тогда

1) *минимум $I(v_h)$ и минимум $\langle u - v_h, u - v_h \rangle$, v_h пробегает подпространство H_N, достигается на одной и той же функции u_h.*

2) *по отношению к энергетическому скалярному произведению u_h есть проекция u на H_N, или, что то же самое, ошибка $u - u_h$ ортогональна H_N:*

$$\langle u - u_h, v_h \rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in H_N. \tag{34}$$

3) *функция u_h, на которой достигается минимум, удовлетворяет условию*

$$\langle u_h, v_h \rangle = (F'_\sigma, v_h) \text{ для всех } v_h \in \widehat{H}_0^3. \tag{35}$$

и

$$\langle u, v \rangle = (F'_\sigma, v) \text{ для всех } v \in H_N. \tag{36}$$

Как и в классической теории, для нас эта теорема ключевая. Более того, все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве со скалярным произведением функция из подпространства H_N, ближайшая к заданной функции u, всегда является ее проекцией на H_N. Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle = \langle u - u_h, u - u_h \rangle - 2\langle u - u_h, v_h \rangle + \langle v_h, v_h \rangle.$$

Если справедливо равенство (34), то

$$\langle u - u_h, u - u_h \rangle \leqslant \langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h \rangle.$$

Равенство возможно, только когда $\langle v_h, v_h \rangle = 0$, т. е. когда $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция на которой $\langle u - u_h, u - u_h \rangle$ достигает минимум, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (36) справедливо для всех $v \in \widehat{H}_0^3$, то оно справедливо и для $v_h \in H_N$; вычитая из него (35), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3) — из него вытекает 2), и из него следует 1). Если u_h минимизирует $I(u)$ на H_N, то

$$I(u_h) \leqslant I(u_h + \varepsilon v_h)$$

для всех ε и v_h, или, вспоминая выражение $I(u)$ через $\langle u, u \rangle$ и (F'_σ, u):

$$\langle u_h, u_h \rangle - 2(F'_\sigma, u_h) \leqslant \langle u_h, u_h \rangle - 2(F'_\sigma, u_h) + 2\varepsilon \Big[\langle u_h, v_h \rangle - (F'_\sigma, v_h)\Big] + \varepsilon^2 \langle v_h, v_h \rangle.$$

Поэтому

$$0 \leqslant 2\varepsilon \Big[\langle u_h, v_h \rangle - (F'_\sigma, v_h)\Big] + \varepsilon^2 \langle v_h, v_h \rangle.$$

Так как это верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h \rangle = (F'_\sigma, v_h)$. Последнее уравнение выражает равенство нулю первой вариации функционала $I(u)$ в точке u_h в направлении v_h. Таким образом, утверждение 3) доказано. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

3. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

4. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

5. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

8. Тимашова, Е. В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

9. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

10. Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М. : Мир, 1977. — 351 с.

REFERENCES

1. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

2. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

3. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

4. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–

787.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

8. Ivannikova T.A., Timashova E.V, Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

9. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

10. Strang G., Fix G.J. An Alalysis of the Finite Element Method. [Streng G., Fiks Dzh. Teoriya metoda konechnyx e'lementov]. Moscow: Mir, 1977, 351 p.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бородина Е. А., ассистент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: eaborodina@inbox.ru

Borodina E. A., assistant of the department of higher mathematics and information technologies, Voronezh state University of engineering technologies, Voronezh, Russia
E-mail: eaborodina@inbox.ru

Голованёва Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, г. Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, Russia
E-mail: gfainav@mail.ru

Шабров Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, doctor of physical-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90