УДК 517.956

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

А. Д. Баев[1], Ж. И. Бахтина[1], С. С. Бунеев[2], Р. А. Ковалевский[1], А. А. Бабайцев[1], И. Ф. Леженина[1], А. В. Глушко[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Елецкий государственный университет*

Поступила в редакцию 21.10.2016 г.

Аннотация. Статья посвящена доказательству коэрцитивных априорных оценок решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений высокого порядка. Рассмотрено вырождающееся эллиптическое уравнение с переменными коэффициентами, зависящими еще от комплексного параметра. Уравнение содержит весовые операторы, представляющие собой суперпозицию оператора умножения на функцию, которая обращается в нуль на границе, и оператора дифференцирования. На границе рассматриваются условия общего вида. Получены коэрцитивные априорные оценки решений рассматриваемых задач. Оценки получены в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, граничная задача, коэрцитивная априорная оценка, весовое пространство С. Л. Соболева.

ON A PRIORI ESTIMATES OF SOLUTIONS TO GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN A HALF-SPACE FOR DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS

A. D. Baev, J. I. Bakhtina, S. S. Buneev, R. A. Kowalewski, A. A. Babaitsev, I. F. Lezhenina, A. V. Glushko

Abstract. The paper is devoted to the proof of coercive a priori estimates of solutions of General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic differential equations. the degenerate elliptic equation with variable coefficients depending on the complex parameter is considered. The equation contains weight operators, which are a superposition of the multiplication operator by a function that vanishes at the boundary, and the differentiation operator. On the border rassmatrivayutsya conditions of General form. The coercive a priori estimates of the solutions of the considered problems are obtained. Estimates are obtained in special weight spaces of the S. L. Sobolev space type.

Keywords: degenerate equation, boundary problem, coercivity a priori estimate, weighted Sobolev space.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском государственном университете

ВВЕДЕНИЕ

Теория вырождающихся эллиптических уравнений в настоящее время интенсивно развивается. Это связано с использованием таких уравнений при моделировании различных вырождающихся процессов, то есть процессов, в которых процессы, происходящие вблизи границы, существенно отличаются от процессов, происходящих внутри области. В этом случае уравнения, описывающие процесс на границе области вырождаются, то есть изменяется либо тип уравнения, либо его порядок. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды.

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к "неклассическим" задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [2]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [3], С. З. Левендорским [4], А. Д. Баевым [5].

Дальнейшее развитие теории вырождающихся уравнений потребовало исследования теории весовых пространств типа пространств С. Л. Соболева и теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений. Некоторые результаты в этом направлении были получены в работах [6]–[10].

В этой работе доказываются коэрцитивные априорные оценки решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Метод доказательства основан на построении разделяющего оператора типа оператора Лере–Сакамото. Формулировка полученных результатов содержится в работе [2].

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [5]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau$, $\eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(y) = = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}\,. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(y) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,\dots,\ \text{где } D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R^n_+)$; $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s\,|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]|^2\,d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F_\alpha^{-1}[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_y v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma+1, \sigma+\frac{l}{2}\}$, $\sigma = s+q$, $l = 1,2,\dots,[\frac{s}{q}]$, где $q > 1$, $s \geqslant 0$ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$,

$\sigma \in R^1, p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,1,2,\ldots,$ $l = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

В R^n_+ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v(x,y) = F(p,x,y), \tag{8}$$

где

$$A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v = \sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3 \leqslant 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y) p^{j_3} D_x^\tau D_{\alpha,y}^{j_1} \partial_y^{j_2} v. \tag{9}$$

Здесь m,k,l натуральные числа $q = \frac{2m}{k} > 1$, $r = \frac{2m}{l} > 1$, $a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)$ — некоторые ограниченные на $\bar{R}^1_+$ функции, $a_{00k0}(y) \neq 0$ при всех $y \in \bar{R}^1_+$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(y) = 1$ при всех $y \in \bar{R}^1_+$.

На границе $y = 0$ полупространства R^n_+задаются граничные условия вида

$$B_j(p,D_x,\partial_y)\ v|_{y=0} = \sum_{|\tau|+rj_3+qj_2 \leqslant m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} D_x^\tau \partial_y^l\ v|_{y=0} = G_j(p,x), j = 1,2,\ldots,\mu. \tag{10}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 2. Уравнение

$$\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3 = 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)\xi^\tau \eta^{j_1} z^{j_2} p^{j_3} = 0. \tag{11}$$

не имеет z — корней, лежащих на мнимой оси при всех $y \geqslant 0$ $(\xi,\eta) \in R^n$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $|p| + |\eta| + |\xi| > 0$.

Пусть $z_1(p,y,\xi,\eta),\ldots,z_{r_3}(p,y,\xi,\eta)$ $(1 \leqslant r_3 \leqslant k)$ — корни, лежащие в левой полуплоскости, а $z_{r_3+1}(p,y,\xi,\eta),\ldots,z_k(p,y,\xi,\eta)$ лежат в правой полуплоскости.

Условие 3. Функции $z_j(p,y,\xi,\eta)$, $j = 1,2,\ldots,k$, при всех $\xi \in R^{n-1}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по переменным $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$ и $\eta \in R^1$. Причем, при всех $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $j_1 = 0,1,2,\ldots,$ $l = 0,1,2,\ldots,\xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$$\left|(\alpha(y)\partial_y)^{j_1} \partial_\eta^{j_2} z_j(y,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{j_1,l}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{q-j_2}, \quad |p| + |\xi| + |\eta| > 0, \tag{12}$$

с константами $c_{j_1,l} > 0$, не зависящими от p,y,ξ,η.

Из условия 3 следует, что при всех $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$$Re z_j(p,y,\xi,\eta) \leqslant -c_1(|p| + |\xi| + |\eta|)^q,\ \ j = 1,\ldots,r_3; \tag{13}$$

$$Re z_j(p,y,\xi,\eta) \geqslant c_2(|p| + |\xi| + |\eta|)^q,\ \ j = r_3+1,\ldots,k, \tag{14}$$

с некоторыми константами $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, не зависящими от p, y, ξ, η.

Условие 4. Число граничных условий (10) равно числу z — корней уравнения (11), лежащих в левой полуплоскости, и при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| > 0$ многочлены $B_j^0(\xi,z) = \sum\limits_{|\tau|+qj_2+rj_3 = m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} \xi^\tau z^{j_2}$ линейно независимы по модулю многочлена $P(\xi,z) = \prod\limits_{j_1=1}^{r_3}(z - z_{j_1}(0,\xi,0))$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r_1} m_j + q\}$ — действительное число и выполнены условия 1–4. Тогда для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (8), (10) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} \leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q} + \|v,|p|\|_{s-1,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3} \|G_j,|p|\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}) \tag{15}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G_j, $j = 1, 2, \ldots, r_3$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1 при $s \geqslant 2m$ и условия 2, 3. Тогда для оператора $A(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y)$ справедлива формула представления

$$A(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y) = \prod_{j=1}^{k} (\partial_y - K_j(p, y, D_x, D_{\alpha,y})) + T(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y), \tag{16}$$

где $K_j(p, y, D_x, D_{\alpha,y})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $z_j(p, y, \xi, \eta)$, а порядок оператора $T(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y)$ в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ не превосходит $2m - 1$.

Определение 4. Обозначим через Ω_{r_3} множество функций $w(x,t) \in C_0^\infty(\bar{R}^n_+)$, удовлетворяющих условиям

$$w(x, +0) = \partial_t w(x, +0) = \ldots = \partial_t^{r_3-1} w(x, +0) = 0.$$

Теорема 2 позволяет свести доказательство априорной оценки решения задачи (8), (10) к коэрцитивной оценке снизу формы $Re(Aw, Qw)$ на функциях $w(x,t) \in \Omega_{r_3}$. При этом теорема 1 при выполнении условия 4 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнено условие 1 при $s \geqslant 2m$ и условия 2, 3. Тогда существует такой оператор $\widehat{Q}(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y)$, порядок которого в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ не превосходит $2m - q$, что для любых $s_0 \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ и любых функций $w(x,y) \in \Omega_{r_3}$ справедливо неравенство

$$c_1 \|w,|p|\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha} \leqslant \varepsilon \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_1=0}^{k-l} \sum_{i_2=0}^{k-l+1-i_1} \left\|\partial_y^{i_2} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0+i_1-\frac{3}{2})q,\alpha} +$$
$$+ c(\varepsilon) \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_1=0}^{k-l} \sum_{i_2=0}^{k-l-i_1} \left\|\partial_y^{i_2} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0+i_1-\frac{1}{2})q-1,\alpha} + Re(A(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y)w,\ \widehat{Q}w)_{-s_0 q,\alpha},$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от ε и w, p, а константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от w, p.

При этом в качестве оператора $\widehat{Q}$ можно взять оператор вида

$$\widehat{Q}(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y) = \prod_{j=1}^{k-1} (\partial_y - K_j(p, y, D_x, D_{\alpha,y})).$$

Теорема 4. Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} m_j + q\}$, выполнены условия $1 - 4$ при $p \in Q_{p_0} = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| \geqslant p_0 > 0\}$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что при всех $p \in Q_{p_0}$для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (8), (10) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} \leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3} \|G_j,|p|\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}) \tag{17}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от p, v, F, G_j, $j=1,2,\ldots,r_3$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Пусть $z_i(p,y,\xi,\eta)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ – z — корни уравнения (11). Тогда функции $\lambda_i(p,y,\xi,\eta)=z_i(p,y,\xi,\eta+\sqrt{-1})$, $i=1,\ldots,k$, удовлетворяют следующему условию.

Условие 1.1. Функции $\lambda_i(p,y,\xi,\eta)\in S^q_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$ и при всех $y\in\Omega$, $p\in Q$, $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$ справедливы оценки

$$Re\lambda_i(p,y,\xi,\eta)\leqslant -c_1(|p|+|\xi|+|\eta|)^q\,,\ i=1,\ 2,\ldots,\ r_1; \tag{1.1}$$

$$Re\lambda_i(p,y,\xi,\eta)\geqslant c_2(|p|+|\xi|+|\eta|)^q\,,\ \ i=r_1+1,\ldots,\ k \tag{1.2}$$

с постоянными $c_1>0,\ c_2>0$, не зависящими от $p,y,\ \xi,\ \eta$.

Рассмотрим операторы

$$\widehat{Q}_i(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)=(-1)^i\prod_{j=1}^{k-i}\left(\partial_y-\widetilde{K}_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y})\right),\ \ i=0,\ 1,\ldots,\ k-r_1. \tag{1.3}$$

$$\widehat{Q}_k(y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)=I, \tag{1.4}$$

где $\widetilde{K}_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_j(p,y,\xi,\eta)$.

Определим скалярное произведение в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ формулой

$$(v,w)_{s,\alpha}=(\widetilde{\Lambda}^s(p,D_x,D_{\alpha,y})v,\widetilde{\Lambda}^s(p,D_x,D_{\alpha,y})w), \tag{1.5}$$

где $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $L_2(R^n_+)$,

$$\widetilde{\Lambda}^s(p,D_x,D_{\alpha,y})=F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\{(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac12}-i\eta\}^sF_{x\to\xi}F_\alpha[\cdot]].$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. Пусть $s\in R^1,\ p\in Q,\ q>1,\ \ l=1,\ldots,\ k-r_1$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=(\max\{0;\ s\}+\frac12)q$ и условие 1.1. Тогда при всех $v(x,y)\in C_0^\infty(R^n_+)$ и любого $s_1\in R^1$ справедлива оценка

$$c_1\left\|\widehat{Q}_l(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v,\ |p|\right\|^2_{(s+1)q,\alpha}\leqslant Re(\widehat{Q}_{l-1}v,\widehat{Q}_lv)_{(s+\frac12)q,\alpha}+$$
$$+\left|(M_{1,(s+\frac12)q}\widehat{Q}_lv,\widetilde{\Lambda}^{(s+\frac12)q}\widehat{Q}_lv)\right|+c_2\left\|v,\ |p|\right\|^2_{s_1,\alpha}, \tag{1.6}$$

где постоянные $c_1>0,\ c_2>0$, не зависят от v,p. $M_{1,(s+\frac12)q}$ — коммутатор операторов ∂_t и $\widetilde{\Lambda}^{(s+\frac12)q}$.

Доказательство. Обозначим $v_l=\widehat{Q}_lv,\ \ l=1,2,\ldots,k-r_1$. По определению операторов $\widehat{Q}_l$ получим

$$\begin{aligned}&Re(\widehat{Q}_{l-1}v,\widehat{Q}_lv)_{(s+\frac12)q,\alpha}=-Re(\partial_yv_l,v_l)_{(s+\frac12)q,\alpha}+\\&+Re(\widetilde{K}_{k-l+1}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v_l,v_l)_{(s+\frac12)q,\alpha},\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\widetilde{K}_{k-l+1}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_{k-l+1}(p,y,\xi,\eta)$. Тогда для любого $s_1\in R^1$, справедлива оценка

$$Re(\widetilde{K}_{k-l+1}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v_l,v_l)_{(s+\frac12)q,\alpha}\geqslant c_1\left\|v_l,\ |p|\right\|^2_{(s+1)q,\alpha}-c_2\left\|v_l,\ |p|\right\|^2_{s_1,\alpha}.$$

Применяя эту оценку в правой части равенства (1.7), получим неравенство (1.6).

Следствие 1.1. При выполнении условий леммы 1.1 для любой функции $v(x,y) \in C_0^\infty(R_+^n)$ и любых $s_1 \in R^1$, $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left\|\widehat{Q}_l v,\,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant \varepsilon \left\|\partial_y \widehat{Q}_l v,\,|p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\widehat{Q}_l v,\,|p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + \\ + c_1(\left\|\widehat{Q}_{l-1} v,\,|p|\right\|_{sq,\alpha} + \|v,\,|p|\|_{s_1,\alpha}), \quad (1.8)$$

где $c(\varepsilon) > 0$, $c_1 > 0$ — некоторые константы, не зависящие от v, p. Здесь $l = 1, \ldots, k - r_1$; $s_1 \in R^1$ — любое число.

Для доказательства достаточно воспользоваться в правой части неравенства (1.6) неравенством Коши–Буняковского.

Аналогично лемме 1.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.2. Пусть $s \in R^1$, $p \in Q$, $q > 1$, $l = k - r_1 + 1, \ldots, k$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = (\max\{0,\ s\} + \frac{1}{2})q$ и условие 1.1. Тогда при всех $v(x,y) \in C_0^\infty(R_+^n)$ и любого $s_1 \in R^1$ справедлива оценка

$$c_1 \left\|\widehat{Q}_l(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v,\,|p|\right\|^2_{(s+1)q,\alpha} \leqslant Re(\widehat{Q}_{l-1}v, \widehat{Q}_l v) + \\ + \left|(M_{1,(s+\frac{1}{2})q}\widehat{Q}_l v, \widetilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}\widehat{Q}_l v)\right| + \frac{1}{2}\left\|\widehat{Q}_l\ v(x,y)|_{y=0}\,,\,|p|\right\|^2_{(s+\frac{1}{2})q} + c_2\|v,\,|p|\|^2_{s_1,\alpha}\,, \quad (1.9)$$

где константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ не зависят от v, p.

Следствие 1.2. При выполнении условий леммы 1.2 для любой $v(x,y) \in C_0^\infty(R_+^n)$ и любых $s_1 \in R^1$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\|\widehat{Q}_l v,\,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant \varepsilon \left\|\partial_t \widehat{Q}_l v,\,|p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\widehat{Q}_l v,\,|p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + \\ + c_1(\left\|\widehat{Q}_{l-1} v,\,|p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|\widehat{Q}_l\ v(x,t)|_{t=0}\,,\,|p|\right\|^+_{(s+\frac{1}{2})q}\|v,\,|p|\|_{s_1,\alpha}) \quad (1.10)$$

с некоторыми константами $c_1 > 0$, $c(\varepsilon) > 0$, не зависящими от v, p.

Для доказательства достаточно в неравенстве (1.9) воспользоваться неравенством Коши–Буняковского и следствием 1.1.

Лемма 1.3. Пусть $q > 1$, $s \in R^1$, $l = k - r_1 + 1, \ldots, k - 2$, $p \in Q$. Пусть выполнено условие 1 при$\sigma = q(k - l + \max(0;\ s))$ и условие 1.4. Тогда для всех функций $w(x,y) \in \Omega_{r_3}$ справедлива оценка

$$\left\|\widehat{Q}_l\ w|_{t=0}\,,\,|p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q} \leqslant c(\sum_{i=0}^{k-l-1}\ \sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_t^{i_1} w,\,|p|\right\|_{(s+i+1)q-1,\alpha} + \\ + \sum_{i=0}^{k-l-1}\ \sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_t^{i_1} w,\,|p|\right\|_{(s+i+1)q,\alpha}) \quad (1.11)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от w, p.

Здесь множество Ω_{r_3} описано в определении 4.

Доказательство утверждения проводится с помощью метода математической индукции по числу l.

Лемма 1.4. Пусть $q > 1$, $\sigma_0 q \geqslant 2$, $s \geqslant -\sigma_0$ — действительные числа, $l = k - r_1 + 1, \ldots, k$. Пусть выполнено условие 1 при$\sigma = q(k - l + \max\{0;\ s\})$ и условие 1.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что для всех $v(x,y) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\left\|\widehat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q}\ v|_{y=0}\,,\,|p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q} \leqslant \varepsilon\|v,\,|p|\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q,\alpha,q} + c(\varepsilon)\|v,\,|p|\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q-1,\alpha,q}\,. \quad (1.12)$$

Здесь и в дальнейшем оператор $\Lambda_0^{\sigma_0 q}(p, D_x, D_{\alpha,t})$ имеет вид

$$\Lambda_0^{\sigma_0 q}(p, D_x, D_{\alpha,t})v = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\{((|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} - i\eta)^{\sigma_0 q} - (|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}\sigma_0 q}\}F_{x\to\xi}F_{\alpha}[v]],$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\widehat{Q}_l\Lambda_0^{\sigma_0 q} = \Lambda_0^{\sigma_0 q}\widehat{Q}_{l,0} + J_{l,\sigma_0 q} + \widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}, \tag{1.13}$$

где

$$J_{l,\sigma_0 q} = (-1)^{k-r}M_{k-l,\sigma_0 q} + \breve{c}_1\widetilde{K}_1(p,y,D_x,D_{\alpha,y})M_{k-l-1,\sigma_0 q} + \ldots + \\ + \breve{c}_{k-l-1}\widetilde{K}_1(p,y,D_x,D_{\alpha,y})\widetilde{K}_2(p,y,D_x,D_{\alpha,y})\cdot\ldots\cdot\widetilde{K}_{k-l-1}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})M_{1,\sigma_0 q}. \tag{1.14}$$

Здесь $\breve{c}_i$ — некоторые числа, $M_{i,\sigma_0 q}$ — коммутатор операторов ∂_y^i и $\Lambda_0^{\sigma_0 q}$.
Тогда справедливо равенство

$$\Lambda_0^{\sigma_0 q}(p, D_x, D_{\alpha,y})\widehat{Q}_{l,0}\, v(x,y)|_{y=0} = \Lambda_0^{\sigma_0 q}(p, D_x, 0)\widehat{Q}_{l,0}\, v(x,y)|_{y=0} = 0. \tag{1.15}$$

Отсюда и из равенства (1.13) получим

$$\left\|\widehat{Q}_l\Lambda_0^{\sigma_0 q}\, v|_{y=0}\,, |p|\right\|^2_{(s+\frac{1}{2})q} = \\ -2Re(\partial_y\widetilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} + J_{l,\sigma_0 q})v, \widetilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} + J_{l,\sigma_0 q})v) \\ \leqslant \varepsilon\left\|\partial_t\widetilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} + J_{l,\sigma_0 q})v,\, |p|\right\|^2_{-\frac{1}{2}q,\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|(\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} + J_{l,\sigma_0 q})v,\, |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha}. \tag{1.16}$$

С помощью с помощью неравенства Коши–Буняковского выводим неравенство

$$\left\|\partial_y\widetilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} + J_{l,\sigma_0 q})v,\, |p|\right\|_{-\frac{1}{2}q,\alpha} \leqslant c\sum_{i=0}^{1}(\left\|\partial_y^i\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\, |p|\right\|_{sq,\alpha} + \\ + \left\|\partial_y^i J_{l,\sigma_0 q}v,\, |p|\right\|_{sq,\alpha}). \tag{1.17}$$

Из (1.14) получим при $s \geqslant -\sigma_0$ оценку

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i J_{l,\sigma_0 q}v,\, |p|\right\|_{sq,\alpha} \leqslant c(\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i+1}\left\|\partial_y^{i_1}w,\, |p|\right\|_{(s+\sigma_0+i)q-1,\alpha} + \\ + \sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1}v,\, |p|\right\|_{(s+\sigma_0+i)q,\alpha}) \leqslant c_1(\|v,\, |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q} + \\ + \|v,\, |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l)q,\alpha,q}) \leqslant c_2\,\|v,\, |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q} \tag{1.18}$$

при $q > 1$.
Из (1.16) получим

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\, |p|\right\|_{sq,\alpha} \leqslant c(\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1}v,\, |p|\right\|_{(s+i+1+\sigma_0)q-1,\alpha} + \\ + \sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-1-i}\left\|\partial_y^{i_1}v,\, |p|\right\|_{(s+\sigma_0+i+1)q,\alpha}) \leqslant c_1\,\|v,\, |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha} \tag{1.19}$$

при $q > 1$.

Используя (1.18) и (1.19) в правой части (1.17), получим оценку

$$\left\|\partial_y \widetilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} + J_{l,\sigma_0 q})v,\ |p|\right\|_{-\frac{1}{2}q,\alpha} \leqslant c\,\|v,\ |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha}\,. \tag{1.20}$$

При $q > 1$ справедлива оценка

$$\left\|\widehat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\ |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant c(\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-1-i}\left\|\partial_y^{i_1}v,\ |p|\right\|_{(s+\sigma_0+2)q-1,\alpha}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-2-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,\ |p|\right\|_{(\sigma_0+s+i+2)q,\alpha}) \leqslant$$
$$\leqslant c_1(\|v,\ |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q} + \|v,\ |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l)q,\alpha,q}) \leqslant c_2\,\|v,\ |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q}\,. \tag{1.21}$$

Из (1.14) получим при $q > 1$ оценку

$$\|J_{l,\sigma_0 q}v,\ |p|\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant c\,\|v,\ |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q}\,. \tag{1.22}$$

Применяя (1.20)–(1.22) в правой части (1.16), получим оценку (1.12).

Лемма 1.5. Пусть $q > 1$, s — действительные числа, $l = k - r + 1, \ldots,\ k - 2$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = q(k - l + \max\{0;\ s\})$ и условие 1.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что для всех $w(x, y) \in \Omega_{r_3}$ справедлива оценка

$$\left\|\widehat{Q}_l w,\ |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant \varepsilon\left\|\partial_y\widehat{Q}_l w,\ |p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\widehat{Q}_l w,\ |p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha}+$$
$$+c(\left\|\widehat{Q}_{l-1}w,\ |p|\right\|_{sq,\alpha} + \sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,\ |p|\right\|_{(s+i+1)q-1,\alpha} + \sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1}w,\ |p|\right\|_{(s+i+1)q,\alpha}) \tag{1.23}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $w,\ \varepsilon, p$.

Для доказательства достаточно оценить правую часть неравенства (1.10) и выбрать $s_1 \leqslant (s + 1)q$.

Замечание 1.1. Пусть выполнены условия леммы 1.5 и $l = k - 1$ или $l = k$. Тогда при всех $w(x, y) \in \Omega_{r_3}$ справедлива оценка

$$\left\|\widehat{Q}_l w,\ |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant \varepsilon\left\|\partial_y\widehat{Q}_l w,\ |p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\,\|Q_l w,\ |p|\|_{(s+1)q-1,\alpha} + c_1\left\|\widehat{Q}_{l-1}w,\ |p|\right\|_{sq,\alpha} \tag{1.24}$$

с постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от $\varepsilon,\ w$.

Для доказательства достаточно заметить, что для всех $w(x, y) \in \Omega_{r_3}$ при $l = k$ и $l = k - 1$ выполняется равенство $\widehat{Q}_l\ w(x, y)|_{y=0} = 0$, и воспользоваться оценкой (1.10).

Лемма 1.6. Пусть $q > 1$, $\sigma_0 q \geqslant 2$, $s \geqslant -\sigma_0$—действительные числа. Пусть выполнено условие 1 при$\sigma = q(k - l + \max\{0;\ s\})$ и условие 1.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что при всех $v(x, y) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедливо неравенство

$$\left\|\widehat{Q}_l\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\ |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant \varepsilon\,\|v,\ |p|\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q,\alpha,q} + c(\varepsilon)\,\|v,\ |p|\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q-1,\alpha,q}+$$
$$+\,c_1\left\|\widehat{Q}_{l-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\ |p|\right\|_{sq,\alpha} \tag{1.25}$$

с константой $c_1 > 0$, не зависящей от $v,\ \varepsilon$.

Доказательство. Подставляя в неравенство (1.10) вместо функции $v(x,y)$ функцию $w(x,y) = \Lambda_0^{\sigma_0 q} v$, получим

$$\left\| \widehat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v,\, |p| \right\|_{(s+1)q,\alpha} \leqslant \varepsilon \left\| \partial_t \widehat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v,\, |p| \right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon) \left\| \widehat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v,\, |p| \right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + \\ + c_1 (\left\| \widehat{Q}_{l-1} \Lambda_0^{\sigma_0 q} v,\, |p| \right\|_{sq,\alpha} + \left\| \widehat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q}\, v(x,t)|_{t=0}\,,\, |p| \right\|_{(s+\frac{1}{2})q} + \|v,\, |p|\|_{s_1,\alpha}). \quad (1.26)$$

Здесь $\varepsilon > 0, \quad s_1 \in R^1$ — любые числа.

Заметим, что при $s \geqslant -\sigma_0$ справедлива оценка

$$\left\| \partial_t \widehat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v,\, |p| \right\|_{sq,\alpha} \leqslant c \, \|v,\, |p|\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q,\alpha,q}\,. \quad (1.27)$$

Воспользовавшись в правой части неравенства (1.27) неравенствами (1.27) и (1.13), получим оценку (1.26).

2. ФАКТОРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРА A И ПОСТРОЕНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе мы построим разделяющий оператор $\widehat{Q}(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)$ и докажем теоремы 2, 3. Для упрощения записей будем обозначать в этом параграфе через $\|\cdot\|$ норму в пространстве $L_2(R^n_+)$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим оператор $\widehat{Q}_0(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)$ определённый в (1.4) при $i=0$. Так как функции $\lambda_i(p,y,\xi,\eta)\,,\ \ i=1,2,\ldots,k$, удовлетворяют условию 1.1, то справедлива оценка

$$\left\| (A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v - \widehat{Q}_0(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v),\, |p| \right\| \leqslant c \, \|v,\, |p|\|_{2m-1,\alpha,q} \quad (2.1)$$

для любых функций $v(x,t) \in H_{2m,\alpha,q}(R^n_+)$. При этом константа $c > 0$ в оценке (2.1) не зависит от v, p.

Заметим, что функция $\lambda_i(p,y,\xi,\eta) - z_i(p,y,\xi,\eta)$, где $z_i(p,t,\xi,\eta) - z$ — корни уравнения (11) принадлежит классу $S^{q-1}_{\alpha,p}(\Omega)$. То есть справедлива оценка

$$\left\| (\widehat{Q}_0(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v - \widehat{Q}(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v),\, |p| \right\| \leqslant c \, \|v,\, |p|\|_{2m-1,\alpha,q}\,, \quad (2.2)$$

где

$$\widehat{Q}(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v = \prod_{j=1}^{k} (\partial_y - K_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y}))v, \quad (2.3)$$

а $K_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $z_j(p,y,\xi,\eta), \quad j=1,\,2,\ldots,\,k$. Из (2.1) и (2.2) вытекает утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть $w(x,y) \in \Omega_{r_3}$ (см. определение 4), где r_3 - число z корней уравнения (11), лежащих в левой полуплоскости. Предположим вначале, что $r_3 < k$. По построению $\widehat{Q}_k = I$. Используя оценку (1.24) при $s = k - \frac{3}{2} - s_0 \ \ (s_0 \geqslant 0)$ и $l = k$, получим оценку

$$\|w,\, |p|\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \leqslant \varepsilon \, \|\partial_y w,\, |p|\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} + c(\varepsilon) \, \|w,\, |p|\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} + \\ + c_1 \left\| \widehat{Q}_{k-1} w,\, |p| \right\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha}. \quad (2.4)$$

Воспользовавшись теперь для оценки последнего слагаемого в правой части (2.4) оценкой (1.24) при $l = k-1, \quad s = k-2-\frac{1}{2}-s_0$, получим

$$\|w,\,|p|\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \leqslant \varepsilon\,\|\partial_y w,\,|p|\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} + c(\varepsilon)\,\|w,\,|p|\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} +$$

$$+c_1(\varepsilon_1)\left\|\partial_y \widehat{Q}_{k-1}w,\,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{5}{2})q,\alpha} + c(\varepsilon_1)\left\|\widehat{Q}_{k-1}w,\,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q-1,\alpha} + \left\|\widehat{Q}_{k-2}w,\,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{5}{2})q,\alpha})$$

или

$$\|w,\,|p|\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \leqslant \varepsilon_2 \sum_{l=k-1}^{k} \left\|\partial_y \widehat{Q}_l w,\,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} +$$

$$+ c(\varepsilon_2) \sum_{l=k-1}^{k} \left\|\widehat{Q}_l w,\,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} + c_1 \left\|\widehat{Q}_{k-2}w,\,|p|\right\|_{(k-2-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \tag{2.5}$$

для любого $\varepsilon_2 > 0$ с константой $c_1 > 0$, не зависящей от $\varepsilon_2,\ w$.

Воспользуемся для оценки последнего слагаемого леммой 1.5 последовательно при $l = k-2,\ \ s = k-3-\frac{1}{2}-s_0;\ l = k-3,\ \ s = k-4-\frac{1}{2}-s_0; \ldots; l = k-r_1+1,\ \ s = k-r_1-\frac{1}{2}-s_0$, получим оценку

$$\|w,\,|p|\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \leqslant \varepsilon \sum_{l=k-r_3+1}^{k} \left\|\partial_y \widehat{Q}_l w,\,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} +$$

$$+ c(\varepsilon) \sum_{l=k-r_3+1}^{k} \left\|\widehat{Q}_l w,\,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} + c_1(\left\|\widehat{Q}_{k-r_3}w,\,|p|\right\|_{(k-r_3-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} +$$

$$+ \sum_{l=k-r_3+1}^{k-2} \sum_{i=0}^{k-l-1} \sum_{i_1=0}^{k-l-i} \|\partial_y^{i_1} w,\,|p|\|_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} + \sum_{l=k-r_3+1}^{k-2} \sum_{i=0}^{k-l-1} \sum_{i_1=0}^{k-l-i-1} \|\partial_y^{i_1} w,\,|p|\|_{(l-\frac{1}{2}-s_0+i)q,\alpha}). \tag{2.6}$$

Последовательно используя в правой части (2.6) следствие 1.1 при $l = k-r_3$, $s = k-r_3-\frac{3}{2}-s_0$; $l = k-r_3-1$, $s = k-r_3-\frac{5}{2}-s_0$;$\ldots$; $l = 2$, $s = \frac{1}{2}-s_0$ получим оценку

$$\|w,\,|p|\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \leqslant \varepsilon \sum_{l=2}^{k} \left\|\partial_y \widehat{Q}_l w,\,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} + +c(\varepsilon) \sum_{l=2}^{k} \left\|\widehat{Q}_l w,\,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha}$$

$$+ c_1(\left\|\widehat{Q}_1 w,\,|p|\right\|_{(\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha} + \sum_{l=k-r_3+1}^{k-2} \sum_{i=0}^{k-l-1} \sum_{i_1=0}^{k-l-i} \|\partial_y^{i_1} w,\,|p|\|_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} +$$

$$\sum_{l=k-r_3+1}^{k-2} \sum_{i=0}^{k-l-1} \sum_{i_1=0}^{k-l-i-1} \|\partial_y^{i_1} w,\,|p|\|_{(l-\frac{1}{2}-s_0+i)q,\alpha} + \|w,\,|p|\|_{s_1,\alpha}), \tag{2.7}$$

где $s_1 \in R^1$ — любое число.

Воспользуемся в правой части (2.7) леммой 1.1 при $l = 1,\ \ s = -s_0 - \frac{1}{2}$, получим оценку

$$\|w, |p|\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha} \leqslant \varepsilon \sum_{l=2}^{k} \left\|\partial_y \widehat{Q}_l w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} +$$

$$+ c(\varepsilon) \sum_{l=2}^{k} \left\|\widehat{Q}_l w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} + c_1\{Re(\widehat{Q}_0 w, \widehat{Q}_1 w)_{-s_0 q,\alpha} +$$

$$+ \left|(M_{1,-s_0 q}\widehat{Q}_1 w, \widetilde{\Lambda}_0^{-s_0 q}\widehat{Q}_1 w)\right| +$$

$$+\sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha}+$$

$$+\sum_{l=k-r_3+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q,\alpha}+\|w,|p|\|_{s_1,\alpha}\}\quad(2.8)$$

где $s_1 \in R^1$ — любое число.

Заметим, что из следствия 1.1 вытекает оценка

$$\left|(M_{1,-s_0q}\widehat{Q}_1w,\widetilde{\Lambda}_0^{-s_0q}\widehat{Q}_1w)\right|\leqslant\varepsilon\left\|\partial_y\widehat{Q}_1w,|p|\right\|^2_{-(s_0+\frac{1}{2})q,\alpha}+c(\varepsilon)\left\|\widehat{Q}_1w,|p|\right\|^2_{(\frac{1}{2}-s_0)q-1,\alpha}.\quad(2.9)$$

Применяя (2.9) и (1.10) в правой части (2.8) и выбирая $s_1\leqslant(l-s_0-\frac{1}{2})q$, получим из (2.8) оценку

$$\|w,|p|\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha}\leqslant\varepsilon\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l+1-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{3}{2}+i)q,\alpha}+$$
$$+c(\varepsilon)\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha}+$$
$$+c_1(Re(\widehat{Q}_0w,\widehat{Q}_1w)_{-s_0q,\alpha}+\sum_{l=k-r_3+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha}+$$
$$+\sum_{l=k-r_3+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q,\alpha}).\quad(2.10)$$

Докажем оценку (2.10) в случае $r_3=k$. Используя для оценки последнего слагаемого в правой части (2.4) замечание 1.1 при $l=k-1,\ \ s=k-2-\frac{1}{2}-s_0$ и лемму 1.5 последовательно при $l=k-2,\ \ s=k-3-\frac{1}{2}-s_0;\ldots;\ \ l=2,\ s=\frac{1}{2}-s_0$ получим оценку (2.6) при $r_3=k-1$. Воспользовавшись в этом неравенстве леммой 1.2 при $l=1$, $s=-s_0-\frac{1}{2}$ устанавливаем оценку (2.10).

Из (2.10) и теоремы 2 следует оценка

$$\|w,|p|\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha}\leqslant\varepsilon\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l+1-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{3}{2}+i)q,\alpha}+$$
$$+c(\varepsilon)\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l-i+1}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha}+c_1Re(A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)w,\widehat{Q}_1w)_{-s_0q,\alpha}.$$

Таким образом, теорема 3 доказана. Причём, в качестве разделяющего оператора $\widehat{Q}$ можно взять оператор $\widehat{Q}_1$, определенный в (1.4) при $i=1$.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\sigma_0q\geqslant 2$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $c(\varepsilon)>0$, что при всех $v(x,y)\in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\left\|\widetilde{\Lambda}_0^{\sigma_0q}v,|p|\right\|^2_{(k-\sigma_0)q,\alpha}\leqslant\varepsilon\|v,|p|\|^2_{qk,\alpha,q}+c(\varepsilon)\|v,|p|\|^2_{kq-1,\alpha,q}+$$
$$+c_1Re(\widehat{Q}_0\Lambda_0^{\sigma_0q}v,\widehat{Q}_1\Lambda_0^{\sigma_0q}v)_{(\frac{1}{2}-\sigma_0)q,\alpha}\quad(2.11)$$

с постоянной $c_1>0$, не зависящей от v, ε.

Для доказательства достаточно повторить доказательство теоремы 3 при$s_0 = \sigma_0 - \frac{1}{2}$ с той лишь разницей, что вместо леммы 1.5 и замечания 1.2 следует воспользоваться леммой 1.6.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Так как пространство $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, то теорему 1 достаточно доказать для функций из $C_0^\infty(R_+^n)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие 1при $s = 2m$ и условия 3, 4. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $c(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $v(x,y) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\left\|D_{\alpha,y}^{2m}v, |p|\right\| \leqslant \varepsilon \left\|v, |p|\right\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)(\left\|v, |p|\right\|_{2m-1,\alpha,q} + \left\|A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v, |p|\right\|). \tag{3.1}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством $|(((|p| + |\xi| - i\eta)^{\sigma_0 q} - (|p| + |\xi|)^{\sigma_0 q})| \geqslant |\eta|^{\sigma_0 q}$, справедливым при $\sigma_0 q \geqslant 2$. Получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,y}^{2m}v, |p|\right\| \leqslant \left\|\Lambda_0^{\sigma_0 q}v, |p|\right\|_{2m-\sigma_0 q,\alpha} \tag{3.2}$$

при $2 \leqslant \sigma_0 q \leqslant 2m$.

Воспользуемся следствием 1.1, получим из (3.2) оценку

$$\left\|D_{\alpha,y}^{2m}v, |p|\right\|^2 \leqslant \varepsilon \left\|v, |p|\right\|_{2m,\alpha,q}^2 + c(\varepsilon)\left\|v, |p|\right\|_{2m-1,\alpha,q}^2 + c_1 Re(\widehat{Q}_0\Lambda_0^{\sigma_0 q}v, \widehat{Q}_1\Lambda_0^{\sigma_0 q}v)_{(\frac{1}{2}-\sigma_0)q,\alpha}. \tag{3.3}$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского получим оценку

$$\left|(\widehat{Q}_0\Lambda_0^{\sigma_0 q}v, \widehat{Q}_1\Lambda_0^{\sigma_0 q}v)_{(\frac{1}{2}-\sigma_0)q,\alpha}\right| \leqslant \varepsilon \left\|v, |p|\right\|_{2m,\alpha,q}^2 + c(\varepsilon)(\left\|v, |p|\right\|_{2m-1,\alpha,q}^2 + \left\|\widehat{Q}_0 v, |p|\right\|^2). \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает оценка (3.1)

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что при всех $v(x,y) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left\|A(p,y,D_x,0,\partial_y)v, |p|\right\| \leqslant \varepsilon \left\|v, |p|\right\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\left\|v, |p|\right\|_{2m-1,\alpha,q} + \\ + c_1 \left\|A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v, |p|\right\|\end{aligned} \tag{3.5}$$

с константой $c_1 > 0$, не зависящей от v.

Доказательство. Из определения оператора $A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)$ получим

$$\begin{aligned}\left\|A(p,y,D_x,0,\partial_y)v, |p|\right\| \leqslant \left\|A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v, |p|\right\| + \\ + \left\|\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3 \leqslant 2m,\, j\neq 0} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(y)p^{j_3}D_x^\tau D_{\alpha,y}^{j_1}\partial_y^{j_2}v, |p|\right\|.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Оценивая вторую норму в правой части оценки (3.6) с помощью неравенства Коши Буняковского, получим

$$\begin{aligned}\sum_{|\tau|+j+ql \leqslant 2m,\, j\neq 0}\left\|D_x^\tau D_{\alpha,t}^j\partial_t^l v, |p|\right\| \leqslant \varepsilon \left\|v, |p|\right\|_{2m,\alpha,q} + \\ + c(\varepsilon)(\left\|A(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v, |p|\right\| + \left\|v, |p|\right\|_{2m-1,\alpha,q}).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Применяя неравенство (3.7) в правой части неравенства (3.6), получим неравенство (3.5).

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия 1 при $s = 2m$ и условия 2–4. Если порядки m_i граничных операторов B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходят $2m - q$, то для решения $v(x,y)$ задачи (8), (10), принадлежащего $H_{2m,\alpha,q}(R_+^n)$ справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{2m,\alpha,q} \leqslant$$
$$\leqslant c(\|A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v,|p|\| + \sum_{i=1}^{r_1} \left\| B_i\, v|_{y=0}\,,|p| \right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q} + \|v,|p|\|_{2m-1,\alpha,q}). \quad (3.8)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$A(p,y,D_x,0,\partial_y)v(x,y) = F(x,y). \quad (3.9)$$

Так как это уравнение не является вырождающимся, то справедлива априорная оценка

$$\left\| F^{-1}_{\xi\to x}[(|p|^2 + |\xi|)^{2m} F_{x\to\xi}[v(x,y)]] \right\| + \left\| \partial_y^k v \right\| \leqslant$$
$$\leqslant c(\|A(p,y,D_x,0,\partial_y)v\| + \sum_{i=1}^{r_3} \left\| B_i\, v|_{y=0} \right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q} + \|v\|). \quad (3.10)$$

Из (3.10) и (3.1) получим оценку

$$\left\|D^{2m}_{\alpha,y}\right\| + \left\| F^{-1}_{\xi\to x}[(|p|^2 + |\xi|)^{2m} F_{x\to\xi}[v]] \right\| + \left\| \partial_y^k v \right\| \leqslant$$
$$\leqslant c(\|A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v\| + \|A(p,y,D_x,0,\partial_y)v\| + \sum_{i=1}^{r_3} \left\| B_i\, v|_{y=0} \right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q}) +$$
$$+ \varepsilon \left\|v\right\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon) \left\|v\right\|_{2m-1,\alpha,q}.$$

Используя в правой части последнего неравенства оценку (3.5), получим

$$\|v\|_{2m,\alpha,q} \leqslant c(\|A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)v\| + \sum_{i=1}^{r_3} \left\| B_i\, v|_{y=0} \right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q}) +$$
$$+ \varepsilon \left\|v\right\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon) \left\|v\right\|_{2m-1,\alpha,q}.$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (3.8).

Доказательство теоремы 1. Если порядки операторов B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходит $2m - q$, то теорема 1 при $s = 2m$ вытекает из теоремы 3.3, так как пространство $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$.

Доказательство теоремы 1 в случае $s > 2m$ и в случае, когда порядок хотя бы одного из операторов B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}$ не меньше $2m - q$ проводиться стандартным методом (см., например, [12]).

Доказательство теоремы 4. Из теоремы 1 вытекает оценка

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} \leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q} + \|v,|p|\|_{s-1,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3} \|G_j,|p|\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}).$$

Запишем это неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} + (\frac{1}{2}\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} - \left\|v,|p|\right\|_{s-1,\alpha,q}) \leqslant c(\|F,|p|\|_{s-2m,\alpha,q} \sum_{j=1}^{r_3} \|G_j,|p|\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}).$$

Так как по условию теоремы $|p| \geqslant p_0 > 0$, то из определения нормы в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ вытекает, что существует такое число p_0, что при всех $|p| \geqslant p_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\,\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} - \|v,|p|\|_{s-1,\alpha,q} > 0.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства вытекает неравенство (17). Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Доклады Академии наук СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

3. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : Труды семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

4. Левендорский, С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сборник. — 1980. — Т. 111 (153), вып. 4. — С. 483–501.

5. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

8. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 477, № 1. — С. 7–10.

9. Баев, А. Д. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский // Доклады академии наук. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 7–10.

10. Баев, А. Д. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

11. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

12. Баев, А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун–т, 2008. — 240 с.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. on some cases of degeneracy of elliptic type equations at the boundary of the domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravneniyj ellipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

3. Glushko V.P. The theorems of solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: Trudy seminara akad. S.L. Soboleva — Differential equations with partial derivatives. Acad seminar. S.L. Sobolev*, 1978, no. 2, pp. 49–68.

4. Levendorsky S.Z. Boundary value problems in a half-space for quasi − elliptic pseudodifferential operators degenerating at the boundary. [Levendorskiyj S.Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvaziellipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1980, vol. 111 (153), iss. 4, pp. 483–501.

5. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

6. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

7. Baev A.D., Kobylinsky P.A. On some properties of one class of degenerate pseudo-differential operators. [Baev A.D., Kobylinskiyj P.A. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2015, vol. 460, no. 2, pp. 133–135.

8. Baev A.D., Rabotinsky N.I. On some properties of a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2017, vol. 477, no. 1, pp. 7–10.

9. Baev A.D., Kovalevsky R.A. On one class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A. Ob odnom klasse psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 7–10.

10. Baev A.D., Buneev S.S. On a class of boundary value problems in the band for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D., Buneev S.S. Ob odnom klasse kraevyx zadach v polose dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 448, no. 1, pp. 7–8.

11. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Kobylinsky P.A. On degenerate high-order elliptic equations and pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A., Kobylinskiyj P.A. O vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyax vysokogo poryadka i psevdodifferencial'nyx operatorax s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 471, no. 4, pp. 387–390.

12. Baev A.D. Qualitative methods of theory of boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A.D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. Voronezh, 2008, 240 p.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bahtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Бунеев Сергей Сергеевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений Елецкого государственного университета, Елец, Россия
E-mail: limes88@mail.ru
Тел.: +7(950)808–38–12

Buneev Sergey S., Associate Professor of the Department of differential equations of Elechk State University, Elechk, Russia
E-mail: limes88@mail.ru
Tel.: +7(950)808–38–12

Ковалевский Ростислав Александрович, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Kovalevsky Rostislav A., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: 259608@mail.ru
Тел.: +7(951)554–45–44

Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 259608@mail.ru
Tel.: +7(951)554–45–44

Леженина Ирина Федоровна, доцент кафедры функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: if.lezhenina@yandex.ru
Тел.: 89204193398

Lezhenina Irina Fedorovna, associate Professor of the Department of functional analysis and operator equations, Voronezh state University, Voronezh, Russia
E-mail: if.lezhenina@yandex.ru
Tel.: 89204193398

Глушко Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук; профессор, зав. кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Glushko Andrey V., doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)220–86–18