

МЕТОД РАСЧЕТА ФАЗОВЫХ СКОРОСТЕЙ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН РАЗЛИЧНЫХ МОД В ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

С. Л. Ильменков

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Поступила в редакцию 01.06.2018 г.

Аннотация. Рассмотрено строгое решение задачи о нахождении фазовых скоростей трёхмерных изгибных волн различных мод в изотропной цилиндрической оболочке: поллой, находящейся в вакууме и жидкости, а также, заполненной жидкостью. Для разделения переменных в векторном уравнении Гельмгольца используется представление векторного потенциала через скалярные потенциалы Дебая и “типа Дебая”. Получены характеристические уравнения для волновых чисел трехмерных изгибных волн различных мод, построены дисперсионные кривые фазовых скоростей этих волн. Проведен сравнительный анализ дисперсионных кривых для стальных и алюминиевых оболочек различных толщин, контактирующих с жидкостью, и аналогичных кривых для полых оболочек.

Ключевые слова: фазовые скорости трёхмерных изгибных волн, изотропная цилиндрическая оболочка, жидкая среда, потенциалы Дебая, вектор смещения, характеристическое уравнение, дисперсионные кривые.

THE METHOD OF CALCULATION OF PHASE VELOCITIES OF THREE-DIMENSIONAL BENDING WAVES OF DIFFERENT MODES IN ISOTROPIC CYLINDRICAL SHELL CONTACTING WITH A LIQUID

S. L. Ilmenkov

Abstract. A strict solution of the task of determination of phase velocities of three-dimensional bending waves of different modes in an isotropic cylindrical shell: hollow, in vacuum and liquid, and filled with liquid is considered. To separate the variables in the vector Helmholtz equation, we use the representation of the vector potential through the scalar Debye and "Debye type" potentials. Characteristic equations for wave numbers of three-dimensional bending waves of different modes are obtained, dispersion curves of phase velocities of these waves are constructed. A comparative analysis of dispersion curves for steel and aluminum shells of different thicknesses in contact with the liquid, and similar curves for hollow shells is carried out.

Keywords: phase velocities of three-dimensional bending waves, isotropic cylindrical shell, liquid medium, Debye potentials, displacement vector.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данном исследовании в развитие работ [1–4], посвященных полым оболочкам, изучаются фазовые скорости упругих волн в изотропной цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью и (или) погруженной в жидкость. Как и ранее [4–6], рассматривается строгое решение

задачи, составляющее научную новизну данного исследования и базирующееся на использовании уравнений динамической теории упругости, потенциалов Дебая и “типа Дебая”. Данная задача отличается от аналогичной задачи для стержня появлением дополнительной граничной поверхности, что приводит к соответствующим неизвестным коэффициентам, которые определяются из дополнительных граничных условий. С другой стороны, волновые процессы в оболочке на высоких частотах мало чем отличаются от таких же процессов в слое.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с теоремой Гельмгольца вектор смещения \mathbf{u} упругой оболочки может быть представлен в виде комбинации скалярного Φ и векторного Ψ потенциалов:

$$\mathbf{u} = -\text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi, \quad (1)$$

при $\text{div } \Psi = 0$, где Φ — скалярный потенциал, характеризующий смещения, вызванные изменением объема; Ψ — векторный потенциал, описывающий смещения вихревого типа.

В основе рассматриваемого решения лежит использование скалярных потенциалов Дебая [5–7], через которые выражается векторный потенциал Ψ :

$$\Psi = \text{rot rot}(\mathbf{R}U) + i\kappa \text{rot}(\mathbf{R}V), \quad (2)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор точки наблюдения, U и V — потенциалы Дебая; κ — волновое число изгибающей волны.

Векторная функция Ψ также может быть выражена через потенциалы “типа Дебая” χ и Ψ [2–4], которые близки к потенциалам Дебая U и V , но, в отличие от них, более удобны для применения в цилиндрической системе координат:

$$\Psi = \chi \mathbf{e} + a \text{rot}(\Psi \mathbf{e}), \quad (3)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор.

Сами потенциалы U , V , χ и Ψ подчиняются скалярным уравнениям Гельмгольца, в которых переменные в круговой цилиндрической системе координат разделяются:

$$(\Delta + \kappa^2)U = 0, \quad (4)$$

$$(\Delta + \kappa^2)V = 0. \quad (5)$$

В соответствии с этим разложения скалярных потенциалов Φ , U , V примут вид [3–5]:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= e^{ikz} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi [A_m J_m(h'r) + B_m N_m(h'r)]; \\ V &= e^{ikz} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi [C_m J_m(\kappa'r) + D_m N_m(\kappa'r)]; \\ U &= e^{ikz} \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\varphi [E_m J_m(\kappa'r) + F_m N_m(\kappa'r)], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $h' = (h^2 - k^2)^{1/2}$, $k' = (\kappa - k^2)^{1/2}$, $N_m(hr)$ — цилиндрическая функция Неймана; A_m , B_m , C_m , D_m , E_m , F_m — неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий на внешней ($r = a$) и внутренней ($r = b$) поверхностях оболочки.

Для полой оболочки, находящейся в вакууме, граничные условия, заключающиеся в отсутствии напряжений на обеих поверхностях оболочки ($r = a$ и $r = b$), принимают вид [1–4]:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] \Big|_{r=a}^{r=b} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}U_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} \quad (9)$$

где λ и μ — постоянные Ламе материала оболочки; U_r, U_φ, U_z — компоненты вектора смещения упругой оболочки.

Из граничных условий (7)–(9) получаем [2–4, 8–9] определитель 6-го порядка для волновых чисел моды m трёхмерных изгибных волн в полой цилиндрической оболочке произвольной толщины с внешним радиусом a и внутренним b :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} \quad (10)$$

где $a_{11} = -(\lambda + 2\mu)J_m^{11}(h^1a) + \lambda[a^{-2}m^2J_m(h^1a) - a^{-1}J_m^1(h^1a) + k^2J_m(h^1a)]$, $a_{12} = -(\lambda + 2\mu)N_m^{11}(h^1a) + \lambda[a^{-2}m^2N_m(h^1a) - a^{-1}N_m^1(h^1a) + k^2N_m(h^1a)]$, $a_{13} = (\lambda + 2\mu)\{-i\chi m^2[J_m(\chi^1a) - J_m^1(\chi^1a)] + i\chi J_m^{11}(\chi^1a) + i\chi k^2[J_m(\chi^1a) + aJ_m^1(\chi^1a)]\} + \lambda\{i\chi a^{-2}J_m(\chi^1a)(m^2 + k^2) - i\chi a^{-1}J_m^1(\chi^1a)(m^2 + k^2) - 2i\chi k^2J_m(\chi^1a) - i\chi J_m^{11}(\chi^1a)\}$, и т. д.

Остальные элементы определителя (10) приведены в Приложении. $h^1 = (h^2 - k^2)^{1/2}$, $\chi^1 = (\chi^2 - k^2)^{1/2}$, h, χ — волновые числа продольной и поперечной волн в материале оболочки соответственно; $J_m(h^1r)$ — цилиндрическая функция Бесселя; $N_m(h^1r)$ — цилиндрическая функция Неймана.

Приравняв определитель (10) нулю и раскрывая его, получаем характеристическое уравнение для волновых чисел моды m трёхмерных изгибных волн в изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины.

Для определения влияния внутренней жидкой среды с плотностью ρ на дисперсионные кривые фазовых скоростей оболочки к определителю 6-го порядка добавляется столбец и строка, и он превращается в определитель 7-го порядка. Потенциал Φ звукового поля внутри оболочки ($r < b$) раскладывается в ряд по цилиндрическим функциям [3, 4]:

$$\Phi(r, \varphi, z) = e^{ikz} \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(\gamma r) \cos m\varphi, \quad (11)$$

где $\gamma = \sqrt{(\omega/c)^2 - k^2}$, c — скорость звука в жидкой среде.

Составляющая волнового вектора вдоль оси $z \Rightarrow k$ такая же, как и в оболочке, в силу закона Снеллиуса.

При этом граничное условие (7) для нормального напряжения на внутренней поверхности оболочки ($r = b$) трансформируются следующим образом:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + \omega^2 \rho \Phi \Big|_{r=b} = 0. \quad (12)$$

Добавится еще одно граничное условие: на внутренней поверхности оболочки ($r = b$) нормальные компоненты вектора смещения в оболочке и в жидкости непрерывны.

Раскрывая определитель седьмого порядка, получим характеристическое уравнение для волновых чисел трёхмерных изгибных волн оболочки с учетом ее внутреннего заполнения жидкой средой.

Расширим предыдущее решение для оценки влияния внешней и внутренней жидких сред на дисперсионные кривые фазовых скоростей оболочки:

1) потенциалы звуковых волн Φ_1 (во внешней жидкой среде) и Φ_2 (в заполнении) раскладываются в ряды по цилиндрическим функциям:

$$\Phi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} G_m H_m^{(1)}(\gamma_1 r) \cos m\varphi e^{ikz}; \quad (13)$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} K_m J_m(\gamma_2 r) \cos m\varphi e^{ikz}, \quad (14)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{(\omega/c_3)^2 - k^2}$, $\gamma_2 = \sqrt{(\omega/c_4)^2 - k^2}$; c_3 и c_4 — скорости звука во внешней и внутренней средах соответственно.

В соответствии с законом Снеллиуса составляющая волнового вектора вдоль оси $z \Rightarrow k$ такая же, как и в оболочке.

2) граничное условие (11) для нормальных напряжений трансформируется в два граничных условия на обеих поверхностях оболочки:

— для наружной поверхности:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + i\omega^2 \rho_1 \Phi_1 = 0 \Big|_{r=a}, \quad (15)$$

— для внутренней поверхности:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] + i\omega^2 \rho_2 \Phi_2 = 0 \Big|_{r=b}, \quad (16)$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности соответственно наружной и внутренней сред.

3) к условиям (15) и (16) необходимо добавить два граничных условия о непрерывности нормальных компонент вектора смещения на обеих поверхностях оболочки:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0. \quad (18)$$

Граничные условия (17), (18) добавляют к определителю шестого порядка (10) две строки, а множители при неизвестных коэффициентах G_m , K_m — два столбца, в результате чего он преобразуется в определитель восьмого порядка. При этом только в двух строках этих добавленных столбцов будут отличные от нуля элементы.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ

Результаты решения характеристических уравнений в виде дисперсионных кривых фазовых скоростей изгибных волн для мод $m = 1; 2; 3; 4$ (кривые №№ 1л, 2л, 3л, 4л) представлены на рис. 1 (для стальной оболочки) и рис. 2 (для алюминиевой). Внешний радиус оболочек $a = 1,0$; внутренний имел два значения: $b = 0,99$ и $b = 0,8$; Λ — длина продольной волны в материале оболочки: $\Lambda = C_1/f$; C_1 — скорость этой волны; f — частота, Гц.

Вычисленные значения фазовых скоростей заполненных оболочек сравнивались с соответствующими значениями для полой оболочки (кривые №№ 1, 2, 3, 4).

Из графиков видно, что значения фазовой скорости нулевой моды изгибной волны ($m = 1$) с ростом волнового радиуса оболочки асимптотически стремятся к скорости поверхностной

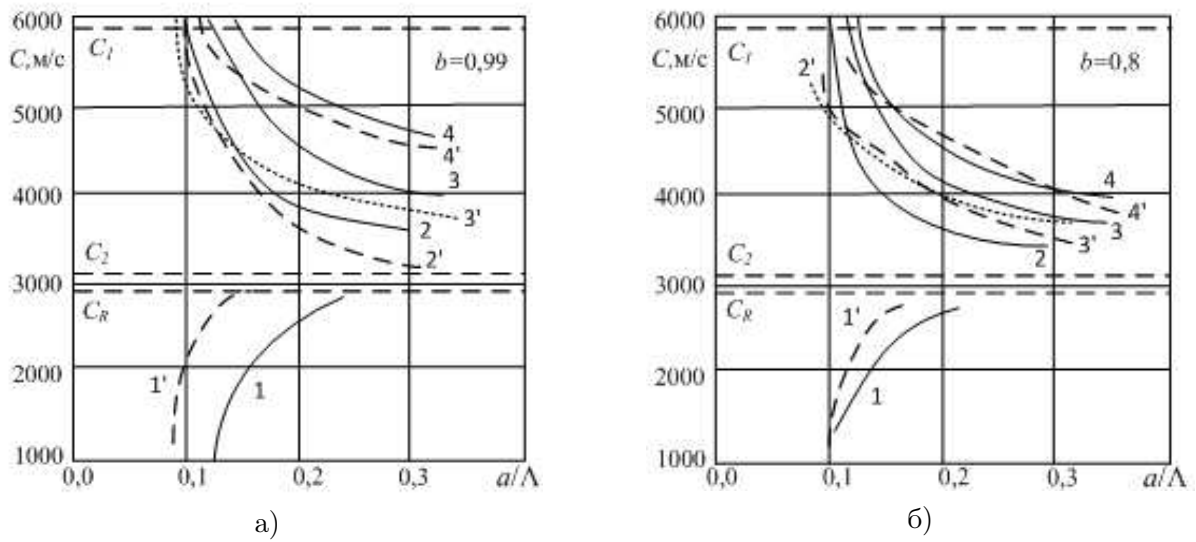


Рис. 1. Фазовые скорости трехмерных изгибных волн в полой (1, 2, 3, 4) и заполненной жидкостью (1', 2', 3', 4') стальной оболочке: а) $b = 0,99$; б) $b = 0,8$.

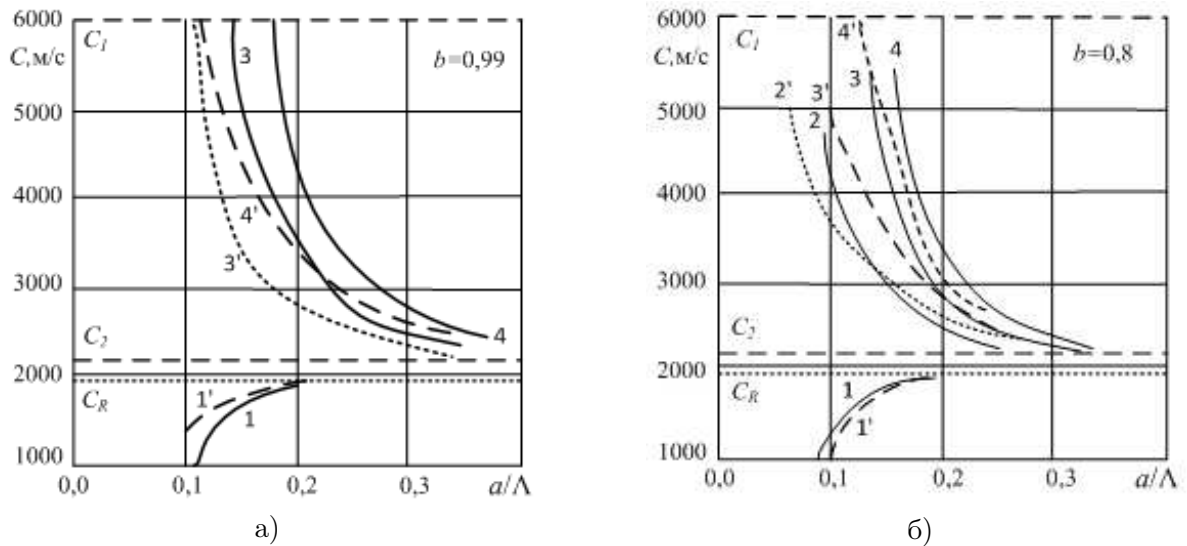


Рис. 2. Фазовые скорости трехмерных изгибных волн в полой (1, 2, 3, 4) и заполненной жидкостью (1', 2', 3', 4') алюминиевой оболочке: а) $b = 0,99$; б) $b = 0,8$.

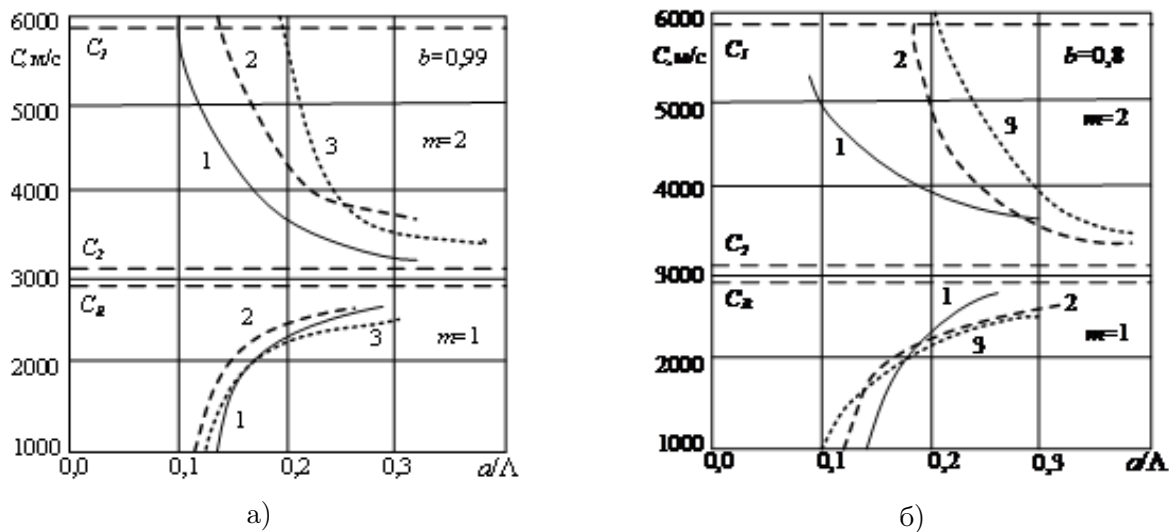


Рис. 3. Фазовые скорости трехмерных изгибных волн мод $m = 1$ и $m = 2$ в стальной оболочке при наличии внешней и внутренней жидких сред: а) $b = 0,99$; б) $b = 0,8$.

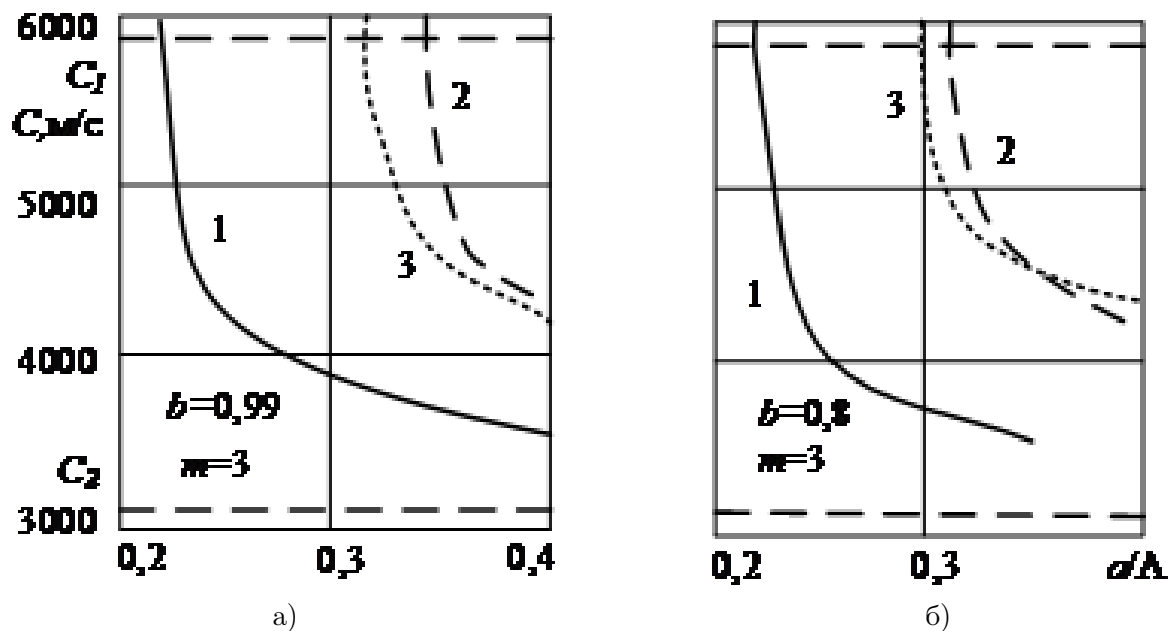


Рис. 4. Фазовые скорости трехмерных изгибных волн мод $m = 3$ в стальной оболочке при наличии внешней и внутренней жидких сред: а) $b = 0,99$; б) $b = 0,8$.

волны (в случае контакта с вакуумом — волны Рэлея C_R), а для ненулевых мод ($m = 2, 3, 4$) — к значениям скоростей поперечных волн C_2 в материале оболочек. Наличие жидкого заполнения в целом оказывает инерционное воздействие и приводит к некоторому снижению значений фазовых скоростей.

В отличие от рассмотренного решения при получении характеристического уравнения для волновых чисел осесимметричных изгибных волн с учетом внутреннего заполнения оболочки схема решения несколько упрощается. В этом случае за основу берется определитель четвертого порядка и путем добавления к нему одного столбца и одной строки он преобразуется соответственно в определитель пятого порядка.

Результаты расчетной оценки влияния внешней жидкой среды на дисперсионные кривые фазовых скоростей трехмерных изгибных волн в стальной оболочке ($a = 1,0$) показаны на рис. 3. Нижние части рисунков соответствуют моде $m = 1$, верхние — $m = 2$ при $b = 0,99$ (рис. 3, а) и $b = 0,8$ (рис. 3, б). Кривая 1 относится к заполненной водой оболочке, находящейся в вакууме, кривая 2 — к заполненной водой оболочке, помещенной в воду, кривая 3 — к полой оболочке, находящейся в воде.

Аналогичные результаты для моды $m = 3$ с той же нумерацией кривых приведены на рис. 4.

Анализ полученных кривых показывает, что влияние внешней жидкой среды на фазовые скорости изгибных волн в оболочке при наличии внутреннего заполнения в наибольшей степени проявляется при $a/\Lambda \leq 0,2 \div 0,3$ ($ka \leq 4,0 \div 6,0$), что соответствует $f \leq \sim 3f_k$ (f_k — кольцевая частота, $f_k = C_2/2\pi a$). С увеличением волнового радиуса характер дисперсионных кривых в целом оказывается весьма схожим с тем, который наблюдается для стержня, погруженного в жидкость. Кроме того, наличие внешней жидкой среды приводит к дополнительному влиянию на фазовые скорости сопротивления излучения. При значениях фазовой скорости нулевой моды $C \geq c_3$, влияние присоединенной (соколеблющейся) массы жидкости эквивалентно некоторому увеличению толщины оболочки, что приводит к соответствующему смещению дисперсионных кривых на рис. 3 и рис. 4.

С ростом a/Λ фазовые скорости нулевых мод на рис. 3 и рис. 4 также асимптотически стремятся к скорости поверхностной волны, а ненулевых — соответственно к скорости поперечной волны C_2 в материале оболочки. Отмеченные тенденции изменения фазовых скоростей в большей степени проявляются для оболочки с меньшей относительной толщиной ($b = 0,99$).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненного исследования получены характеристические уравнения для волновых чисел трехмерных изгибных волн (с использованием потенциалов Дебая и “типа Дебая”) в изотропной цилиндрической оболочке, контактирующей с наружной и внутренней жидкостью. Получены определители для расчета дисперсионных кривых фазовых скоростей таких волн с учетом влияния жидких сред.

Выполнен сравнительный анализ этих кривых для нескольких мод изгибной волны для полой, заполненной жидкостью и (или) погруженной в жидкость цилиндрической оболочки (стальной и алюминиевой) различной толщины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kleshchev, A. A. Against the Phase Velocities of Flexural Waves in Cylindrical Shell / A. A. Kleshchev // Journal of Technical Acoustics. — 1997. — V. 3, № 4. — P. 16–19.
2. Ильменков, С. Л. Фазовые скорости трёхмерных изгибных волн в изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины (строгое решение) / С. Л. Ильменков, А. А. Клещев // Сборник трудов XI сессии Российского акустического общества. — Т. 1. — Москва, 2001.

— С. 239–241.

3. Ilmenkov, S. L. Phase Velocities of Three-Dimensional and Axis-Symmetrical Elastic Waves in Isotropic Cylindrical Shell / S. L. Ilmenkov, A. A. Kleshchev // *International Journal of Theoretical and Mathematical Physics*. — 2012. — V. 2(6). — P. 196–202.

4. Ильменков, С. Л. Вычисление фазовых скоростей трехмерных изгибных волн в изотропных цилиндрических стержнях и оболочках с помощью потенциалов Дебая и “типа Дебая” / С. Л. Ильменков, А. А. Клещёв, К. А. Клубина // *Акустический журнал*. — 2015. — Т. 61, № 1. — С. 3–9.

5. Клещёв, А. А. Дифракция и распространение волн в упругих средах и телах / А. А. Клещёв. — Санкт-Петербург : Влас, 2002. — 156 с.

6. Клещёв, А. А. Дифракция, излучение и распространение упругих волн / А. А. Клещёв. — Санкт-Петербург : Профпринт, 2006. — 160 с.

7. Debye, P. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nahe eines Brennpunktes oder Brennline / P. Debye // *Ann. Physik*. — 1909. — V. 30, № 4. — P. 755–776.

8. Ильменков, С. Л. Акустический расчёт фазовых скоростей волн в конструкциях, применяемых на транспорте / С. Л. Ильменков // *Морские интеллектуальные технологии*. — 2014. — Т. 2, №1 (23). — С. 32–36.

9. Ilmenkov, S. L. Phase velocities of zero and nonzero modes of flexural waves of elastic infinite cylindrical shell / S. L. Ilmenkov, A. A. Kleshchev // *Journal of Technical Acoustics*. — 1999. — V. 4, № 1. — P. 18–20.

REFERENCES

1. Kleshchev A.A. Against the Phase Velocities of Flexural Waves in Cylindrical Shell. *Journal of Technical Acoustics*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 16–19.

2. Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A. Phase velocities of three-dimensional bending waves in an isotropic cylindrical shell of arbitrary thickness (strict solution). [Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A. Fazovye skorosti tryokhmernykh izgibnykh voln v izotropnoy cilindricheskoy obolochke proizvolnoy tolshchiny (strogoe reshenie)]. *Sbornik trudov XI sessii Rossiyskogo akusticheskogo obschesva*. Moscow, GEOS, vol. 1, 2001, pp. 239–241.

3. Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A. Phase Velocities of Three-Dimensional and Axis-Symmetrical Elastic Waves in Isotropic Cylindrical Shell. *International Journal of Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 2(6), pp. 196–202.

4. Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A., Klyubina K.A. Calculation of phase velocities of three-dimensional bending waves in isotropic cylindrical rods and shells using Debye and «Debye type» potentials. [Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A., Klyubina K.A. Vychislenie fazovykh skorostey trekhmernykh iz gibnykh voln v izotropnykh cilindricheskikh sterzhnyakh i obolochkakh s po-moshchyu potencialov Debaya i “tipa Debaya”]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 2015, vol. 61, no. 1, pp. 3–9.

5. Kleshchev A.A. Diffraction and propagation of waves in elastic media and bodies. [Kleshchev A.A. Difrakciya i rasprostranenie voln v uprugikh sredakh i telakh]. Saint-Petersburg, Vlas, 2002, 156 p.

6. Kleshchev A.A. Diffraction, radiation and propagation of elastic waves. [Kleshchev A.A. Difrakciya, izluchenie i rasprostranenie uprugikh voln]. Saint-Petersburg, Profprint, 2006, 160 p.

7. Debye P. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nahe eines Brennpunktes oder Brennline. *Ann. Physik*, 1909, vol. 30, no. 4, pp. 755–776.

8. Kleshchev A.A. Acoustic calculation of phase velocities of waves in structures used in transport. [Ilmenkov S.L. Akusticheskiy raschyot fazovykh skorostey voln v konstrukciyakh, primenyaemykh na transporte]. *Morskie intellektualnye tekhnologii — Marine intelligent technologies*, 2014, vol. 2, no. 1(23), pp. 32–36.

9. Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A. Phase velocities of zero and nonzero modes of flexural waves of elastic infinite cylindrical shell. Journal of Technical Acoustics, 1999, vol. 4, no. 1, pp. 18–20.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$\begin{aligned}
 a_{14} &= (\lambda + 2\mu)\{-i\chi m^2[N_m(\chi^1 a) - N_m^1(\chi^1 a)] + i\chi N_m^{11}(\chi^1 a) + i\chi k^2[N_m(\chi^1 a) + aN_m^1(\chi^1 a)]\} + \\
 &\lambda\{i\chi a^{-2}N_m(\chi^1 a)(m^2 + k^2) - i\chi a^{-1}N_m^1(\chi^1 a)(m^2 + k^2) - 2i\chi k^2N_m(\chi^1 a) - i\chi N_m^{11}(\chi^1 a)\}; \\
 a_{15} &= 2(\lambda + 2\mu)(a^{-2} - 1)ikmJ_m(\chi^1 a); \\
 a_{16} &= 2(\lambda + 2\mu)(a^{-2} - 1)ikmN_m(\chi^1 a); \\
 a_{21} &= -(\lambda + 2\mu)J_m^{11}(h^1 b) + \lambda[b^{-2}m^2J_m(h^1 b) - b^{-1}J_m^1(h^1 b) + k^2J_m(h^1 b)]; \\
 a_{22} &= -(\lambda + 2\mu)N_m^{11}(h^1 b) + \lambda[b^{-2}m^2N_m(h^1 b) - b^{-1}N_m^1(h^1 b) + k^2N_m(h^1 b)]; \\
 a_{23} &= (\lambda + 2\mu)\{-i\chi m^2[J_m(\chi^1 b) - J_m^1(\chi^1 b)] + i\chi J_m^{11}(\chi^1 b) + i\chi k^2[J_m(\chi^1 b) + bJ_m^1(\chi^1 b)]\} + \\
 &\lambda\{i\chi b^{-2}J_m(\chi^1 b)(m^2 + k^2) - i\chi b^{-1}J_m^1(\chi^1 b)(m^2 + k^2) - 2i\chi k^2J_m(\chi^1 b) - i\chi J_m^{11}(\chi^1 b)\}; \\
 a_{24} &= (\lambda + 2\mu)\{-i\chi m^2[N_m(\chi^1 b) - N_m^1(\chi^1 b)] + i\chi N_m^{11}(\chi^1 b) + i\chi k^2[N_m(\chi^1 b) + bN_m^1(\chi^1 b)]\} + \\
 &\lambda\{i\chi b^{-2}N_m(\chi^1 b)(m^2 + k^2) - i\chi b^{-1}N_m^1(\chi^1 b)(m^2 + k^2) - 2i\chi k^2N_m(\chi^1 b) - i\chi N_m^{11}(\chi^1 b)\}; \\
 a_{25} &= 2(\lambda + 2\mu)(b^{-2} - 1)ikmJ_m(\chi^1 b); \\
 a_{26} &= 2(\lambda + 2\mu)(b^{-2} - 1)ikmN_m(\chi^1 b); \\
 a_{31} &= 2ma^{-1}[J_m^1(h^1 a) - a^{-1}J_m(h^1 a)]; \\
 a_{32} &= 2ma^{-1}[N_m^1(h^1 a) - a^{-1}N_m(h^1 a)]; \\
 a_{33} &= i\chi m\{J_m(\chi^1 a)[a^{-2}(2 - m^2) - k^2] - J_m^{11}(\chi^1 a) - a^{-1}J_m^1(\chi^1 a)\}; \\
 a_{34} &= i\chi m\{N_m(\chi^1 a)[a^{-2}(2 - m^2) - k^2] - N_m^{11}(\chi^1 a) - a^{-1}N_m^1(\chi^1 a)\}; \\
 a_{35} &= ikJ_m^1(\chi^1 a)a\chi^2; \\
 a_{36} &= ikN_m^1(\chi^1 a)a\chi^2; \\
 a_{41} &= 2mb^{-1}[J_m^1(h^1 b) - b^{-1}J_m(h^1 b)]; \\
 a_{42} &= 2mb^{-1}[N_m^1(h^1 b) - b^{-1}N_m(h^1 b)]; \\
 a_{43} &= i\chi m\{J_m(\chi^1 b)[b^{-2}(2 - m^2) - k^2] - J_m^{11}(\chi^1 b) - b^{-1}J_m^1(\chi^1 b)\}; \\
 a_{44} &= i\chi m\{N_m(\chi^1 b)[b^{-2}(2 - m^2) - k^2] - N_m^{11}(\chi^1 b) - b^{-1}N_m^1(\chi^1 b)\}; \\
 a_{45} &= ikJ_m^1(\chi^1 b)b\chi^2; \\
 a_{46} &= ikN_m^1(\chi^1 b)b\chi^2; \\
 a_{51} &= -2ikJ_m^1(h^1 a); \\
 a_{52} &= -2ikN_m^1(h^1 a); \\
 a_{53} &= -k\chi[J_m(\chi^1 a)(m^2 + a^{-1}k^2) + 5J_m^1(\chi^1 a) + aJ_m^{11}(\chi^1 a)]; \\
 a_{54} &= -k\chi[N_m(\chi^1 a)(m^2 + a^{-1}k^2) + 5N_m^1(\chi^1 a) + aN_m^{11}(\chi^1 a)]; \\
 a_{55} &= \chi^2 m[a^{-1}J_m(\chi^1 a) - J_m^1(\chi^1 a)]; \\
 a_{56} &= \chi^2 m[a^{-1}N_m(\chi^1 a) - N_m^1(\chi^1 a)]; \\
 a_{61} &= -2ikJ_m^1(h^1 b); \\
 a_{62} &= -2ikN_m^1(h^1 b); \\
 a_{63} &= -k\chi[J_m(\chi^1 b)(m^2 + b^{-1}k^2) + 5J_m^1(\chi^1 b) + bJ_m^{11}(\chi^1 b)]; \\
 a_{64} &= -k\chi[N_m(\chi^1 b)(m^2 + b^{-1}k^2) + 5N_m^1(\chi^1 b) + bN_m^{11}(\chi^1 b)]; \\
 a_{65} &= \chi^2 m[b^{-1}J_m(\chi^1 b) - J_m^1(\chi^1 b)]; \\
 a_{66} &= \chi^2 m[b^{-1}N_m(\chi^1 b) - N_m^1(\chi^1 b)].
 \end{aligned}$$

Ильменков Сергей Львович, доцент кафедры судовой автоматизации и измерений СПбГМТУ, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilms@rambler.ru
Тел.: +7(921)963-93-65

Ilmenkov Sergey Lvovich, the associate professor of department of marine automation and measurement, Saint-Petersburg State marine technical University, Saint-Petersburg, Russia
E-mail: ilms@rambler.ru
Tel.: +7(921)963-93-65