

УДК 621.391

## СИНТЕЗ И АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ ПО ВРЕМЕНИ ПРИХОДА ПРИ НАЛИЧИИ МОДУЛИРУЮЩЕЙ ПОМЕХИ

А. В. Захаров, В. К. Маршаков

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 01.06.2018 г.

**Аннотация.** Рассмотрены квазиоптимальный и оптимальный алгоритмы различения импульсных сигналов по времени прихода при наличии быстрой гауссовской модулирующей помехи и аддитивного гауссовского белого шума. При этом временные положения различаемых сигналов априори неизвестны, но принимают значения из разных тактовых интервалов, так что такие сигналы не перекрываются по времени. Получены аналитические выражения для первых двух моментов решающих статистик алгоритмов различения, а также выражения для вероятностей ошибок различения сигналов по времени прихода для обоих алгоритмов. Проведено сравнение эффективности квазиоптимального и оптимального алгоритмов по вероятности ошибки различения.

**Ключевые слова:** импульсный сигнал, модулирующая помеха, гауссовский процесс, метод максимального правдоподобия, алгоритм различения, решающая статистика, средняя вероятность ошибки.

## EFFICIENCY OF DISCRIMINATION OF SIGNALS ON ARRIVAL TIME AT PRESENCE OF MODULATING DISTORTION

A. V. Zakharov, V. K. Marshakov

**Abstract.** Quasioptimal and optimal algorithms of discrimination of rectangular pulse signals on arrival time at presence of rapid Gaussian modulating distortions and additive Gaussian white noise background are considered. Thus time positions of discriminated signals are unknown, but accept values from different time intervals, therefore discriminated signals are not blocked on time. Analytical expressions for characteristics of deciding statistics and also for error probabilities of discrimination of signals on arrival time are received for both considered algorithms. Comparison of efficiency of quasioptimal and optimal algorithms is carried out on probability of discrimination errors.

**Keywords:** pulse signal, modulating distortion, Gaussian process, maximum likelihood method, discrimination algorithm, deciding statistic, average error probability.

## ВВЕДЕНИЕ

В радиофизических системах передачи дискретной и непрерывной информации в качестве несущего колебания используют последовательности прямоугольных импульсов. Для передачи непрерывной информации в таких системах часто применяют время-импульсную модуляцию несущей, при которой временные положения отдельных импульсов последовательности

---

© Захаров А. В., Маршаков В. К., 2018

изменяются (модулируются) в пределах заданных тактовых интервалов в соответствии с передаваемым сообщением. Одновременно с этим может осуществляться передача дискретной (цифровой) информации с помощью позиционной модуляции, при которой передаваемый импульс, несущий дискретную информацию, располагается в пределах одного из нескольких заданных тактовых интервалов. При этом задача приема (демодуляции) дискретной составляющей дискретно-непрерывного сообщения сводится к определению тактовых интервалов, в пределах которых локализованы передаваемые сигналы. Прием (демодуляция) непрерывной компоненты сообщения сводится к измерению времени задержки (временного положения) принимаемых сигналов относительно начала тактовых интервалов, на которых локализованы эти сигналы.

На практике прием и обработка информационных сигналов обычно производится на фоне аддитивного широкополосного шума, который всегда присутствует в реальных радиофизических системах передачи информации и маскирует принимаемые сигналы. Кроме того, возможно наличие модулирующей (мультипликативной) помехи, которая возникает в каналах передачи информации и приводит к случайным изменениям (модуляции) параметров принимаемых сигналов (его амплитуды, фазы и т. п.). При этом под действием модулирующей помехи происходит искажение формы принимаемого сигнала, которая становится случайной. Это приводит к ошибкам при приеме и демодуляции информационных сигналов и, следовательно, к снижению достоверности принимаемой информации.

Далее рассмотрена задача приема дискретной (цифровой) компоненты сообщения, передаваемой с помощью позиционной модуляции импульсной несущей. Такая задача сводится к различению сигналов по их локализации (нахождению) в пределах разных тактовых интервалов. При этом конкретное временное положение сигнала внутри каждого тактового интервала несущественно (является неинформативным параметром) и может быть априори неизвестно.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу различения двух импульсных сигналов по времени прихода, искаженных модулирующей помехой и принимаемых на фоне аддитивного шума. Различаемые сигналы  $s_j(t, \tau_{0j})$ ,  $j = 1, 2$ , искаженные модулирующей помехой, представим в виде

$$s_j(t, \tau_{0j}) = \begin{cases} a_0 [1 + k \xi_0(t)] & \text{при } |t - \tau_{0j}| \leq \gamma_0/2; \\ 0 & \text{при } |t - \tau_{0j}| > \gamma_0/2; \end{cases} = a_0 [1 + k \xi_0(t)] I\left(\frac{t - \tau_{0j}}{\gamma_0}\right), \quad (1)$$

где  $a_0$  — амплитуда сигналов при отсутствии модулирующей помехи,  $\gamma_0$  — длительность сигналов,  $\tau_{0j}$ ,  $j = 1, 2$  — временные положения сигналов, соответствующие их серединам,  $\xi_0(t)$  — безразмерный стационарный центрированный случайный процесс с единичной дисперсией, задающий закон амплитудной модуляции сигналов под действием модулирующей помехи,  $k$  — коэффициент модуляции, определяющий глубину амплитудной модуляции, а  $I(x) = 1$  при  $|x| \leq 1/2$ ,  $I(x) = 0$  при  $|x| > 1/2$  — функция, задающая прямоугольную форму сигналов (1) при отсутствии модулирующей помехи (т. е. при  $k = 0$ ).

Считаем, что временные положения  $\tau_{0j}$ ,  $j = 1, 2$  различаемых сигналов  $s_j(t, \tau_{0j})$  (1) априори неизвестны, но не совпадают и принимают значения из заданных *неперекрывающихся* интервалов  $\tau_{01} \in [\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$  и  $\tau_{02} \in [\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$ , где  $\Lambda_{21} < \Lambda_{12}$ . При этом считаем, что различаемые сигналы  $s_1(t, \tau_{01})$  и  $s_2(t, \tau_{02})$  (1) *не перекрываются* по времени для всех возможных значений  $\tau_{01} \in [\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$ ,  $\tau_{02} \in [\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$ . Иными словами, не перекрываются интервалы  $[T_{11}; T_{21}]$  и  $[T_{12}; T_{22}]$  временной локализации сигналов  $s_1(t, \tau_{01})$  и  $s_2(t, \tau_{02})$ , где  $T_{11} = \Lambda_{11} - \gamma_0/2$ ,  $T_{21} = \Lambda_{21} + \gamma_0/2$ ,  $T_{12} = \Lambda_{12} - \gamma_0/2$ ,  $T_{22} = \Lambda_{22} + \gamma_0/2$ , так что выполняется условие

$$T_{21} < T_{12} \quad \text{или} \quad \Lambda_{21} + \gamma_0 < \Lambda_{12}. \quad (2)$$

Тогда сигналы (1) являются *ортогональными*, т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t, \tau_{01}) s_2(t, \tau_{02}) dt = 0$ .

Стационарный случайный процесс  $\xi_0(t)$ , описывающий модулирующую помеху, будем считать *гауссовским*, что во многих случаях обусловлено действием центральной предельной теоремы теории вероятностей [1]. Тогда для статистического описания случайного процесса  $\xi_0(t)$  достаточно задавать его спектральную плотность  $G_0(\omega)$  [1], которую можно представить как

$$G_0(\omega) = (N_{\xi_0}/2) g(\omega/\Omega_0), \quad (3)$$

где  $\Omega_0 = \int_0^{\infty} G_0^2(\omega) d\omega / \max G_0^2(\omega)$  — эффективная ширина спектральной плотности (3),  $N_{\xi_0}/2 = \max G_0(\omega)$  — интенсивность случайного процесса  $\xi_0(t)$ , а функция  $g(x)$  описывает форму спектральной плотности (3) и нормирована так, что  $\int_0^{\infty} g^2(x) dx = 1$ ,  $\max g(x) = 1$ . Так как дисперсия случайного процесса  $\xi_0(t)$  равна 1, то с учетом (3) получаем  $N_{\xi_0} = 2\pi/(\Omega_0\Theta)$ , где  $\Theta = \int_0^{\infty} g(x) dx$  — параметр, определяемый формой спектральной плотности (3) модулирующей помехи  $\xi_0(t)$ .

Будем считать, что искажения формы различаемых сигналов (1), вызванные модулирующей помехой  $\xi_0(t)$ , являются *быстрыми*. Тогда время корреляции  $\tau_K = 2\pi/\Omega_0$  модулирующей помехи  $\xi_0(t)$  много меньше длительности  $\gamma_0$  сигнала (1), т. е. выполняется условие

$$\mu_0 = \gamma_0/\tau_K = \gamma_0\Omega_0/2\pi \gg 1. \quad (4)$$

Из (4) следует, что  $\gamma_0\Omega_0 \gg 1$ , т. е. модулирующая помеха  $\xi_0(t)$  приводит к существенному расширению спектра различаемых сигналов (1).

Сигнал (1), искаженный модулирующей помехой, удобно представить в виде суммы  $s_j(t, \tau_{0j}) = s_{0j}(t, \tau_{0j}) + s_{mj}(t, \tau_{0j})$ ,  $j = 1, 2$ , где

$$s_{0j}(t, \tau_{0j}) = a_0 \begin{cases} 1 & \text{при } |t - \tau_{0j}| \leq \gamma_0/2; \\ 0 & \text{при } |t - \tau_{0j}| > \gamma_0/2; \end{cases} = a_0 I\left(\frac{t - \tau_{0j}}{\gamma_0}\right), \quad (5)$$

— неискаженная компонента сигнала (1), совпадающая с прямоугольным импульсом с амплитудой  $a_0$  и длительностью  $\gamma_0$ , а

$$s_{mj}(t, \tau_{0j}) = a_0 k \xi_0(t) I\left(\frac{t - \tau_{0j}}{\gamma_0}\right) = \xi(t) I\left(\frac{t - \tau_{0j}}{\gamma_0}\right). \quad (6)$$

— искаженная компонента сигнала (1), представляющая собой отрезок стационарного центрированного гауссовского случайного процесса  $\xi(t) = a_0 k \xi_0(t)$  с дисперсией  $\sigma_{\xi}^2 = a_0^2 k^2$  и спектральной плотностью  $G(\omega) = a_0^2 k^2 G_0(\omega)$ . При этом согласно (3) имеем  $G(\omega) = (N_{\xi}/2)g_0(\omega/\Omega_0)$ , где  $N_{\xi}/2 = \max G(\omega) = a_0^2 k^2 N_{\xi_0}/2$  — интенсивность случайного процесса  $\xi(t)$ .

Пусть различаемые сигналы  $s_j(t, \tau_{0j})$  (1), искаженные модулирующей помехой  $\xi_0(t)$ , наблюдаются на фоне аддитивного гауссовского белого шума  $n(t)$  со спектральной плотностью  $G_N(\omega) = N_0/2$ , причем аддитивный шум  $n(t)$  и модулирующая помеха  $\xi_0(t)$  статистически независимы. Белый шум является адекватной моделью широкополосных флуктуационных шумов, в том числе внутренних тепловых шумов радиоэлектронных устройств [1]. Модель

белого шума широко применяется на практике для описания реальных шумов, спектральная плотность которых постоянна или мало меняется в пределах полосы пропускания приемного устройства [1].

Таким образом, считаем, что на входе приемника присутствует аддитивная смесь одного из двух сигналов  $s_j(t, \tau_{0j})$  (1), искаженных модулирующей помехой  $\xi_0(t)$ , и белого шума  $n(t)$ , т. е.

$$x(t) = s_j(t, \tau_{0j}) + n(t), \quad t \in [T_1; T_2], \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

При этом априори неизвестно, какой из сигналов:  $s_1(t, \tau_{01})$  или  $s_2(t, \tau_{02})$ , присутствует в наблюдаемых данных (7). Здесь  $[T_1; T_2]$  — интервал наблюдения, включающий в себя интервалы временной локализации  $[T_{11}; T_{21}]$  и  $[T_{12}; T_{22}]$  различаемых сигналов (1).

Тогда задача различения сигналов, искаженных модулирующей помехой, сводится к следующему. На основе принимаемой реализации наблюдаемых данных  $x(t)$  (7) и имеющейся априорной информации о свойствах сигнала и шума, необходимо определить, какой из сигналов —  $s_1(t, \tau_{01})$  или  $s_2(t, \tau_{02})$ , присутствует на входе приемника. Иными словами, следует определить, на каком из временных интервалов —  $[T_{11}; T_{21}]$  или  $[T_{12}; T_{22}]$ , присутствует принимаемый сигнал (1).

Рассмотрим алгоритмы различения сигналов (1), искаженных модулирующей помехой, исследуем характеристики эффективности этих алгоритмов.

## 2. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАЗЛИЧЕНИЯ

На практике синтез устройств различения сигналов часто выполняют без учета модулирующей помехи, т. е. при синтезе предполагают, что модулирующая помеха отсутствует. Это позволяет упростить структуру синтезируемого алгоритма различения и уменьшить аппаратные и вычислительные затраты при его практической реализации. Однако получаемый при этом алгоритм различения уже не будет оптимальным при наличии модулирующей помехи. Назовем такой алгоритм *квазиоптимальным*.

**Алгоритм различения.** Рассмотрим квазиоптимальный алгоритм различения сигналов  $s_j(t, \tau_{0j})$  (1), наблюдаемых на фоне белого шума  $n(t)$ . При синтезе квазиоптимального алгоритма будем считать, что модулирующая помеха  $\xi_0(t)$  отсутствует (т. е.  $k = 0$ ), а различению подлежат неискаженные прямоугольные импульсные сигналы  $s_{0j}(t, \tau_{0j})$  (5).

Рассмотрим симметричную систему сигналов, когда априорные вероятности  $p_1$  и  $p_2$  приема каждого из двух различаемых сигналов  $s_1(t, \tau_{01})$  и  $s_2(t, \tau_{02})$  одинаковы и равны  $p_1 = p_2 = 1/2$ . При этом энергии неискаженных сигналов (5) также одинаковы и равны  $E = a_0^2 \gamma_0$ . Поэтому для синтеза квазиоптимального алгоритма различения воспользуемся *методом максимального правдоподобия* (МП) [1, 2, 3 и др.].

Согласно методу МП [2], для различения сигналов (5) необходимо на основе принимаемой смеси сигнала и шума  $x(t)$  (7) формировать функционалы

$$M_j(\tau_j) = \frac{2}{N_0} \int_{T_{1j}}^{T_{2j}} x(t) s_{0j}(t, \tau_j) dt = \frac{2}{N_0} \int_{\tau_j - \gamma_0/2}^{\tau_j + \gamma_0/2} x(t) dt, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

как функции возможных значений  $\tau_j \in [\Lambda_{1j}; \Lambda_{2j}]$  времени прихода различаемых сигналов. Отметим, что каждый из функционалов  $M_{0j}(\tau_j)$ ,  $j = 1, 2$  (8) представляет собой логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР), записанный (с точностью до несущественного постоянного слагаемого) для случая приема неискаженного сигнала  $s_{0j}(t, \tau_{0j})$  (5) на фоне белого шума  $n(t)$  [2, 3].

На основе функционалов  $M_j(\tau_j)$  (8) следует определить величины

$$M_j^* = \sup M_j(\tau_j), \quad \tau_j \in [\Lambda_{1j}; \Lambda_{2j}], \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

абсолютных максимумов этих функционалов в пределах соответствующих априорных интервалов  $\tau_j \in [\Lambda_{1j}; \Lambda_{2j}]$  и затем сравнить их между собой. Если  $M_1^* > M_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_1$  о наличии 1-го сигнала  $s_1(t, \tau_{01})$  в наблюдаемых данных  $x(t)$  (7). Если же  $M_1^* < M_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_2$  о наличии 2-го сигнала  $s_2(t, \tau_{02})$ . Таким образом квазиоптимальный алгоритм различения сигналов (1) с учетом выражений (8), (9) можно представить в виде

$$M_1^* > M_2^* \Rightarrow H_1, \quad M_2^* > M_1^* \Rightarrow H_2. \quad (10)$$

Блок-схема квазиоптимального устройства различения, соответствующая алгоритму (8)–(10), показана на рис. 1. Здесь обозначено: И — интегратор, ЛЗ — линия задержки на время  $\gamma_0$ , “—” — вычитающее устройство (ВУ), Д — пиковый детектор, а РУ — решающее устройство.

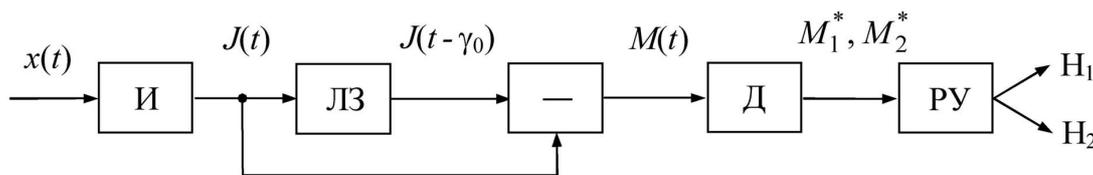


Рис. 1. Блок-схема квазиоптимального устройства различения.

Устройство различения на рис. 1 работает следующим образом. Реализация  $x(t)$  подается на вход интегратора И. На выходе интегратора формируется сигнал  $J(t) = \int_0^t x(t') dt'$ , а на выходе ВУ — сигнал  $M(t) = \int_{t-\gamma_0}^t x(t') dt' = J(t) - J(t - \gamma_0)$ . Пиковый детектор Д определяет величину абсолютного максимума сигнала  $M(t)$  на интервале времени  $[T_{11} + \gamma_0; T_{21}]$  и принимает ее в качестве величины  $M_1^*$ . Затем пиковый детектор определяет величину абсолютного максимума сигнала  $M(t)$  на интервале времени  $[T_{12} + \gamma_0; T_{22}]$  и принимает ее в качестве величины  $M_2^*$ . Решающее устройство РУ производит сравнение величин  $M_1^*$  и  $M_2^*$  между собой. Если  $M_1^* > M_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_1$  о наличии 1-го сигнала  $s_1(t, \tau_{01})$ . Если  $M_1^* < M_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_2$  о наличии 2-го сигнала  $s_2(t, \tau_{02})$ .

Исследуем характеристики алгоритма (10) при различении сигналов  $s_j(t, \tau_{0j})$  (1), искаженных модулирующей помехой и наблюдаемых на фоне аддитивного белого шума  $n(t)$ . Учтем, что характеристики алгоритма (10) определяется статистическими свойствами функционалов (решающих статистик)  $M_j(\tau_j)$  (8). Поэтому рассмотрим вначале характеристики функционалов (8).

#### Характеристики решающих статистик алгоритма различения.

В силу гауссовости модулирующей помехи  $\xi_0(t)$  и аддитивного шума  $n(t)$  случайный процесс  $x(t)$  (7) также является гауссовским. Поэтому функционалы  $M_j(\tau_j)$  (8), как интегралы от наблюдаемых данных  $x(t)$ , также являются гауссовскими случайными процессами. Тогда для полного статистического описания случайных процессов  $M_j(\tau_j)$  достаточно задавать их математические ожидания и корреляционные функции [1].

Обозначим  $S_{jl}(\tau_j) = \langle M_j(\tau_j) | H_l \rangle$ ,  $j = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$  — регулярные составляющие (математические ожидания) функционалов  $M_j(\tau_j)$  (8) при справедливости гипотезы  $H_l$  о наличии сигнала  $s_l(t, \tau_{0l})$  (1) в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Здесь  $\langle \rangle$  означает усреднение по реализациям случайного процесса при фиксированных параметрах сигнала и шума. Усредняя функционалы  $M_j(\tau_j)$  (8) по реализациям при фиксированных гипотезах  $H_l$ , при  $j = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$  получаем

$$S_{jl}(\tau_j) = 0, \text{ где } j \neq l,$$

$$S_{jj}(\tau_j) = A_S \begin{cases} 1 - |\tau_j - \tau_{0j}|/\gamma_0, & \text{при } |\tau_j - \tau_{0j}| < \gamma_0; \\ 0, & \text{при } |\tau_j - \tau_{0j}| \geq \gamma_0; \end{cases} \quad A_S = z_0^2. \quad (11)$$

Здесь величина  $z_0^2$  определяется как

$$z_0^2 = 2E_0/N_0 = 2a_0^2\gamma_0/N_0, \quad (12)$$

т. е. равна отношению энергии  $E_0 = a_0^2\gamma_0$  неискаженной компоненты (5) различаемых сигналов (1) к спектральной плотности  $N_0/2$  аддитивного шума  $n(t)$ .

Обозначим  $N_{jl}(\tau_j) = M_j(\tau_j) - \langle M_j(\tau_j) | H_l \rangle$ ,  $j = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$  — случайные составляющие функционалов  $M_j(\tau_j)$  (8) при справедливости гипотезы  $H_l$  о наличии сигнала  $s_l(t, \tau_{0l})$  (1) в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Случайные составляющие  $N_{jl}(\tau_j)$  являются гауссовскими случайными процессами, причем  $\langle N_{jl}(\tau_j) \rangle = 0$ . Корреляционные функции  $K_{jl}(\tau_{1j}, \tau_{2j}) = \langle N_{jl}(\tau_{1j})N_{jl}(\tau_{2j}) \rangle$ ,  $j = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$  случайных составляющих  $N_{jl}(\tau_j)$  при выполнении (4) аналогично [4, 5] равны

$$K_{jl}(\tau_{1j}, \tau_{2j}) = \sigma_N^2 \begin{cases} 1 - \frac{|\tau_{1j} - \tau_{2j}|}{\gamma_0}, & \text{при } |\tau_{1j} - \tau_{2j}| < \gamma_0; \\ 0, & \text{при } |\tau_{1j} - \tau_{2j}| \geq \gamma_0; \end{cases} \quad \text{где } j \neq l,$$

$$K_{jj}(\tau_{1j}, \tau_{2j}) = \begin{cases} \sigma_S^2 \begin{cases} 1 - \frac{|\tau_{1j} - \tau_{2j}|}{\gamma_0} - \frac{\sigma_S^2 - \sigma_N^2}{\sigma_S^2} \min\left(\frac{|\tau_{1j} - \tau_{0j}|}{\gamma_0}, \frac{|\tau_{2j} - \tau_{0j}|}{\gamma_0}\right), & \text{если } (\tau_{1j} - \tau_{0j})(\tau_{2j} - \tau_{0j}) \geq 0; \\ 1 - \frac{|\tau_{1j} - \tau_{2j}|}{\gamma_0}, & \text{если } (\tau_{1j} - \tau_{0j})(\tau_{2j} - \tau_{0j}) < 0; \end{cases} \\ \sigma_N^2 \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau_{1j} - \tau_{2j}|}{\gamma_0}\right), & \text{при } |\tau_{1j} - \tau_{2j}| < \gamma_0, \max(|\tau_{1j} - \tau_{0j}|, |\tau_{2j} - \tau_{0j}|) < \gamma_0; \\ 0, & \text{при } |\tau_{1j} - \tau_{2j}| \geq \gamma_0; \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

где  $\sigma_N^2 = z_0^2$ ,  $\sigma_S^2 = z_0^2[1 + q_0g(0)]$ ,  $g(0) = 2G_0(0)/N_{\xi 0}$  — значение нормированной спектральной плотности модулирующей помехи на частоте  $\omega = 0$ , а

$$q_0 = N_{\xi}/N_0 = a_0^2 k^2 N_{\xi 0}/N_0 \quad (14)$$

— отношение интенсивности  $N_{\xi}/2$  искаженной компоненты (6) различаемых сигналов (1) к спектральной плотности  $N_0/2$  аддитивного шума  $n(t)$ .

Согласно (11), (13), отношение сигнал-шум (ОСШ)  $z^2$  на выходе устройства квазиоптимального различения равно [2]

$$z^2 = \frac{S_{jj}^2(\tau_{0j})}{K_{jj}(\tau_{0j}, \tau_{0j})} = \frac{A_S^2}{\sigma_S^2} = \frac{z_0^2}{1 + q_0 g(0)}, \quad (15)$$

где  $z_0^2$  определяется из (12), а  $q_0$  — из (14).

**Характеристики алгоритма различения.** Эффективность алгоритма различения сигналов характеризуют средней вероятностью ошибки различения  $P_E$  [2, 3]. Среднюю вероятность ошибки  $P_E$  для квазиоптимального алгоритма различения (10) можно представить в виде  $P_E = p_1 P_{21} + p_2 P_{12}$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — априорные вероятности приема сигналов  $s_1(t, \tau_{01})$  и  $s_2(t, \tau_{02})$  соответственно,  $P_{21}$  — вероятность вынесения решения в пользу гипотезы  $H_2$  о приеме 2-го сигнала  $s_2(t, \tau_{02})$  при условии, что на самом деле справедлива гипотеза  $H_1$  о наличии 1-го сигнала  $s_1(t, \tau_{01})$ , а  $P_{12}$  — вероятность вынесения решения в пользу гипотезы  $H_1$  о приеме 1-го сигнала  $s_1(t, \tau_{01})$  при справедливости гипотезы  $H_2$  о наличии 2-го сигнала  $s_2(t, \tau_{02})$ . Вероятности  $P_{21}$  и  $P_{12}$  имеют смысл условных вероятностей ошибок различения при справедливости гипотез  $H_1$  или  $H_2$  соответственно.

Получим выражения для условных вероятностей ошибок  $P_{21}, P_{12}$ . Учтем, что для квазиоптимального алгоритма (10) эти вероятности можно представить как  $P_{21} = P[M_2^* > M_1^* | H_1]$ ,  $P_{12} = P[M_1^* > M_2^* | H_2]$ , где  $P[A|B]$  означает вероятность события  $A$  при справедливости гипотезы  $B$ . При выполнении (2) функционалы  $M_1(\tau_1), M_2(\tau_2)$  (8) для всех возможных значений  $\tau_1 \in [\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$ ,  $\tau_2 \in [\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$  определяются как интегралы от наблюдаемых данных  $x(t)$  (7) на неперекрывающихся интервалах. Тогда при выполнении (4) случайные процессы  $M_1(\tau_1)$  и  $M_2(\tau_2)$  (8) на интервалах  $\tau_1 \in [\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$  и  $\tau_2 \in [\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$  взаимно статистически независимы. При этом величины  $M_1^*$  и  $M_2^*$  (9) абсолютных максимумов этих процессов также статистически независимы. Тогда условные вероятности ошибок для квазиоптимального алгоритма различения (10) при выполнении (4) можно представить в виде [2]

$$P_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{11}(x) dF_{21}(x), \quad P_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{22}(x) dF_{12}(x), \quad (16)$$

где  $F_{jl}(x) = P[M_{0j}^* < x | H_l]$ ,  $j = 1, 2, l = 1, 2$  — функции распределения величин  $M_j^*$  (9) абсолютных максимумов случайных процессов  $M_j(\tau_j)$  (8) при справедливости гипотез  $H_l$  о приеме  $l$ -го сигнала  $s_l(t, \tau_{0l})$ .

Найдем выражения для функций распределения  $F_{jl}(x)$ ,  $j = 1, 2, l = 1, 2$ . Учтем, что случайные процессы  $M_j(\tau_j)$  (8) являются гауссовскими и имеют условные математические ожидания  $S_{jl}(\tau_j)$  (11) и корреляционные функции  $K_{jl}(\tau_{1j}, \tau_{2j})$  (13). Общие выражения для функций распределения абсолютных максимумов гауссовских случайных процессов на произвольных областях определения найти не удастся даже в случае стационарных процессов [2, 4, 9 и др.]. Поэтому, следуя [2, 4, 6–8 и др.], будем считать, что ОСШ  $z^2$  (15) достаточно велико, так что выполняется условие

$$z^2 \gg 1. \quad (17)$$

Тогда, аналогично [2], можно показать, что для вычисления условных вероятностей ошибок  $P_{21}, P_{12}$  (16) при выполнении условия (17) достаточно использовать аппроксимации подинтегральных функций  $F_{jl}(x)$ , асимптотически точные с ростом  $x$ . Такие аппроксимации можно получить аналогично [2, 6–8], воспользовавшись результатами [4, 5].

Для этого, аналогично [2], будем считать, что протяженности  $\Gamma_1 = \Lambda_{21} - \Lambda_{11}$  и  $\Gamma_2 = \Lambda_{22} - \Lambda_{21}$  априорных интервалов  $[\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$  и  $[\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$  неизвестных временных положений различаемых сигналов (1) одинаковы, т. е.  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . При этом, следуя [2, 4, 5, 6–8], полагаем, что протяженности  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  априорных интервалов  $[\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$ ,  $[\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$  значительно больше длительности сигналов  $\gamma_0$ , т. е.

$$m = (\Lambda_{21} - \Lambda_{11})/\gamma_0 = (\Lambda_{22} - \Lambda_{12})/\gamma_0 \gg 1. \quad (18)$$

Условие (18) означает, что неопределенность временных положений различаемых сигналов (1) значительно больше длительности этих сигналов. Тогда, воспользовавшись результатами [4, 5] с учетом выражений (11), (13), аналогично [2, 6, 7] получаем

$$F_{12}(x) = F_{21}(x) \approx F_N\left(\frac{x}{\sigma_N}\right), \quad F_{11}(x) = F_{22}(x) \approx F_N\left(\frac{x}{\sigma_N}\right) F_S\left(\frac{x}{\sigma_N}\right), \quad (19)$$

где

$$F_N(u) = \exp\left[-\frac{mu}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right] \quad \text{при } u \geq 1, \quad F_N(u) = 0 \quad \text{при } u < 1;$$

$$F_S(u) = \Phi\left(\frac{u}{\kappa} - z\right) - 2 \exp\left[\frac{\psi^2 z^2}{2} + \psi z \left(z - \frac{u}{\kappa}\right)\right] \Phi\left[\frac{u}{\kappa} - z(1 + \psi)\right] +$$

$$+ \exp \left[ 2\psi^2 z^2 + 2\psi z \left( z - \frac{u}{\kappa} \right) \right] \Phi \left[ \frac{u}{\kappa} - z(1 + 2\psi) \right], \quad \kappa = \frac{\sigma_S}{\sigma_N}, \quad \psi = \frac{2\kappa^2}{1 + \kappa^2}, \quad (20)$$

а  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$  — интеграл вероятности [1, 3].

Подставляя (19), (20) в (16) находим условные вероятности ошибок  $P_{21}$  и  $P_{12}$ , которые равны между собой, т. е.  $P_{21} = P_{12}$ . Учтем, что  $p_1 + p_2 = 1$ , тогда средняя вероятность ошибки определяется как  $P_E = P_{21} = P_{12}$ . Подставляя сюда полученные выражения для вероятностей  $P_{21} = P_{12}$  и проводя аналитические преобразования, находим среднюю вероятность ошибки  $P_E$  для квазиоптимального алгоритма различения (10):

$$P_E = \frac{1}{2} [1 - Q(2m)], \quad Q(m) = \int_{-\infty}^{\infty} F_N(u) dF_S(u) =$$

$$= \frac{2\psi z}{\kappa} \exp \left( \frac{\psi^2 z^2}{2} + \psi z^2 \right) \int_1^{\infty} \exp \left[ -\frac{mu}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{u^2}{2} \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ \exp \left( -\frac{\psi zu}{\kappa} \right) \Phi \left( \frac{u}{\kappa} - z(\psi + 1) \right) - \exp \left[ \frac{3\psi^2 z^2}{2} + \psi z \left( z - \frac{2u}{\kappa} \right) \right] \Phi \left( \frac{u}{\kappa} - z(2\psi + 1) \right) \right\} dx, \quad (21)$$

где ОСШ  $z^2$  определяется из (15),  $m$  — из (18),

$$\kappa = \frac{\sigma_S}{\sigma_N} = \sqrt{1 + q_0 g(0)}, \quad \psi = \frac{2\kappa^2}{1 + \kappa^2} = 2 \frac{1 + q_0 g(0)}{2 + q_0 g(0)}. \quad (22)$$

Согласно [2], выражение (21) является асимптотически точным, его точность возрастает с увеличением значений  $m$  и  $z^2$ .

Исследуем вероятность ошибки  $P_E$  для квазиоптимального алгоритма (10). На рис. 2 штриховыми линиями показаны зависимости средней вероятности ошибки  $P_E$  (21) для квазиоптимального алгоритма (10) от отношения  $q_0$  при  $m = 20$ ,  $g(0) = 1$  и при различных фиксированных значениях  $z_0$ . Кривая 1 на рис. 2 соответствует  $z_0 = 5$ , кривая 2 —  $z_0 = 7$ , кривая 3 —  $z_0 = 8$ , кривая 4 —  $z_0 = 9$ , а кривая 5 —  $z_0 = 10$ . На рис. 3 штриховыми линиями показаны аналогичные зависимости вероятности ошибки  $P_E$  от отношения  $z_0$  при  $m = 20$ ,  $g(0) = 1$  и при различных значениях  $q_0 > 0$ . Кривая 1 на рис. 3 соответствует  $q_0 = 0.5$ , кривая 2 —  $q_0 = 1$ , кривая 3 —  $q_0 = 1.5$ , кривая 4 —  $q_0 = 2$ , а кривая 5 —  $q_0 = 2.5$ . Там же для сравнения пунктирной линией нанесена зависимость вероятности  $P_E$  от отношения  $z_0$  при  $q_0 = 0$ , когда модулирующая помеха отсутствует.

Отметим, что при фиксированной спектральной мощности шума  $N_0/2$  величина  $z_0^2$  (12) определяет энергию неискаженной компоненты (5), а величина  $q_0$  (14) — интенсивность искаженной компоненты (6) сигнала (1). При этом величина  $q_0$  возрастает с увеличением интенсивности модулирующей помехи (коэффициента модуляции  $k$ ).

Из рис. 2, 3 следует, что вероятность ошибки  $P_E$  для квазиоптимального алгоритма различения (10) уменьшается с ростом величины  $z_0$ , т. е. с увеличением энергии неискаженной компоненты (5) сигнала (1). Воздействие модулирующей помехи (случай  $q_0 > 0$ ) приводит к увеличению средней вероятности ошибки  $P_E$  квазиоптимального алгоритма различения (10) по сравнению со случаем  $q_0 = 0$  отсутствия модулирующей помехи. При этом с ростом интенсивности модулирующей помехи (с ростом отношения  $q_0$ ) вероятность ошибки  $P_E$  возрастает, причем это возрастание тем сильнее, чем больше энергия неискаженной компоненты сигнала (больше величина  $z_0$ ).

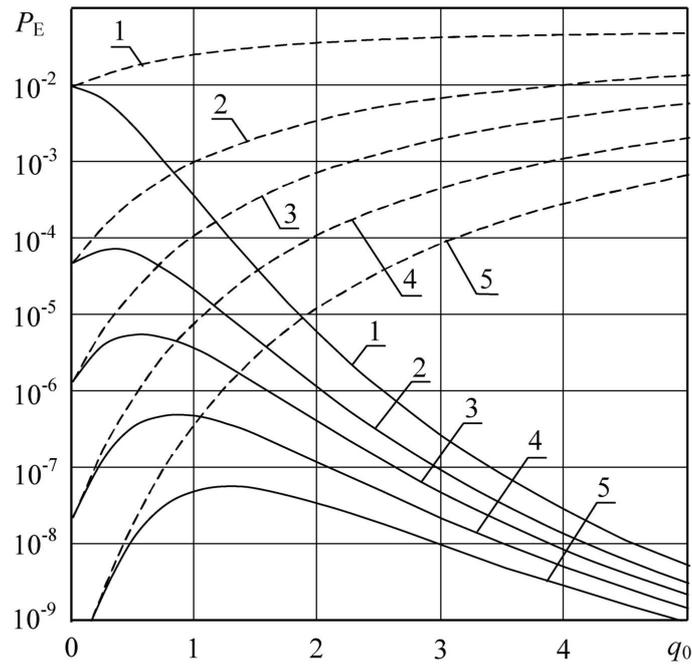


Рис. 2. Средняя вероятность ошибки различения. 1 –  $z_0 = 5$ , 2 –  $z_0 = 7$ , 3 –  $z_0 = 8$ , 4 –  $z_0 = 9$ , 5 –  $z_0 = 10$ .

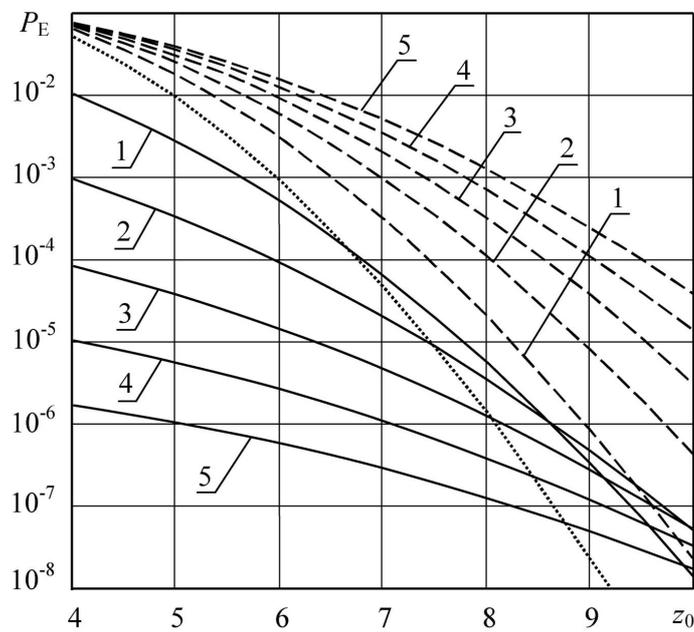


Рис. 3. Средняя вероятность ошибки различения. 1 –  $q_0 = 0.5$ , 2 –  $q_0 = 1$ , 3 –  $q_0 = 1.5$ , 4 –  $q_0 = 2$ , 5 –  $q_0 = 2.5$ .

Для уменьшения вероятности ошибки различения  $P_E$  при воздействии модулирующей помехи следует использовать оптимальный алгоритм различения, рассмотренный далее.

### 3. ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАЗЛИЧЕНИЯ

Одной из причин снижения эффективности квазиоптимального алгоритма (10) при воздействии модулирующей помехи является то, что он рассчитан на различение сигналов (5), неискаженных модулирующей помехой. Рассмотрим теперь алгоритм различения, рассчитанный на прием сигналов (1), искаженных модулирующей помехой. Назовем такой алгоритм различения *оптимальным*.

**Синтез алгоритма различения.** Для синтеза оптимального алгоритма различения воспользуемся методом максимального правдоподобия (МП) [1, 2]. В отличие от квазиоптимального алгоритма (10), при синтезе оптимального алгоритма будем считать, что различению подлежат сигналы  $s_j(t, \tau_{0j})$  (1), искаженные модулирующей помехой.

Согласно методу МП [2], по принятой реализации наблюдаемых данных  $x(t)$  (7) необходимо для каждого из различаемых сигналов  $s_j(t, \tau_{0j})$ ,  $j = 1, 2$  формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП)  $L_j(\tau_j)$ , как функцию возможных значений  $\tau_j \in [\Lambda_{1j}; \Lambda_{2j}]$  неизвестных временных положений сигналов. При выполнении (4) с точностью до несущественного постоянного слагаемого получаем [4, 5]

$$L_j(\tau_j) = \frac{1}{N_0} \int_{\tau_j - \gamma_0/2}^{\tau_j + \gamma_0/2} \left[ \frac{y^2(t)}{2} + \frac{2a_0 x(t)}{1 + q_0 g(0)} \right] dt, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t - t') dt', \quad (23)$$

$j = 1, 2$ . Здесь функция  $y(t)$  является откликом линейного фильтра с импульсной характеристикой  $h(u)$  на наблюдаемые данные  $x(t)$ , причем передаточная функция этого фильтра  $H(\omega)$ , которая является преобразованием Фурье от импульсной характеристики  $h(t)$ , удовлетворяет условию [4, 5]

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2G(\omega)}{N_0 + 2G(\omega)} = \frac{q_0 g(\omega/\Omega_0)}{1 + q_0 g(\omega/\Omega_0)}, \quad (24)$$

где  $G(\omega) = a_0^2 k^2 G_0(\omega)$  — спектральная плотность случайного  $\xi(t) = a_0 k \xi_0(t)$ , определяющего искаженную компоненту (6) сигналов (1),  $g(x) = 2G_0(x\Omega_0)/N_{\xi_0}$  — функция, характеризующая форму спектральной плотности (3) модулирующей помехи  $\xi_0(t)$ , а величина  $q_0$  определяется из (14). Отметим, что условие (24) определяет модуль  $|H(\omega)|$  передаточной функции  $H(\omega)$ , т. е. амплитудно-частотную характеристику фильтра. При этом на фазу передаточной функции  $H(\omega)$  (т. е. на фазочастотную характеристику фильтра) ограничений не накладываем, поэтому она может быть выбрана произвольно, исходя из критерия простоты практической реализации фильтра.

Далее, согласно методу МП [2], следует определить величины

$$L_j^* = \sup L_j(\tau_j), \quad \tau_j \in [\Lambda_{1j}; \Lambda_{2j}], \quad j = 1, 2 \quad (25)$$

абсолютных максимумов функционалов  $L_j(\tau_j)$  (23) в пределах соответствующих интервалов  $\tau_j \in [\Lambda_{1j}; \Lambda_{2j}]$  и затем сравнить их между собой. Если  $L_1^* > L_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_1$  о наличии 1-го сигнала  $s_1(t, \tau_{01})$  в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Если же  $L_1^* < L_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_2$  о наличии 2-го сигнала  $s_2(t, \tau_{02})$ . Таким образом, оптимальный алгоритм различения сигналов (1) с учетом выражений (23)–(25) можно представить, как

$$L_1^* > L_2^* \Rightarrow H_1, \quad L_2^* > L_1^* \Rightarrow H_2. \quad (26)$$

Блок-схема оптимального устройства различения, соответствующая (26), показана на рис. 4, где обозначено:  $\Phi$  — линейный фильтр с передаточной функцией  $H(\omega)$ , удовлетворяющей условию (24), КВ — квадратор,  $Y$  — линейный усилитель с коэффициентом усиления  $\alpha \sim 4a_0/[1 + q_0g(0)]$ , “+” — сумматор, И — интегратор, ЛЗ — линия задержки на время  $\gamma_0$ , “-” — вычитающее устройство (ВУ), Д — пиковый детектор, а РУ — решающее устройство.

Устройство на рис. 4 работает следующим образом. Принимаемая реализация  $x(t)$  подается на входы линейного фильтра  $\Phi$  и усилителя  $Y$ . Тогда на выходе сумматора формируется сигнал  $v(t) = y^2(t) + \alpha x(t)$ , на выходе интегратора И — сигнал  $J(t) = \int_0^t v(t') dt'$ , а на выходе

ВУ-сигнал  $L(t) = \int_{t-\gamma_0}^t v(t') dt'$ . Пиковый детектор Д определяет величину абсолютного максимума сигнала  $L(t)$  на интервале времени  $[T_{11} + \gamma_0; T_{21}]$  и принимает ее в качестве величины  $L_1^*$ . Затем пиковый детектор определяет величину абсолютного максимума сигнала  $L(t)$  на интервале времени  $[T_{12} + \gamma_0; T_{12}]$  и принимает ее в качестве величины  $L_2^*$ . Затем решающее устройство РУ сравнивает величины  $L_1^*$  и  $L_2^*$  между собой. Если  $L_1^* > L_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_1$  о наличии 1-го сигнала  $s_1(t, \tau_{01})$ . Если же  $L_1^* < L_2^*$ , то выносится решение в пользу гипотезы  $H_2$  о наличии 2-го сигнала  $s_2(t, \tau_{02})$ .

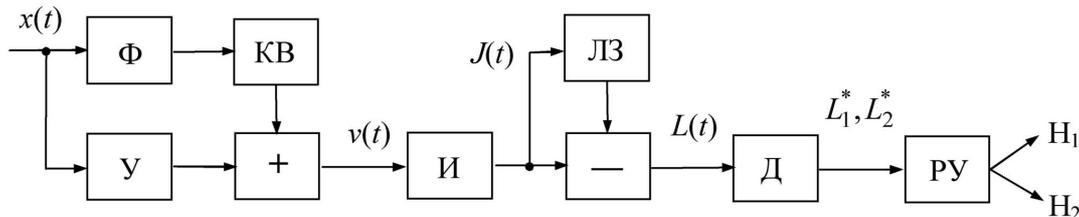


Рис. 4. Блок-схема оптимального устройства различения.

Исследуем характеристики оптимального алгоритма (26) при различении сигналов  $s_j(t, \tau_{0j})$  (1), искаженных модулирующей помехой и наблюдаемых на фоне аддитивного шума  $n(t)$ . Учтем, что характеристики алгоритма (26) определяются статистическими свойствами функционалов (решающих статистик)  $L_j(\tau_j)$  (23). Поэтому рассмотрим вначале характеристики функционалов (23).

#### Характеристики решающих статистик алгоритма различения.

Учтем, что в силу гауссовости модулирующей помехи  $\xi_0(t)$  и аддитивного шума  $n(t)$  случайный процесс  $x(t)$  (7) является гауссовским. При этом случайный процесс  $y(t)$  (23) является асимптотически гауссовским при  $\mu_0 \rightarrow \infty$  [4] и при выполнении условия (4) его можно считать приближенно гауссовским. Поэтому функционалы  $L_j(\tau_j)$  (23) также являются приближенно гауссовскими случайными процессами при выполнении (4). Тогда для статистического описания случайных процессов  $L_j(\tau_j)$  достаточно задавать только их математические ожидания и корреляционные функции [1].

Обозначим  $S_{jl}(\tau_j) = \langle L_j(\tau_j) | H_l \rangle$ ,  $j = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$  — регулярная составляющая (математическое ожидание)  $j$ -го функционала  $L_j(\tau_j)$  (23) при справедливости гипотезы  $H_l$  о наличии сигнала  $s_l(t, \tau_{0l})$  (1) в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Усредняя функционалы  $L_j(\tau_j)$  (23) по реализациям при различных гипотезах  $H_l$ , получаем, что регулярные составляющие  $S_{jl}(\tau_j)$  с точностью до несущественного постоянного слагаемого  $A_N$  определяются из (11), где следует

полагать

$$A_N = \mu_0 q_0 \int_0^\infty \frac{g(x) dx}{1 + q_0 g(x)}, \quad A_S = \mu_0 q_0^2 \int_0^\infty \frac{g^2(x) dx}{1 + q_0 g(x)} + \frac{z_0^2 [2 + q_0 g(0)]}{2[1 + q_0 g(0)]}. \quad (27)$$

Здесь величина  $\mu_0$  определяется из (4),  $q_0$  — из (14),  $z_0^2$  — из (12), а функция  $g(x) = 2G_0(x\Omega_0)/N_{\xi_0}$  определяет форму спектральной плотности (3) модулирующей помехи  $\xi_0(t)$ .

Обозначим  $N_{jl}(\tau_j) = L_j(\tau_j) - \langle L_j(\tau_j) | H_l \rangle$ ,  $j = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$  — случайная составляющая  $j$ -го функционала  $L_j(\tau_j)$  (23) при справедливости  $l$ -й гипотезы  $H_l$  о наличии сигнала  $s_l(t, \tau_{0l})$  (1) в наблюдаемых данных  $x(t)$ . Случайные составляющие  $N_{jl}(\tau_j)$  при выполнении (4) являются приближенно гауссовскими центрированными случайными процессами, так что  $\langle N_{jl}(\tau_j) \rangle = 0$ . При выполнении условия (4) корреляционные функции  $K_{jl}(\tau_{1j}, \tau_{2j}) = \langle N_{jl}(\tau_{1j}) N_{jl}(\tau_{2j}) \rangle$ ,  $j = 1, 2$ ,  $l = 1, 2$  случайных составляющих  $N_{jl}(\tau_j)$  аналогично [4, 5] определяются из (13), где следует положить

$$\sigma_N^2 = \mu_0 q_0^2 \int_0^\infty \frac{g^2(x) dx}{[1 + q_0 g(x)]^2} + \frac{z_0^2}{[1 + q_0 g(0)]^2}, \quad \sigma_S^2 = \mu_0 q_0^2 + z_0^2 [1 + q_0 g(0)]. \quad (28)$$

Согласно (27), (28), отношение сигнал-шум (ОСШ)  $z^2$  на выходе оптимального устройства различения равно [2]

$$z^2 = \frac{S_{jj}^2(\tau_{0j})}{K_{jj}(\tau_{0j}, \tau_{0j})} = \frac{A_S^2}{\sigma_S^2} = \frac{\left\{ \mu_0 q_0^2 \int_0^\infty \frac{g^2(x) dx}{1 + q_0 g(x)} + \frac{z_0^2 [2 + q_0 g(0)]}{2 [1 + q_0 g(0)]} \right\}^2}{\mu_0 q_0^2 + z_0^2 [1 + q_0 g(0)]}. \quad (29)$$

Отметим, что пределы интегрирования при вычислении функционалов  $L_1(\tau_1)$  и  $L_2(\tau_2)$  (23) не перекрываются при  $\tau_1 \in [\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$ ,  $\tau_2 \in [\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$ . Тогда при выполнении (4), (2) случайные процессы  $L_1(\tau_1)$  и  $L_2(\tau_2)$  (23) на интервалах  $\tau_1 \in [\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$ ,  $\tau_2 \in [\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$  взаимно статистически независимы.

**Характеристики алгоритма различения.** Эффективность оптимального алгоритма различения (26) по-прежнему будем характеризовать средней вероятностью ошибки различения  $P_E$  [2, 3]. Следуя [2], будем считать, что ОСШ  $z^2$  (29) достаточно велико, так что выполняется условие (17). Также считаем, что протяженности априорных интервалов  $[\Lambda_{11}; \Lambda_{21}]$  и  $[\Lambda_{12}; \Lambda_{22}]$  неизвестных временных положений  $\tau_{01}$  и  $\tau_{02}$  различаемых сигналов (1) одинаковы и значительно превышают длительность  $\gamma_0$  этих сигналов, т. е. выполняется условие (18). Тогда выражения (11), (13) с учетом обозначений (27), (28), описывающие статистические характеристики функционалов  $L_j(\tau_j)$  (23), позволяют воспользоваться результатами п. 2 и записать среднюю вероятность ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма (26) в виде (21), где ОСШ  $z^2$  определяется из (29),

$$\kappa^2 = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_N^2} = \frac{\mu_0 q_0^2 + z_0^2 [1 + q_0 g(0)]}{\mu_0 q_0^2 \int_0^\infty \frac{g^2(x) dx}{[1 + q_0 g(x)]^2} + \frac{z_0^2}{[1 + q_0 g(0)]^2}}. \quad (30)$$

$$\psi = \frac{2\kappa^2}{1 + \kappa^2} = \frac{2 \{ \mu_0 q_0^2 + z_0^2 [1 + q_0 g(0)] \}}{\mu_0 q_0^2 \int_0^\infty \frac{g^2(x) \{ 1 + [1 + q_0 g(x)]^2 \} dx}{[1 + q_0 g(x)]^2} + \frac{z_0^2 \{ 1 + [1 + q_0 g(0)]^3 \}}{[1 + q_0 g(0)]^2}}.$$

Исследуем вероятность ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма (26).

На рис. 2 сплошными линиями показаны зависимости средней вероятности ошибки  $P_E$  при использовании оптимального алгоритма (26) от отношения  $q_0$  при  $m = 20$ ,  $\mu_0 = 50$  и при различных значениях  $z_0$ . Кривая 1 на рис. 2 соответствует  $z_0 = 5$ , кривая 2 —  $z_0 = 7$ , кривая 3 —  $z_0 = 8$ , кривая 4 —  $z_0 = 9$ , а кривая 5 —  $z_0 = 10$ . На рис. 3 сплошными линиями показаны зависимости вероятности ошибки  $P_E$  от отношения  $z_0$  при  $m = 20$ ,  $\mu_0 = 50$  и при различных значениях  $q_0$ . Кривая 1 на рис. 3 соответствует  $q_0 = 0.5$ , кривая 2 —  $q_0 = 1$ , кривая 3 —  $q_0 = 1.5$ , кривая 4 —  $q_0 = 2$ , а кривая 5 —  $q_0 = 2.5$ . Штриховыми линиями на рис. 2, 3 показаны соответствующие зависимости для квазиоптимального алгоритма (10). Результаты на рис. 2, 3 получены для случая полосовой модулирующей помехи, когда  $g(x) = 1$  при  $|x| \leq 1$  и  $g(x) = 0$  при  $|x| > 1$ , причем  $g(0) = 1$ .

Из рис. 2, 3 следует, что вероятность ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма различения (26) уменьшается с ростом отношения  $z_0$ , т. е. с увеличением энергии  $E$  неискаженной компоненты (5) сигнала (1). При этом с ростом отношения  $q_0$ , т. е. с увеличением интенсивности модулирующей помехи  $\xi_0(t)$ , вероятность ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма (26) уменьшается при фиксированном отношении  $z_0$ , если  $q_0$  не слишком мало, а  $z_0$  не слишком велико. Иными словами, воздействие модулирующей помехи  $\xi_0(t)$  может привести к уменьшению вероятности ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма (26). При этом, как видно из рис. 2, 3, вероятность ошибки  $P_E$  для квазиоптимального алгоритма (10) всегда возрастает при появлении модулирующей помехи. Это объясняется тем, что оптимальный алгоритм (26), в отличие от квазиоптимального алгоритма (10), использует при различении сигналов (1) не только энергию неискаженной компоненты (5), но и энергию искаженной компоненты сигнала (6), т. е. энергию модулирующей помехи  $\xi_0(t)$ .

На рис. 5 сплошными линиями показаны зависимости средней вероятности ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма (26) от отношения  $q_0$  при  $m = 10$  и при различных фиксированных значениях  $z_0$  и  $\mu_0$ . Там же штриховыми линиями приведены соответствующие зависимости для квазиоптимального алгоритма (10). Кривые 1–3 на рис. 5 соответствуют  $z_0 = 10$ , а кривые 4–6 —  $z_0 = 7$ . При этом кривые 1, 4 соответствуют  $\mu_0 = 40$ , кривые 2, 5 —  $\mu_0 = 60$ , а кривые 3, 6 —  $\mu_0 = 100$ . Кривые на рис. 5 получены для случая  $g(x) = 1$  при  $|x| \leq 1$  и  $g(x) = 0$  при  $|x| > 1$ , когда  $g(0) = 1$ .

Из рис. 5 следует, что вероятность ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма различения (26) уменьшается с ростом отношения  $\mu_0$  (4), т. е. с увеличением ширины полосы частот  $\Omega_0$  модулирующей помехи  $\xi_0(t)$ . Это объясняется тем, что с ростом отношения  $\mu_0$  возрастает средняя мощность искаженной компоненты (6), которая используется в процессе оптимального различения. Вместе с тем эффективность квазиоптимального алгоритма (10) не зависит от значения  $\mu_0$ .

Введем в рассмотрение среднюю энергию различаемых сигналов

$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} \langle s_j^2(t, \tau_{0j}) \rangle dt = E_0 + E_m, \quad (31)$$

где  $E_0$  — энергия неискаженной компоненты (5), а  $E_m$  — средняя энергия искаженной компоненты (6) различаемых сигналов (1), которые определяются как

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} s_{0j}^2(t, \tau_{0j}) dt = a_0^2 \gamma_0, \quad E_m = \int_{-\infty}^{\infty} \langle s_{mj}^2(t, \tau_{0j}) \rangle dt = \gamma_0 \sigma_\xi^2 = a_0^2 \gamma_0 k^2. \quad (32)$$

При этом дисперсия  $\sigma_\xi^2$  случайного процесса  $\xi(t)$  равна  $\sigma_\xi^2 = a_0^2 k^2$ . Обозначим

$$Z_S^2 = 2E_S/N_0 = z_0^2 (1 + k^2) \quad (33)$$

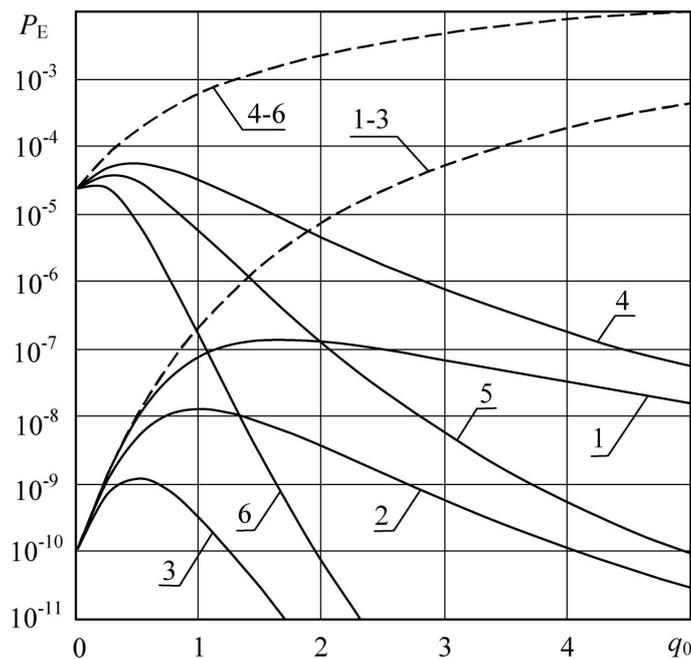


Рис. 5. Средняя вероятность ошибки различения 1, 4 —  $\mu_0 = 40$ ; 2, 5 —  $\mu_0 = 60$ ; 3, 6 —  $\mu_0 = 100$ ; 1, 2, 3 —  $z_0 = 10$ ; 4, 5, 6 —  $z_0 = 7$ .

— отношение средней энергии  $E_S$  (31) различаемых сигналов (1) к спектральной плотности  $N_0/2$  аддитивного шума, которое можно интерпретировать как среднее отношение сигнал-шум на входе приемника. Тогда

$$z_0^2 = \frac{Z_S^2}{1 + k^2}, \quad q_0 = \frac{1}{2\mu_0\Theta} \frac{Z_S^2 k^2}{1 + k^2}, \quad \text{где } \Theta = \int_0^\infty g(x) dx. \quad (34)$$

На рис. 6 сплошными линиями показаны зависимости средней вероятности ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма (26) от коэффициента модуляции  $k$  при  $m = 10$ ,  $\mu_0 = 100$  и при различных фиксированных значениях  $Z_S$  (33). Кривая 1 на рис. 6 соответствует  $Z_S = 7$ , кривая 2 —  $Z_S = 8.5$ , кривая 3 —  $Z_S = 10$ , кривая 4 —  $Z_S = 12$ . Там же штриховыми линиями приведены соответствующие зависимости для квазиоптимального алгоритма (10). Результаты на рис. 6 получены для случая  $g(x) = 1$  при  $|x| \leq 1$ ,  $g(x) = 0$  при  $|x| > 1$ , когда  $g(0) = 1$ ,  $\Theta = 1$ .

Из рис. 6 следует, что с ростом коэффициента модуляции  $k$  при фиксированной средней энергии сигнала  $E_S$  (фиксированном отношении  $Z_S$ ) вероятность ошибки различения  $P_E$  возрастает как для квазиоптимального, так и для оптимального алгоритмов (10) и (26). Это объясняется тем, что с увеличением коэффициента  $k$  при фиксированной средней энергии  $E_S$  уменьшается энергия неискаженной компоненты сигнала  $E_0$ . Вместе с тем вероятность ошибки  $P_E$  для оптимального алгоритма различения (26) с ростом коэффициента  $k$  все равно оказывается существенно меньшей, чем для квазиоптимального алгоритма (10).

Из рис. 2, 3, 5, 6 также следует, что оптимальный алгоритм различения (26) при наличии модулирующей помехи  $\xi_0(t)$  (случай  $q_0 > 0$  или  $k > 0$ ) обладает меньшей вероятностью ошибки  $P_E$  (т. е. имеет более высокую эффективность), чем квазиоптимальный алгоритм (10). При этом выигрыш оптимального алгоритма по сравнению с квазиоптимальным по вероятности ошибки  $P_E$  возрастает с увеличением интенсивности модулирующей помехи (отношения  $q_0$

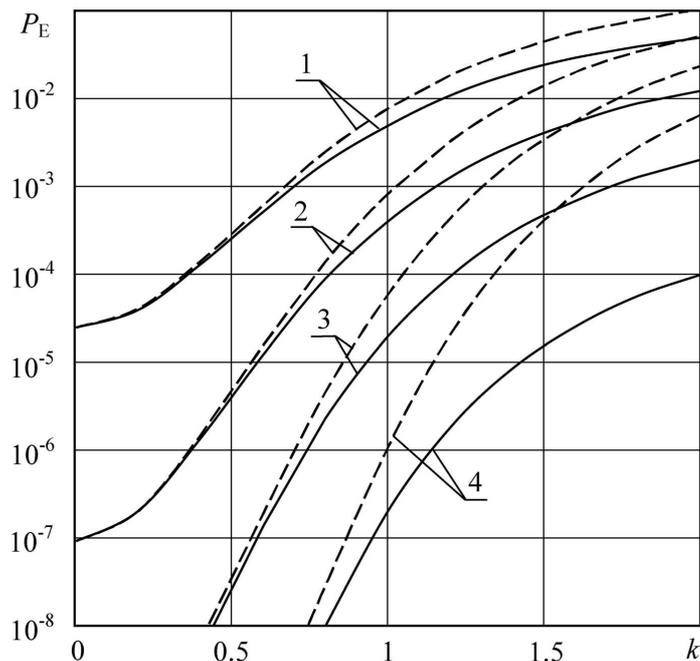


Рис. 6. Средняя вероятность ошибки различения 1 –  $Z_S = 6$ ; 2 –  $Z_S = 8.5$ ; 3 –  $Z_S = 10$ ; 4 –  $Z_S = 12$ .

(14) или коэффициента  $k$ ), с ростом энергии  $E_0$  (32) неискаженной компоненты сигнала (т. е. отношения  $z_0$  (12)) или средней энергии сигнала  $E_S$  (31) (т. е. отношения  $Z_S$  (33)), а также с увеличением ширины  $\Omega_0$  спектральной плотности модулирующей помехи (отношения  $\mu_0$  (4)).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены квазиоптимальный и оптимальный алгоритмы для различения импульсных сигналов, искаженных модулирующей помехой. Получены аналитические выражения для вероятностей ошибок различения при использовании рассмотренных алгоритмов. Показано, что применение оптимального алгоритма для различения сигналов, искаженных модулирующей помехой, приводит к меньшей вероятности ошибок, чем при использовании квазиоптимального алгоритма. Вместе с тем квазиоптимальный алгоритм различения является более простым, чем оптимальный алгоритм различения, и не требует априорной информации о свойствах модулирующей помехи.

Полученные в работе выражения для вероятностей ошибок различения позволяют сделать обоснованный вывод о целесообразности использования рассмотренных в работе алгоритмов для различения сигналов, искаженных модулирующей помехой, в зависимости от требований к эффективности алгоритма различения, а также к степени простоты его аппаратурной или программной реализации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, В. И. Статистическая радиотехника / В. И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1982. — 624 с.
2. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986. — 264 с.
3. Тихонов, В. И. Оптимальный прием сигналов / В. И. Тихонов. — М. : Радио и связь,

1983. — 320 с.

4. Трифонов, А. П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Е. П. Нечаев, В. И. Парфенов. — Воронеж : Издательство ВГУ, 1991. — 246 с.

5. Трифонов, А. П. Прием сигнала с неизвестной задержкой при наличии модулирующей помехи / А. П. Трифонов, А. В. Захаров // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 1986. — Т. 29, № 4. — С. 36–41.

6. Прибытков, Ю. Н. Пропускная способность асинхронной системы связи / Ю. Н. Прибытков, В. К. Маршаков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 2. — С. 37–44.

7. Захаров, А. В. Обнаружение флуктуирующего импульса с неизвестными временем прихода и интенсивностью / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 2. — С. 62–71.

8. Захаров, А. В. Эффективность асимптотически оптимальной оценки времени прихода флуктуирующего радиоимпульса при наличии аномальных ошибок / А. В. Захаров, А. В. Зюльков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 14–28.

9. Захаров, А. В. Распределение величины абсолютного максимума регулярного стационарного случайного процесса с релейской и гауссовской компонентами / А. В. Захаров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 13–32.

## REFERENCES

1. Tihonov V.I. Statistical Radio Engineering. [Tixonov V.I. Statisticheskaya radiotekhnika]. Moscow: Radio and communication, 1982, 624 p.

2. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Joint distinction of signals and estimation of their parameters on a noise background. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ix parametrov na fone pomex]. Moscow: Radio and communication, 1986, 264 .

3. Tihonov V.I. Optimal signal reception. [Tixonov V.I. Optimal'nyj priem signalov]. Moscow: Radio and communication, 1983, 320 p.

4. Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Detection of stochastic signals with unknown parameters. [Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Obnaruzhenie stohasticheskikh signalov s neizvestnymi parametrami]. Voronezh: Publishing house of Voronezh State University, 1991, 246 p.

5. Trifonov A.P., Zakharov A.V. Reception of signals with unknown delay in multiplicative noise. [Trifonov A.P., Zaxarov A.V. Priem signala s neizvestnoj zaderzhkoj pri nalichii moduliruyushhej pomexi]. *Izvestiya vuzov. Radioelektronika — Radioelectronics and Communications Systems*, 1986, vol. 29, no. 4, pp. 36–41.

6. Pribytkov Y.N., Marshakov V.K. Throughput of an asynchronous communication system. [Pribytkov Y.N., Marshakov V.K. Propusknaya sposobnost' asinkhronnoy sistemy svyazi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2011, no. 2, pp. 37–44.

7. Zakharov A.V. Detection of a fluctuated pulse with unknown time delay and intensity. [Zaxarov A.V. Obnaruzhenie fluktuiruyushhego impul'sa s neizvestnymi vremenem prixoda i intensivnost'yu]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 2, pp. 62–71.

8. Zakharov A.V., Zyulkov A.V. Efficiency of asymptotically optimal estimation of time delay of fluctuated radio impulse at presence of abnormal errors. [Zaxarov A.V., Zyl'kov A.V. Effektivnost' asimptoticheski optimal'noi ocenki vremeni prixoda fluktuiruyushhego radioimpul'sa pri nalichii anomal'nyh oshibok]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya:*

*Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2014, no. 2, pp. 14–28.*

9. Zakharov A.V. Distribution of an absolute maximum of smoothed homogeneous stochastic process with Rayleigh and Gaussian components. [Zakharov A.V. Raspredelenie velichiny absolutnogo maksimuma regul'yarnogo stacionarnogo sluchainogo processa s releevskoi i gaussovskoi komponentami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2016, no. 4, pp. 13–32.*

*Захаров Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. радиоп физики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация*

*E-mail: zakharov.vsu@mail.ru*

*Тел.: +7(473)220-89-16*

*Zakharov Alexander Victorovich, Candidate of physico-mathematical sciences, Associated Professor of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

*E-mail: zakharov.vsu@mail.ru*

*Tel.: +7(473)220-89-16*

*Маршаков Владимир Кириллович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. радиоп физики ВГУ, г. Воронеж, Российская Федерация*

*E-mail: mvk@phys.vsu.ru*

*Тел.: +7(473)220-89-16*

*Marshakov Vladimir Kirillovich, Candidate of physico-mathematical sciences, Associated Professor of the Department of Radiophysics of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

*E-mail: mvk@phys.vsu.ru*

*Tel.: +7(473)220-89-16*