УДК 004.832.38

РАЗЛОЖЕНИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА СЛОЁВ С ЦИКЛАМИ В НЕЧЕТКОЙ LP-СТРУКТУРЕ

А. Н. Зорин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.07.2016 г.

Аннотация. Нечеткий LP-вывод представляет метод интеллектуального моделирования рассуждений. Его вычислительная модель основана на исследовании структурных свойств специальной алгебраической системы – нечеткой LP-структуры. Важным звеном рассматриваемой модели была гипотеза о разложении в ряд мощности множества слоёв с циклами в нечеткой LP-структуре. В настоящей работе представляются формулировка и математическое доказательство этой гипотезы. Полученные результаты могут быть использованы при разработке интеллектуальных систем продукционного типа, работающих с неполными знаниями, а также минимизирующих количество ресурсоемких запросов о значениях атрибутов объектов предметной области.

Ключевые слова: нечеткая LP-структура, бинарное отношение, фактор-множество, комбинаторика, биномиальные коэффициенты, граф, система циклов.

DECOMPOSITION THE CARDINALITY OF SET OF LAYERS WITH CYCLES IN THE FUZZY LP-STRUCTURE

A. N. Zorin

Abstract. Fuzzy LP-inference is the method of intellectual modeling of reasonings. Its computational model is based on the research of the structural properties of special algebraic system - the fuzzy LP-structure. Earlier, the questions of implementation of computing approximate estimates of the number of layers without cycles in the fuzzy LP-inference task and the and the clustering algorithm of fuzzy knowledge were considered. The computational model used in the earlier results was based on the hypothesis of the expansion in the number series the cardinality of the set of layers with cycles in the fuzzy LP structure. This paper presents the mathematical formulation of this hypothesis in the form of theorems and its proof. Presented approach can be applied to accelerate the backward inference in production type systems of artificial intelligence.

Keywords: fuzzy LP-structure, binary relation, quotient set, combinatorics, binomial coefficients, graph, system of cycles.

ВВЕДЕНИЕ

С увеличением объемов и сложности обрабатываемой информации все более актуальным становится использование систем искусственного интеллекта [1]. При этом одной из распространенных моделей представления знаний является продукционная [2]. Алгоритмы поиска решений в таких системах основаны на механизме логического вывода. На практике существует большое число задач принятия решений в условиях неопределенности, для которых получение информации о значениях признаков классифицируемых объектов некоторой предметной области является ресурсоемкой операцией.

Такие задачи возникают, например, в сфере разведки полезных ископаемых [3]. Мероприятия по разведке месторождений включают множество этапов, такие как спутниковое зондирование, сейсморазведка, электроразведка, магниторазведка, гравиразведка, радиометрия, термометрия, разведочное бурение и т. д. Как правило, они являются дорогостоящими, проводятся разнообразными промышленными способами, и предоставляют большой объем разнородных данных, доступных для анализа и извлечения дополнительных знаний [4]. Может оказаться, что более выгодное решение состоит в том, чтобы приступить к эксплуатационному бурению при уверенности в успехе 95%, чем потратить еще значительные средства для достижения 98%-ной уверенности.

Стоимость дополнительных исследований существенна и при исследовании роботом поверхности планеты [5]. Пусть цель робота — достижение определенной скалы, однако будущий маршрут наблюдается лишь отчасти [6]. Тогда робот должен искать оптимальное решение, позволяющее достичь цели с учетом ограниченности ресурсов, доступных для дополнительной разведки местности.

С фактором ресурсоемкости операций получения данных для принятия решения связана задача минимизации числа запросов о признаках классифицируемого объекта (из некоторой предметной области) в ходе логического вывода. Данная задача является NP-трудной [7]. Для достижения глобальной минимизации числа внешних запросов предложен общий метод LP-вывода [8]. К сожалению, он обладает экспоненциальной вычислительной сложностью относительно числа атомарных фактов в базе знаний. Идея кластерно-релевантного LP-вывода [9], основана на вычислении специфических оценок (показателей релевантности) для ограниченного подмножества продукций и на обобщении полученных оценок на все множество продукций. Исследования и эксперименты показывают [10], что при использовании метода LP-вывода, по сравнению с обычным обратным выводом, снижение числа внешних запросов составляет в среднем 15–20%.

Ранее обсуждались вопросы реализации вычисления приближенной оценки числа слоев без циклов в задаче нечеткого LP-вывода и способ кластеризации нечетких знаний [11]. Также была предложена основанная на нем программная реализация стохастического поиска начальных прообразов [12]. Вычислительная модель, используемая в полученных ранее результатах, основывалась на представленной в [11] гипотезе о разложении в ряд мощности множества слоёв с циклами в нечеткой LP-структуре.

В настоящей работе эта гипотеза формулируется в виде теоремы и математически доказывается. Представленные результаты предназначены для итеративного анализа таких подмножеств продукций, которые наиболее существенно влияют на показатель релевантности.

1. О МЕТОДЕ НЕЧЕТКОГО *LP*-ВЫВОДА

Обозначим через X — множество объектов (ситуаций, прецедентов) некоторой предметной области. Например, в задачах машинного обучения, встречающихся в рекомендательных системах и таргетинговой рекламе, объектами являются пользователи интернет-магазинов и социальных сетей, в задачах разведки месторождений объекты — это участки недр Земли, в задачах фильтрации спама — отдельные почтовые сообщения.

Под *атрибутом* будем подразумевать результат измерения некоторой характеристики объекта, то есть отображение $feature : X \to D_{feature}$, где $D_{feature}$ — множество допустимых значений атрибута. Значениями атрибутов в прикладных задачах могут быть числовые последовательности, изображения, тексты, функции, графы, результаты запросов к базе данных и т. д.

Пусть имеется набор атрибутов $feature_1, \ldots, feature_n$ которые соответствуют характеристикам объектов $x \in X$ некоторой предметной области. Вектор $(feature_1(x), \ldots, feature_n(x)) \in D_{feature_1} \times \ldots \times D_{feature_n}$ называется атрибутным описанием объекта $x \in X$. Атрибутное описание можно отождествлять с самими объектами, т. е. $X = D_{feature_1} \times \ldots \times D_{feature_n}$

Предположим, что объекты $x \in X$ разделены некоторым образом на классы, которым соответствует конечное множество их номеров (имен, меток) Y. Пусть также задана база знаний продукционного типа, отражающая целевую зависимость — отображение $y^*(x) \in Y$.

Говоря неформально, например, применительно к задачам машинного обучения, нечеткий LP-вывод реализует процесс как можно более достоверного сопоставления произвольного объекта $x \in X$ с некоторой меткой $y^*(x) \in Y$, используя для этого как можно меньшую выборку значений из атрибутного описания объекта x.

Пусть задано конечное множество $F\{f\}$. На его основе определим атомно-порожденную ограниченную алгебраическую решетку $L = \lambda(F)$, где λ — функция-булеан [13]. На решетке зададим дополнительное бинарное отношение $R = \{r = (\tau, f) : \tau \in L, f \in F\}$, являющееся каноническим [14].

Применительно к продукционным интеллектуальным системам такое отношение R моделирует множество продукций, F (совокупность атомов решетки) соответствует множеству элементарных значений атрибутов объектов, для которых может выполняться вывод, а сама решетка L представляет множества предпосылок и заключений продукций.

Атом x решетки L называется начальным при отношении R, если в R нет ни одной пары вида (τ, x).

Обозначим множество всех начальных атомов решетки как F_{init}: $F_{init} = \{f \in F : \nexists(\tau, f) \in R, \tau \in L\}$. Также обозначим множество всех атомов решетки, не являющихся начальными: $F_{notinit} = \{f : F : \exists(\tau, f) \in R, \tau \in L\}$.

Упорядоченная пара $(\alpha, \beta) \in L$, $\alpha \in L$, $\beta \in L$ называется дистрибутивно связанной отношением R, если существует такое множество $\{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_p, \beta_p)\}$, что $\forall\, i = \overline{1, p}$ выполняется следующее условие: $\alpha_i \subseteq \alpha \wedge \beta \subseteq \beta_i \wedge ((\alpha_i = \beta_i \in L) \vee (\alpha_i, \beta_i) \in R)$.

Упорядоченная пара (ω, σ), $\omega \in L$, $\sigma \in L$ называется логически связанной отношением R, если она дистрибутивно связана отношением R, либо существует упорядоченный набор $(\omega, \gamma_1, \ldots, \gamma_l, \sigma)$, $\gamma_i \in L$, $i = \overline{1, l}$ такой, что каждая пара в последовательности (ω, γ_1), (γ_1, γ_2),…, (γ_{l-1}, γ_l), (γ_i, σ) дистрибутивно связана отношением R. Если пара (ω, σ) логически связана отношением R, то σ является образом ω при отношении R, а ω — прообразом σ при отношении R. Прообраз в атомно-порожденной решетке называется начальным, если все его атомы являются начальными (при отношении R).

Обозначим символом A фактор-множество — разбиение бинарного отношения R на классы эквивалентности относительно уникальных правых частей его элементов, то есть $r, t \in R$, $r = (\tau, f)$, $t = (\gamma, g)$, тогда $r \sim t \iff f = g$

$$A = R/\!\sim \iff A = \{\alpha_f = \{r = (\tau, f) : r \in R\} : f \in F\}. \qquad (1)$$

Фактор-множество служит основой для структурного расслоения [14] исходного отношения R на виртуальные слои (частичные отношения).

Выборка по одному элементу из каждого класса эквивалентности $\alpha \in A$ называется слоем отношения R. .

Нахождение прообразов основано на анализе слоёв. Слой либо содержит прообраз, либо его элементы образуют цикл и не могут содержать прообраз [14].

Обозначим $S(A) : A \to \lambda(R)$ — отображение, переводящее фактор-множество $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ в множество всех слоев, которые A описывает:

$$S(A) = \left\{\{r_1, \ldots, r_{|A|}\} : r_i \in \alpha_i, i = \overline{1, |A|}\right\} = \cup_{(r_1, \ldots, r_{|A|}) \in \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_{|A|}} \left\{\{r_1, \ldots, r_{|A|}\}\right\}. \qquad (2)$$

Если фактор-множество A состоит из классов эквивалентности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то количество всевозможных слоев, которые можно построить на основе A, равно количеству всевозможных выборок из каждого класса эквивалентности по одному элементу, т. е. $|A| = |\alpha_1| \cdot \ldots \cdot |\alpha_n|$.

На основе бинарного отношения R построим граф $G = \{\nu\}$:

$$\nu \in G, \nu = (f, g), f, g \in F \Longleftrightarrow \exists(\tau, g) \in R : f \in \tau.$$

По графу G, используя некоторый из известных математических методов, построим множество простых циклов $H = \{h : h \subseteq G\}$. На основе отношения R и полученного множества простых циклов определим E *фундаментальную систему циклов канонического бинарного отношения*. Построение заключается в том, что на основе дуг $\nu = (f, g)$, $f, g \in F$, образующих элементы множества простых циклов $H = \{h\}$, определяется множество $E = \{e_1, \ldots, e_{|S|}\}$, состоящее из подмножеств отношения R, таких, что

$$\forall h_i = \{\nu = (f, g) \in G\} : e_i = \{(\tau, g) \in R : f \in \tau\}, E = \{e_i\}. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon \subseteq E$, $\varepsilon = \{e \in E\}$ — подмножество системы циклов канонического бинарного отношения R, $\dot{\varepsilon} = \cup_{e \in \varepsilon} \cup_{r \in e} r$ — объединение всех пар бинарного отношения, формирующих элементы данного подмножества.

Сужение фактор-множества A, описывающее всевозможные слои, которые содержат только циклы из заданного множества ε, определяется следующими отображениями:

$$\theta(\alpha, \varepsilon) = \begin{cases} \alpha \cap \dot{\varepsilon}(\varepsilon) & \text{если } \alpha \cap \dot{\varepsilon}(\varepsilon) \neq \varnothing; \\ \alpha & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\Theta(A, \varepsilon) = \{\theta(\alpha_1, \varepsilon), \ldots, \theta(\alpha_{|A|})\}. \tag{4}$$

Определим специальные отображения, которые служат основой для кластеризации слоёв при поиске прообразов в стохастическом нечетком LP-выводе [12].

Обозначим $S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)$ — множество всевозможных слоев, включающих в себя все циклы из множества $\varepsilon \subseteq E$. При этом выполняются соотношения

$$S_{all}(A, \Theta, \varepsilon) = S(\Theta(A, \varepsilon)), \varepsilon \subseteq E, \tag{5}$$

где S определено в (2);

$$|S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)| = |\theta(\alpha_1, \varepsilon)| \cdot \ldots \cdot |\theta(\alpha_{|A|})|, A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{|A|}\}. \tag{6}$$

Следует обратить внимание, что если $\varepsilon \neq E$, то слои из $S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)$ могут включать в себя не только циклы из множества ε, но и циклы из множества $E \setminus \varepsilon$. То есть из того, что слой включает в себя некоторое известное подмножество циклов, не следует, что слой не содержит какие-либо еще циклы. Однако есть единственный случай, когда исходя из определения можно утверждать, что слой не включает в себя иных циклов, кроме заданных. Это случай, когда слой содержит все циклы (из $\varepsilon = E$ следует, что $E \setminus \varepsilon = \varnothing$)

Введем $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon)$ — множество всевозможных слоев, включающих в себя произвольное подмножество циклов из множества $\varepsilon \subseteq E$:

$$S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon) = \{l | \, \exists\, \alpha \subseteq \varepsilon : \alpha \neq \varnothing \wedge l \in S(\Theta(A, \alpha))\}. \tag{7}$$

Обозначим также $S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, E)$ — множество всевозможных слоев, которые содержат все циклы ε, и не включают циклов из $E \setminus \varepsilon$, то есть

$$S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, E) = \{l \in S(A) | \, (\forall e \in \varepsilon : \; e \subseteq l) \wedge (\nexists g \in E \setminus \varepsilon : g \subseteq l \wedge g \neq \varnothing)\}. \tag{8}$$

Рассмотрим свойства данных отображений.

Утверждение 1. Для любых $e_1, e_2, E : e_1 \subseteq E, e_2 \subseteq E$, $e_1 \neq e_2$ выполняется

$$S_{only}(A, \Theta, \{e_1\}, E) \cap S_{only}(A, \Theta, \{e_2\}, E) = \varnothing. \tag{9}$$

Доказательство. Для $e_1 \cap e_2 = \varnothing$ доказательство вытекает непосредственно из определения. Рассмотрим случай $e_1 \cap e_2 \neq \varnothing$.

Предположим противное: $S_{only}(A, \Theta, \{e_1\}, E) \cap S_{only}(A, \Theta, \{e_2\}, E) \neq \varnothing$.

Тогда $\exists\, l : l \in S_{only}(A, \Theta, \{e_1\}, E) \wedge l \in S_{only}(A, \Theta, \{e_2\}, E)$, следовательно, $e_1 \subseteq l \wedge e_2 \subseteq l$.

Но из того, что $e_1 \neq e_2$, следует $(E \setminus \{e_1\}) \cap \{e_2\} = \{e_2\} \neq \varnothing \wedge e_2 \subseteq l$, а это невозможно по определению $S_{only}(A, \Theta, \{e_1\}, E)$. $\square$

Утверждение 2. Для любого $\varepsilon \subseteq E$, $\varepsilon \neq \varnothing$ справедливо равенство

$$S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, \varepsilon) = S_{all}(A, \Theta, \varepsilon). \tag{10}$$

Доказательство. Очевидно, что $\varepsilon \setminus \varepsilon = \varnothing$. Кроме того, по определению слои из множества $S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, \varepsilon)$ не включают в себя никаких иных циклов, кроме тех, что принадлежат ε. А это положение соответствует определению $S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)$. $\square$

Если $\varepsilon \subseteq E$, $\varepsilon \neq \varnothing$, то, чтобы получить множество всех слоев, которые включают в себя все циклы из ε, и не содержат никаких циклов из $E \setminus \varepsilon$, нужно выполнить следующее. Из $S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)$ — множества всех слоев, включающих в себя все циклы из множества ε, удалить все слои, содержащие циклы из множества $E \setminus \varepsilon$. Таким образом, имеют место следующие соотношения:

$$S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, E) = S_{all} \setminus \left(\bigcup_{\substack{\alpha \subseteq E \setminus \varepsilon \\ \alpha \neq 0}} S_{only}(A, \Theta, \varepsilon \cup \alpha, R) \right);$$

$$|S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, E)| = |S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)| - \left(\sum_{\substack{\alpha \subseteq E \setminus \varepsilon \\ \alpha \neq \varnothing}} |S_{only}(A, \Theta, \varepsilon \cup \alpha, E)| \right). \tag{11}$$

Теперь, используя введенные обозначения, можно выразить значение общего количества слоев с циклами $|S_{subsets}(A, \Theta, E)|$ в терминах мощностей множеств S_{all} (5) и $S_{subsets}$ (7):

$$S_{subsets}(A, \Theta, E) = \bigcup_{\substack{\alpha \subseteq E \setminus \varepsilon \\ \alpha \neq 0}} S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, R);$$

$$|S_{subsets}(A, \Theta, E)| = \sum_{\substack{\alpha \subseteq E \setminus \varepsilon \\ \alpha \neq \varnothing}} |S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, E)|. \tag{12}$$

2. СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА СЛОЕВ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ВСЕ ПОДМНОЖЕСТВА ЦИКЛОВ

Ранее [11] была сформулирована гипотеза об общем виде выражения значения $S_{subsets}(\cdot)$ (7, 12) через сумму ряда значений $|S_{all}(\cdot)|$ (6):

$$|S_{subsets}(A, \Theta, E)| = \sum_{x_1 \in E} |S_{all}(A, \Theta, \{x_1\})| +$$
$$+ \sum_{\substack{\{x_1, x_2\} \subset E, \\ x_1 \neq x_2}} |S_{all}(A, \Theta, \{x_1, x_2\})| + \ldots + (-1)^{l+1} |S_{all}(A, \Theta, \{x_1, \ldots, x_l\})| =$$

$$= \sum_{\substack{\varepsilon \subseteq E \\ \varepsilon \neq \varnothing}} (-1)^{|\varepsilon|+1} |S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)|. \quad (13)$$

Далее в настоящей работе эта гипотеза будет сформулирована в виде теоремы и математически доказана. Общая схема доказательства такова. Вначале сформулируем несколько дополнительных свойств отображений $S_{subsets}$ (7, 12) и S_{only} (11), на основании которых перепишем выведенное в выражение $S_{subsets}$ (13). Затем сформулируем представленную гипотезу в виде теоремы и докажем ее на основании установленных свойств и метода математической индукции.

Лемма 1. Для произвольного $\varepsilon \subset E$, любого $x \in E$: $x \notin \varepsilon$ справедливы следующие равенства:

$$S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon) \cap S_{only}(A, \Theta, \{x\}, \varepsilon \cup \{x\}) = \varnothing; \quad (14)$$

$$S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon \cup \{x\}) = S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon) \cup S_{only}(A, \Theta, \{x\}, \varepsilon \cup \{x\}); \quad (15)$$

$$|S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon \cup \{x\})| = |S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon)| + |S_{only}(A, \Theta, \{x\}, \varepsilon \cup \{x\})|. \quad (16)$$

Доказательство. По определению (7) $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon \cup \{x\})$ является множеством слоёв, включающих в себя всевозможные подмножества циклов из $\varepsilon \cup \{x\}$. В свою очередь, $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon)$ — множество слоёв, включающих в себя всевозможные подмножества циклов из ε. В силу определения, эти слои также содержат и всевозможные комбинации подмножеств циклов из ε с циклами из $E \setminus \varepsilon$. По определению, слои $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon)$ также включают и всевозможные комбинации своих подмножеств циклов (из ε) с циклом x. Однако, в силу (9), а также того факта, что любой слой из $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon)$ будет содержать хотя бы один цикл из ε, и также в силу $x \notin \varepsilon$, множество $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon)$ не будет содержать слоёв из $S_{only}(A, \Theta, \{x\}, \varepsilon \cup \{x\})$, т. е. слоёв, включающих в себя только цикл x, и не включающих ни одного цикла из ε. Таким образом, на основе (7), (8) имеем

$$S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon) = \{l \, \exists \, \alpha \subseteq \varepsilon : \alpha \neq \varnothing \wedge l \in S(\Theta(A, \alpha))\};$$

$$S_{only}(A, \Theta, \varepsilon \cup \{x\}) = \{l \in S(A) | \, (x \subseteq l) \wedge (\nexists g \in \varepsilon = \varepsilon \setminus \{x\} : g \subseteq l \wedge g \neq \varnothing)\};$$

$$\nexists l \in S(A) : (\nexists g \in \varepsilon : g \subseteq l \wedge g \neq \varnothing) \wedge (\exists \, \alpha \subseteq \varepsilon : \alpha \neq \varnothing \wedge l \in S(\Theta(A, \alpha)))\,.$$

Следовательно, $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon) \cap S_{only}(A, \Theta, \{x\}, \varepsilon \cup \{x\}) = \varnothing$. Этот факт доказывает выражение (14).

Далее заметим, что при добавлении к $S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon)$ множества всех слоёв, включающих в себя только цикл x, и не включающих никаких циклов их ε, т. е. множества $S_{only}(A, \Theta, \{x\}, \varepsilon \cup \{x\})$, получается множество всех слоёв, содержащих всевозможные подмножества циклов из $\varepsilon \cup \{x\}$. Согласно (5), (6), (7), данное утверждение соответствует следующему равенству:

$$\begin{aligned} S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon \cup \{x\}) &= \{l | \, \exists \, \alpha \subseteq \varepsilon \cup \{x\} : \alpha \neq \varnothing \wedge l \in S(\Theta(A, \alpha))\} = \\ &= \{l | \, \exists \, \alpha \subseteq \varepsilon : \alpha \neq \varnothing \wedge l \in D \in S(\Theta(A, \alpha))\} \cup \\ &\cup \{l \in S(A) | \, (x \subseteq l) \wedge (\nexists g \in \varepsilon = \varepsilon \setminus \{x\} : g \subseteq l \wedge g \neq \varnothing)\} = \\ &= S_{subsets}(A, \Theta, \varepsilon) \cap S_{only}(A, \Theta, \{x\}, \varepsilon \cup \{x\}). \end{aligned}$$

Этот факт доказывает выражение (15). Справедливость соотношения (16) следует непосредственно из выражений (14) и (15). □

Лемма 2. Для любого множества $E \neq \varnothing$, его произвольного подмножества $\alpha \subseteq E$, $\alpha \neq \varnothing$ и произвольной функции $f(\beta)$, определенной на каждом подмножестве множества E, $f(\beta) : \lambda(E) \to \mathbb{R}$, справедливо следующее утверждение. Если $X = E \setminus \alpha$, то

$$\sum_{\substack{\beta\subseteq X \\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq X\setminus\beta \\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f\left(\underbrace{\alpha}_{\text{const}} \cup \beta \cup \gamma\right) = - \sum_{\substack{\beta\subseteq X \\ |\beta| \text{ — четное} \\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta). \qquad (17)$$

Доказательство. Выполним его методом математической индукции по величине $|X|$. При $|X| \leqslant 1$, выражение (17) вырождается в нуль. Рассмотрим случай $|X| = 2$, $X = \{a, b\}$, $E = X \cup \alpha$, $\alpha \cup X = \varnothing$:

$$\sum_{\substack{\beta\subseteq \{a,b\} \\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq \{a,b\}\setminus\beta \\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f\left(\alpha \cup \beta \cup \gamma\right) = -f(\alpha\cup\{a\}\cup\{b\}) - f(\alpha\cup\{b\}\cup\{a\}) =$$

$$= -2f(\alpha\cup\{a,b\}) = - \sum_{\substack{\beta\subseteq \{a,b\} \\ |\beta| \text{ — четное} \\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta).$$

Чтобы показать выполнение (17) при первом нечетном $|X|$, рассмотрим также случай $|X| = 3$, $X = \{a, b, c\}$, $E = X \cup \alpha$, $\alpha \cap X = \varnothing$:

$$\sum_{\substack{\beta\subseteq \{a,b,c\} \\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq \{a,b,c\}\setminus\beta \\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f\left(\alpha \cup \beta \cup \gamma\right) =$$

$$\begin{gathered}
= -f(\alpha\cup\{a\}\cup\{b\}) - f(\alpha\cup\{a\}\cup\{c\}) - f(\alpha\cup\{a\}\cup\{b,c\}) - \\
- \\
- f(\alpha\cup\{b\}\cup\{a\}) - f(\alpha\cup\{b\}\cup\{c\}) - f(\alpha\cup\{b\}\cup\{a,c\}) - \\
- f(\alpha\cup\{c\}\cup\{a\}) - f(\alpha\cup\{c\}\cup\{b\}) - f(\alpha\cup\{c\}\cup\{a,b\}) - \\
- f(\alpha\cup\{a,b\}\cup\{c\}) - f(\alpha\cup\{a,c\}\cup\{b\}) - f(\alpha\cup\{b,c\}\cup\{a\}) = \\
= -2f(\alpha\cup\{a,b\}) - 2f(\alpha\cup\{a,c\}) - 2f(\alpha\cup\{b,c\}) =
\end{gathered}$$

$$= - \sum_{\substack{\beta\subseteq \{a,b,c\} \\ |\beta| \text{ — четное} \\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta).$$

Продемонстрируем теперь выполнение индукционного перехода. Сформулируем предположение индукции. Предположим, что (17) выполняется для некоторого фиксированного X такого, что $|X| \geqslant 3$, $E = X \cup \alpha$, $\alpha \cap X = \varnothing$. Покажем, что (17) выполняется и для $X \cup \{y\}$: $y \notin X \wedge y \in \alpha$. Имеем

$$\sum_{\substack{\beta\subseteq X\cup\{y\} \\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq (X\cup\{y\})\setminus\beta \\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha \cup \beta \cup \gamma) = \sum_{\substack{\beta\subseteq X \\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq (X\cup\{y\})\setminus\beta \\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha \cup \beta \cup \gamma) +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta_1\subseteq X \\ \beta_1=\varnothing\vee\beta_1\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq (X\cup\{y\})\setminus(\beta_1\cup\{y\})=X\setminus\beta_1 \\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f\left(\alpha \cup \underbrace{\beta_1 \cup \{y\}}_{\beta} \cup \gamma\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} \left(\sum_{\substack{\gamma\subseteq X\setminus\beta\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\beta\cup\gamma)\right.}_{\substack{\text{По предположению индукции}\\ =-\sum\limits_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta)}} + \left.\sum_{\substack{\gamma_1\subseteq X\setminus\beta\\ \gamma_1=\varnothing\vee\gamma_1\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma_1|+1} f\left(\alpha\cup\beta\cup\underbrace{\gamma_1\cup\{y\}}_{\gamma}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\subseteq X\setminus\varnothing=X\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\{y\}\cup\gamma) + \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq X\setminus\beta\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\beta\cup\{y\}\cup\gamma) =$$

$$= - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta) - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta\cup\{y\}) -$$

$$- \underbrace{\sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq X\setminus\beta\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\{y\}\cup\beta\cup\gamma)}_{\substack{\text{По предположению индукции}\\ =-\sum\limits_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\{y\}\cup\beta\cup\gamma)}} +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\subseteq X\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\{y\}\cup\gamma) + \underbrace{\sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq X\setminus\beta\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\{y\}\cup\beta\cup\gamma)}_{\substack{\text{По предположению индукции}\\ =-\sum\limits_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\{y\}\cup\beta\cup\gamma)}} =$$

$$= - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta) - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta\cup\{y\}) + \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\{y\}\cup\beta) +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\subseteq X\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\{y\}\cup\gamma) - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\{y\}\cup\beta) =$$

$$= - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta) - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} f(\alpha\cup\beta\cup\{y\}) + \underbrace{\sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} (-1)^{\beta} f(\alpha\cup\beta\cup\{y\})}_{\gamma\text{ переменовано в }\beta} =$$

$$= - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta) + \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ \beta\neq\varnothing}} \left(-f(\alpha\cup\beta\cup\{y\}) + (-1)^{|\beta|} f(\alpha\cup\beta\cup\{y\})\right) =$$

$$= - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta) - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta|\text{ — нечетное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta\cup\{y\}) =$$

$$= -\sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta| \text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta) - \sum_{\substack{\beta\subseteq X\\ |\beta\cup\{y\}| \text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta\cup\{y\}) =$$

$$= -\sum_{\substack{\beta\subseteq X\cup\{y\}\\ |\beta| \text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta).$$

Таким образом, обоснован индукционный переход

$$\sum_{\substack{\beta\subseteq X\cup\{y\}\\ \beta\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\gamma\subseteq(X\cup\{y\})\setminus\beta\\ \gamma\neq\varnothing}} (-1)^{|\gamma|} f(\alpha\cup\beta\cup\gamma) = -\sum_{\substack{\beta\subseteq X\cup\{y\}\\ |\beta| \text{ — четное}\\ \beta\neq\varnothing}} 2f(\alpha\cup\beta),$$

что доказывает выполнение разложения (17) для множества произвольной мощности. □

Лемма 3. Для любого множества $\varepsilon\neq\varnothing$, его произвольного подмножества $\gamma\subseteq E$, $\gamma\neq\varnothing$ и произвольной функции f, определенной на каждом подмножестве множества ε, $f:\lambda(\varepsilon)\to\mathbb{R}$, справедливо следующее равенство:

$$\sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ \alpha\neq\varnothing}} \left((-1)^{|\alpha|} f(\gamma\cup\alpha) + f(\gamma\cup\alpha) + \sum_{\substack{\beta\subseteq\varepsilon\setminus(\gamma\cup\alpha)\\ \beta\neq\varnothing}} (-1)^{|\beta|} f(\gamma\cup\alpha\cup\beta) \right) = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Справедливость (18) вытекает из (17):

$$\sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ \alpha\neq\varnothing}} \left((-1)^{|\alpha|} f(\gamma\cup\alpha) + f(\gamma\cup\alpha) + \sum_{\substack{\beta\subseteq\varepsilon\setminus(\gamma\cup\alpha)\\ \beta\neq\varnothing}} (-1)^{|\beta|} f(\gamma\cup\alpha\cup\beta) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ |\alpha| \text{ — четное}\\ \alpha\neq\varnothing}} 2f(\gamma\cup\alpha) + \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ \alpha\neq\varnothing}} \sum_{\substack{\beta\subseteq(\varepsilon\setminus\gamma)\setminus\alpha\\ \beta\neq\varnothing}} (-1)^{|\beta|} f(\gamma\cup\alpha\cup\beta) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ |\alpha| \text{ — четное}\\ \alpha\neq\varnothing}} 2f(\gamma\cup\alpha) - \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ |\alpha| \text{ — четное}\\ \alpha\neq\varnothing}} 2f(\gamma\cup\alpha) = 0. \quad \square$$

Лемма 4. Для произвольных множеств циклов $\varepsilon\subseteq E$, $\gamma\subseteq\varepsilon$, $\varepsilon\neq\varnothing$, $\gamma\neq\varnothing$, где E определено в (3), произвольного фактор-множества A вида (1), отображения Θ (4), отображения S_{only} (8), (11) и отображения S_{all} (6), выполняется разложение следующего вида:

$$|S_{only}(A,\Theta,\gamma,\varepsilon)| = |S_{all}(A,\Theta,\gamma)| + \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha|} |S_{all}(A,\Theta,\gamma\cup\alpha)|. \tag{19}$$

Доказательство. Выполним доказательство методом математической индукции, исследуя изменения $|\gamma|$ от $|\gamma|=|\varepsilon|$ до произвольного $1\leqslant|\gamma|<|\varepsilon|$.

Рассмотрим сначала случай $|\gamma| = |\varepsilon|$, т. е. $\gamma = \varepsilon$. Данный случай вырожден, т. к. $\varepsilon \setminus \varepsilon = \varnothing$ и правая сумма исчезает из разложения (19). В этом случае, на основе (10) имеет место

$$|S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, \varepsilon)| = |S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)|.$$

Рассмотрим также случай $|\gamma| = |\varepsilon| - 1$. При таком условии мощность множества $|\varepsilon \setminus \gamma| = 1$. Определим $x \in E$, такой, что $\varepsilon \setminus \gamma = \{x\}$. Тогда, на основе (10), (11) имеет место

$$|S_{only}(A, \Theta, \gamma, \varepsilon)| = |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| - \left(\sum_{\substack{\alpha \subseteq \{x\} \\ \alpha \neq \varnothing}} |S_{only}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha, \varepsilon)| \right) =$$
$$= |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| - |S_{only}(A, \Theta, \gamma \cup \{x\}, \varepsilon)| = |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| - |S_{only}(A, \Theta, \varepsilon, \varepsilon)| =$$
$$= |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| - |S_{all}(A, \Theta, \varepsilon)| = (-1)^{|\{x\}|} |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \{x\})| + |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| =$$
$$= |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| + \sum_{\substack{\alpha \subseteq \{x\} \\ \alpha \neq 0}} (-1)^{|\alpha|} |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha)|.$$

Продемонстрируем выполнение индукционного перехода. Вначале сформулируем предположение индукции. Зафиксируем некоторое множество $\gamma \subset$, $\gamma \neq \varnothing$ и предположим, что разложение (19) выполняется для любого множества $\delta \subseteq \varepsilon$ такого, что $|\gamma| \leqslant |\delta| \leqslant |\varepsilon|$.

Покажем теперь, что при выполнении предположения индукции разложение (19) выполняется и для множества γ. На основе (11), (18) имеет место

$$|S_{only}(A, \Theta, \gamma, \varepsilon)| = |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| - \left(\sum_{\substack{\alpha \subseteq \varepsilon \setminus \gamma \\ \alpha \neq \varnothing}} |S_{only}(A, \Theta, \underbrace{\gamma \cup \alpha}_{|\gamma \cup \alpha| > |\gamma|}, \varepsilon)| \right) =$$
$$= |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| -$$
$$- \left(\underbrace{\sum_{\substack{\alpha \subseteq \varepsilon \setminus \gamma \\ \alpha \neq \varnothing}} \sum_{\substack{\beta \subseteq \varepsilon \setminus (\gamma \cup \alpha) \\ \beta \neq \varnothing}} (-1)^{|\beta|} |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha \cup \beta)| + |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha)|}_{\text{по предположению индукции}} \right) =$$
$$= |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| + (1 - 1) \sum_{\substack{\alpha \subseteq \varepsilon \setminus \gamma \\ \alpha \neq \varnothing}} (-1)^{|\alpha|} |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha)| -$$
$$- \left(\sum_{\substack{\alpha \subseteq \varepsilon \setminus \gamma \\ \alpha \neq \varnothing}} \sum_{\substack{\beta \subseteq \varepsilon \setminus (\gamma \cup \alpha) \\ \beta \neq \varnothing}} (-1)^{|\beta|} |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha \cup \beta)| + |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha)| \right) =$$
$$= |S_{all}(A, \Theta, \gamma)| + \sum_{\substack{\alpha \subseteq \varepsilon \setminus \gamma \\ \alpha \neq \varnothing}} (-1)^{|\alpha|} |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha)| -$$
$$- \underbrace{\sum_{\substack{\alpha \subseteq \varepsilon \setminus \gamma \\ \alpha \neq \varnothing}} \Big((-1)^{|\alpha|} |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha)| + |S_{all}(A, \Theta, \gamma \cup \alpha)| +}_{\text{Обращается в 0 по лемме 3}}$$

$$
\left.+\underbrace{\sum_{\substack{\beta\subseteq\varepsilon\setminus(\gamma\cup\alpha)\\ \beta\neq\varnothing}}(-1)^{|\beta|}|S_{all}(A,\Theta,\gamma\cup\alpha\cup\beta)|}_{\text{Обращается в 0 по лемме 3}}\right)=
$$

$$
=|S_{all}(A,\Theta,\gamma)|+\sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ \alpha\neq\varnothing}}(-1)^{|\alpha|}|S_{all}(A,\Theta,\gamma\cup\alpha)|.
$$

Таким образом, обоснован индукционный переход

$$
|S_{only}(A,\Theta,\gamma,\varepsilon)|=|S_{all}(A,\Theta,\gamma)|+\sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\setminus\gamma\\ \alpha\neq\varnothing}}(-1)^{|\alpha|}|S_{all}(A,\Theta,\gamma\cup\alpha)|,
$$

что доказывает корректность разложения (19) для множества произвольной мощности. □

3. ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА СЛОЕВ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ВСЕ ПОДМНОЖЕСТВА ЦИКЛОВ

Теорема. Для произвольного множества циклов $\varepsilon\subseteq E$, $\varepsilon\neq\varnothing$, где E определено в (3), произвольного фактор-множества A вида (1), отображения Θ (4), отображения $S_{subsets}$ (7), (12) и отображения S_{all} (5), (6), имеет место разложение следующего вида:

$$
|S_{subsets}(A,\Theta,\varepsilon)|=\sum_{x_1\in E}|S_{all}(A,\Theta,\{x_1\})-\sum_{\substack{\{x_1,x_2\}\subset E,\\ x_1\neq x_2}}|S_{all}(A,\Theta,\{x_1,x_2\})+
$$

$$
+\ldots+(-1)^{l+1}|S_{all}(A,\Theta,\{x_1,\ldots,x_l\})|=\sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\\ \alpha\neq\varnothing}}(-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)|. \quad (20)
$$

Доказательство. Выполним доказательство теоремы методом математической индукции по величине $|\varepsilon|$. Вначале рассмотрим базу индукции, т. е. случай $|\varepsilon|=1$, $\varepsilon=\{a\}$. В силу (10), (12) имеем

$$
|S_{subsets}(A,\Theta,\{a\})|=\sum_{\substack{\alpha\subseteq\{a\}\\ \alpha\neq\varnothing}}|S_{only}(A,\Theta,\alpha,\{a\})|=|S_{only}(A,\Theta,\{a\},\{a\})|=
$$

$$
=|S_{all}(A,\Theta,\{a\})|=\sum_{\substack{\alpha\subseteq\{a\}\\ \alpha\neq\varnothing}}(-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)|.
$$

Покажем теперь выполнение индукционного перехода. Вначале сформулируем предположение индукции. Пусть исходное разложение (20) выполняется для некоторого фиксированного $\varepsilon\subset E$, $\varepsilon\neq\varnothing$, $|\varepsilon|\geqslant 1$:

$$
|S_{subsets}(A,\Theta,\varepsilon)|=\sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\\ \alpha\neq\varnothing}}(-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)|.
$$

Выберем далее некоторый $x\in E$, $x\notin\varepsilon$, $\varepsilon\cap\{x\}=\varnothing$. Покажем, что разложение (20) справедливо и для множества $\varepsilon\cup\{x\}$. В силу (16) и (19) имеем

$$
|S_{subsets}(A,\Theta,\varepsilon\cup\{x\})|=|S_{subsets}(A,\Theta,\varepsilon)|+|S_{only}(A,\Theta,\{x\},\varepsilon\cup\{x\})|=
$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)|}_{\text{По предположению индукции}} + |S_{only}(A,\Theta,\{x\},\varepsilon\cup\{x\})| =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)| + |S_{all}(A,\Theta,\{x\})| +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\cup\{x\}\setminus\{x\}\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha|}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)| =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)| + (-1)^{|\{x\}|+1}|S_{all}(A,\Theta,\{x\})| +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha\cup\{x\}|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha\cup\{x\})| =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\cup\{x\}\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)|.$$

Таким образом, обоснован индукционный переход

$$|S_{subsets}(A,\Theta,\varepsilon\cup\{x\})| = \sum_{\substack{\alpha\subseteq\varepsilon\cup\{x\}\\ \alpha\neq\varnothing}} (-1)^{|\alpha|+1}|S_{all}(A,\Theta,\alpha)|.$$

что доказывает корректность разложения (20) для множества произвольной мощности. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы структурные свойства множества слоев, содержащего все подмножества циклов в нечеткой LP-структуре. В частности, сформулирована и доказана теорема о разложении мощности указанного множества.

Полученные результаты обосновывают созданную ранее вычислительную модель кластеризации слоёв в стохастическом нечетком LP-выводе. Они могут быть распространены и на более сложные логические системы в информатике [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джонс, М. Т. Программирование искусственного интеллекта в приложениях : пер. с англ. / М. Т. Джонс. — М. : ДМК Пресс, 2011. — 312 с.

2. Джарратано, Д. Экспертные системы : принципы разработки и программирование : пер. с англ. / Д. Джарратано, Г. Райли. — М. : Вильямс, 2007. — 1152 с.

3. Dutta, S. Machine Learning Algorithms and Their Application to Ore Reserve Estimation of Sparse and Imprecise Data / S. Dutta, S. Bandopadhyay // Intelligent Learning Systems & Applications. — 2010. — № 2. — P. 86–96.

4. Cracknell, M. J. Machine Learning for Geological Mapping : Algorithms and Applications. PhD thesis / M. J. Cracknell. — University of Tasmania, 2014. — 301 p.

5. McGovern, A. Machine learning in space: extending our reach / A. McGovern, K. L. Wagstaff // Machine Learning Journal. — 2011. — V. 84, № 3. — P. 335–340.

6. Соколов, С. М. Система информационного обеспечения задач сближения, стыковки, посадки космического аппарата на основе компьютерного видения / С. М. Соколов, А. А. Богуславский // Механика, Управление и Информатика. — 2011. — № 6. — С. 140–156.

7. Махортов, С. Д. Оптимизация метода LP-вывода / С. Д. Махортов, А. Н. Шмарин // Нейрокомпьютеры. Разработка,применение. — 2013. — № 9. — С. 59–63.

8. Махортов, С. Д. Основанный на решетках подход к исследованию и оптимизации множества правил условной системы переписывания термов / С. Д. Махортов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2009. — Т. 13, № 1–4. — С. 51–68.

9. Махортов, С. Д. Интегрированная среда логического программирования LPExpert / С. Д. Махортов // Информационные технологии. — 2009. — № 12. — С. 65–66.

10. Болотова, С. Ю. Алгоритмы релевантного обратного вывода, основанные на решении продукционно-логических уравнений / С. Ю. Болотова, С. Д. Махортов // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2011. — № 2. — С. 40–50.

11. Шмарин, А. Н. О реализации приближения числа слоев без циклов в задаче нечеткого LP-вывода / А. Н. Шмарин // Программная инженерия. — 2016. — № 7. — С. 330–336.

12. Шмарин, А. Н. Кластеризация множества слоев в задаче нечеткого LP-вывода / А. Н. Шмарин // Программная инженерия. — 2017. — № 4. — С. 177–185.

13. Салий, В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем / В. Н. Салий, В. А. Богомолов. — М. : Физматлит, 1997. — 368 с.

14. Махортов, С. Д. Математические основы искусственного интеллекта : теория LP-структур для построения и исследования моделей знаний продукционного типа / С. Д. Махортов. — М. : МЦНМО, 2009. — 304 с.

15. Махортов, С. Д. LP-структуры для обоснования и автоматизации рефакторинга в объектно-ориентированном программировании / С. Д. Махортов // Программная инженерия. — 2010. — № 2. — С. 15–21.

REFERENCES

1. Jones M. T. Programming of artificial intelligence applications. [Dzhons M.T. Programmirovanie iskusstvennogo intellekta v prilozheniyax]. Moscow, 2011, 312 p.

2. Giarratano D., Riley G. Expert systems: principles of development and programming. [Dzharratano D., Rayjli G. Ekspertnye sistemy: principy razrabotki i programmirovanie]. Moscow, 2007, 1152 p.

3. Dutta S., Bandopadhyay S. Machine Learning Algorithms and Their Application to Ore Reserve Estimation of Sparse and Imprecise Data. Intelligent Learning Systems & Applications, 2010, no. 2, pp. 86–96.

4. Cracknell M.J. Machine Learning for Geological Mapping : Algorithms and Applications. PhD thesis. University of Tasmania, 2014, 301 p.

5. McGovern A., Wagstaff K.L. Machine learning in space: extending our reach. Machine Learning Journal, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 335–340.

6. Sokolov S. M., Boguslavsky A. System of information support of tasks of approach, docking, landing of the spacecraft on the basis of computer vision. [Sokolov S.M., Boguslavskiyj A.A. Sistema informacionnogo obespecheniya zadach sblizheniya, stykovki, posadki kosmicheskogo apparata na osnove komp'yuternogo videniya]. *Mexanika, upravlenie i informatika — Mechanics, management and Informatics*, 2011, no. 6, pp. 140–156.

7. Makhortov S.D., Shmarin A.N. Optimization of the LP–method. [Maxortov S.D., Shmarin A.N. Optimizaciya metoda LP–vyvoda]. *Neyjrokomp'yutery. Razrabotka,primenenie — Neurocomputers. Development, application*, 2013, no. 9, pp. 59–63.

8. Makhortov S.D. A lattice-based approach to the study and optimization of the set of rules of a conditional system of rewriting terms. [Maxortov S.D. Osnovannyyj na reshetkax podxod k issledovaniyu i optimizacii mnozhestva pravil uslovnoyj sistemy perepisyvaniya termov]. *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya — Intelligent system. Theory and applications*, 2009, vol. 13, no. 1–4, pp. 51–68.

9. Makhortov S.D. The IDE logic programming LPExpert. [Maxortov S.D. Integrirovannaya sreda logicheskogo programmirovaniya LPExpert]. *Informacionnye texnologii — Information technology*, 2009, no. 12, pp. 65–66.

10. Bolotov S.Y., Makhortov S.D. Algorithms of relevant backward inference based on the solution of a production logic equations. [Bolotova S.Yu., Maxortov S.D. Algoritmy relevantnogo obratnogo vyvoda, osnovannye na reshenii produkcionno-logicheskix uravneniyj]. *Iskusstvennyyj intellekt i prinyatie resheniyj — Artificial intelligence and decision making*, 2011, no. 2, pp. 40–50.

11. Shmarin A.N. On the realization of the approximation of the number of layers without cycles in the problem of fuzzy LP-output. [Shmarin A.N. O realizacii priblizheniya chisla sloev bez ciklov v zadache nechetkogo LP-vyvoda]. *Programmnaya inzheneriya — Software engineering*, 2016, no. 7, pp. 330–336.

12. Shmarin A.N. Clustering of a plurality of layers in the problem of fuzzy LP output. [Shmarin A.N. Klasterizaciya mnozhestva sloev v zadache nechetkogo LP-vyvoda]. *Programmnaya inzheneriya — Software engineering*, 2017, no. 4, pp. 177–185.

13. Saliy V.N., Bogomolov V.A. Algebraic foundations of the theory of discrete systems. [Saliyj V.N., Bogomolov V.A. Algebraicheskie osnovy teorii diskretnyx sistem]. Moscow, 1997, 368 p.

14. Makhortov S.D. Mathematical foundations of artificial intelligence: LP-structure theory for building and research of knowledge models of production type. [Maxortov S.D. Matematicheskie osnovy iskusstvennogo intellekta: teoriya LP-struktur dlya postroeniya i issledovaniya modeleyj znaniyj produkcionnogo tipa]. Moscow, 2009, 304 p.

15. Makhortov S.D. LP-structures for substantiation and automation of refactoring in object-oriented programming. [Maxortov S.D. LP-struktury dlya obosnovaniya i avtomatizacii refaktoringa v ob'ektno-orientirovannom programmirovanii]. *Programmnaya inzheneriya — Software engineering*, 2010, no. 2, pp. 15–21.

Зорин А. Н., аспирант, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: tim-shr@mail.ru

Zorin A. N., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: tim-shr@mail.ru