УДК 517.9

ПРОГИБЫ СЖАТОЙ БАЛКИ НА ДВОЙНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ (В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВЛАСОВА-ЛЕОНТЬЕВА)

И. А. Гнеушев, И. В. Колесникова, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.05.2016 г.

Аннотация. Представлена алгоритмизируемая процедура приближенного вычисления и анализа закритических прогибов продольно сжатой упругой балки на двойном упругом основании в модифицированной модели Власова-Леонтьева. Процедура основана на применении вариационного метода Пуанкаре-Ляпунова-Шмидта, позволяющего сводить анализ закритических деформаций балки к анализу критических точек ключевой функции на конечномерном пространстве ключевых переменных.

Использованная модель, в условиях продольного сжатия балки, приводит к смене знаков перед некоторыми коэффициентами из традиционного модельного уравнения Власова-Леонтьева. Это приводит к эффекту 3-модового вырождения в нулевом состоянии и к усложненному бифуркационному анализу. Добавление в уравнение кубической нелинейности позволяет "контролировать" рост амплитуды посткритического прогиба балки. Методика Ляпунова-Шмидта позволяет вычислять закритические прогибы балки, определять устойчивость бифурцирующих состояний и анализировать строение каустики (дискриминантного множества) в пространстве управляющих параметров. Центральная конструктивная идея заключена в сведении (редукции) задачи изучения изгибов балки к дискриминантному анализу ветвления критических точек полинома от трех переменных (главной части ключевой функции Ляпунова-Шмидта).

Ключевые слова: модель Власова-Леонтьева, обобщенные краевые условия Дирихле, функционал энергии, моды прогиба, ключевая функция Ляпунова-Шмидта, ветви прогибов, каустика.

DEFLECTIONS OF THE SQUEEZED BEAM ON THE DOUBLE ELASTIC BASIS (IN THE GENERALIZED VLASOV-LEONTEV MODEL)

I. A. Gneushev, I. V. Kolesnikova, D. V. Kostin, Yu. I. Sapronov

Abstract. An algorithmizable procedure for approximate calculation and analysis of supercritical deflections of a longitudinally compressed beam on double elastic base in a modified model Vlasov-Leontief. The procedure based on using of an The Poincare-Lyapunov-Schmidt method, which makes it possible to reduce the analysis supercritical deformations of the beam to the analysis of the critical points of the key functions on the finite-dimensional space of key variables. This model in the conditions of longitudinal compression of the beam, leads to changes of signs before some coefficients from the traditional the Vlasov-Leont'ev model equation. This leads to the effect 3-mode degeneracy in zero state and to complicated bifurcation analysis. The addition of a cubic nonlinearity allows "controlling"the growth of the amplitude postcritical trough of the beam. The Lyapunov-Schmidt method calculate the supercritical deflections of the beam, determine the stability bifurcates and analyzes the structure of caustics (discriminant set) in the space of control parameters. The central constructive idea concluded in reduction (reduction) the problems of studying the beam bends to the discriminant branch analysis critical points of a polynomial in three variables (the main part of the key Lyapunov-Schmidt function).

Keywords: Vlasov-Leont'ev model, generalized boundary Dirichlet conditions, energy functional, mode of deflection, key function Lyapunov-Schmidt, branches of deflections, caustics.

ВВЕДЕНИЕ

Изначально модифицированная модель Власова-Леонтьева была предложена в [1] (стр. 136, уравнение (8.20)), где она представлена в виде ОДУ шестого порядка

$$-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1\, w = p \tag{1}$$

при обобщенных краевых условиях Дирихле

$$\frac{d^4 w}{dx^4}(0) = \frac{d^4 w}{dx^4}(1) = \frac{d^2 w}{dx^2}(0) = \frac{d^2 w}{dx^2}(1) = w(1) = w(0) = 0\,, \tag{2}$$

$w = w(x)$ — функция прогиба средней линии балки, a_1,a_2,a_3 — положительные механические константы, $p = p(x)$ — функциональный параметр внешней нагрузки, x — (промасштабированный) параметр длины средей линии балки. Уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве H^6 соболевских функций класса $W_2^6\,[0,1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2), что объясняется положительной определенностью симметричного оператора $-\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1\, w$ (при выполнении краевых условий (2)).

Уравнение (1) является обобщением известного уравнения Фусса-Винклера-Циммермана $\frac{d^4 w}{dx^4} - a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1\, w = p$ из строительной механики (см. [1], стр. 75, уравнение (1.8)). Рассмотренная ниже модификация предполагает наличие продольного сжатия балки, приводящего к смене знаков перед коэффициентами в модельном уравнении, что дает эффект 3-модового вырождения в нулевом состоянии:

$$\frac{d^6 w}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dx^2} + a_1\, w - w^3 = p\,. \tag{3}$$

Наличие нелинейного слагаемого позволяет «контролировать» рост амплитуд посткритических прогибов балки (см. [2]).

Основой примененной ниже методики исследования закритических прогибов служит вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта [3]-[5], позволяющая не только вычислять прогибы, но и определять их устойчивость, проводить построение каустики (дискриминантного множества) в пространстве управляющих параметров $a = (a_1,a_2,a_3)$. Центральная конструктивная идея — сведе́ние (редукция) задачи об изучении бифуркации изгибов к анализу ветвления критических точек полинома от шести переменных, являющегося главной частью ключевой функции

$$W(\xi,\delta,q) = \inf_{w:\ \langle w,e_k\rangle=\xi_k} V(w,a,q) = V\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_i\, e_i + \Phi(\xi)\right)\,, \tag{4}$$

где

$$V(\xi,\delta,q) := \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)^2 - a_3\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 + a_2\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - a_1 w^2\right) + \frac{1}{4} w^4 + p\, w\right)\,, \tag{5}$$

— потенциал уравнения (3), e_1,e_2,e_3 — моды прогиба в нуле при соответствующем значении векторного параметра $a = \overline{a}$, $\delta := a - \overline{a}$ (см. [6]-[9]). Уравнение (3) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала (5).

1. ПОСТРОЕНИЕ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ $p = 0$

Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков [10], Thompson J. M. T., Hunt G. W., [11], [12], Б. С. Бардин, С. Д. Фурта [13] и др.

Обобщенная нелинейная (промасштабированная) модель закритических прогибов однородной балки на двойном упругом основании представлена уравнением (3), в котором $w = w(x)$ — прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x). Изучение закритических прогибов состоит в отыскании решений краевой задачи (3)-(2) при различных значениях параметров. Данная краевая задача может допускать 3−мерное вырождение, порождающие 3−модовые бифуркации с разнообразными геометрическими и физическими эффектами.

Решение этой задачи будем осуществлять посредством вариационной версии метода конечномерной редукции Ляпунова-Шмидта [3]-[5], сводящей анализ краевой задачи к описанию ветвления экстремалей параметрического семейства полиномов от трех переменных — главной части ключевой функции (4).

Будем далее рассматривать пример, в котором тройка мод бифуркации задана набором функций

$$e_1 = \sqrt{2}\sin(\pi x), \quad e_2 = \sqrt{2}\sin(2\,\pi x), \quad e_3 = \sqrt{2}\sin(3\,\pi x)\,,$$

— базисом ядра второго дифференциала, соответствующим (критическому) значению управляющего параметра

$$a = \overline{a} := (36\,\pi^6, 49\,\pi^4, 14\,\pi^2).$$

После пересечения точкой $a = (a_1,a_2,a_3)$ произвольной характеристической плоскости (в $\mathbb{R}^3$) нулевая функция теряет стабильность и вблизи нее рождаются ненулевые стабильные состояния. Характеристические плоскости в общем случае задаются посредством линеаризованного уравнения

$$\frac{d^6w}{dx^6} + a_3\frac{d^4w}{dx^4} + a_2\frac{d^2w}{dx^2} + a_1\,w = 0 \tag{6}$$

(при краевых условиях (2)). Характеристические плоскости состоят из тех и только тех точек a, при которых уравнение (6) имеет ненулевое решение. Поиск нетривиальных решений линеаризованного уравнения осуществляется через характеристическое уравнение $-\lambda^6+a_3\lambda^4-a_2\lambda^2+a_1 = 0$. Учет краевых условий с необходимостью приводит к соотношениям $\lambda^2 = n^2\pi^2$, $n = 1,2\ \dots$, из которого получаем набор равенств: $a_1-a_2n^2\pi^2+a_3n^4\pi^4-n^6\pi^6 = 0$, задающих характеристические плоскости $L_1,L_2,\dots,L_n,\dots$. Поверхность L, огибающая семейства характеристических плоскостей, выделяет область в $\mathbb{R}^3$, состоящей из точек, для которых соответствующий функционал действия имеет в нуле единственную точку минимума. При пересечении точкой a поверхности L (в $\mathbb{R}^3$) происходит бифуркация рождения нетривиальных стабильных состояний. Поверхность L является кусочно линейной, гранями которой служат плоские многоугольники, ограниченные линиями попарных пересечений характеристических плоскостей. Эти линии таже будем называть характеристическими. Общие точки для отдельных пар характеристических линий будем называть характеристическими точками. Интерес к последним вызван тем, что они дают эффект трехмодового вырождения. Точки характеристических линий, отличные от характеристических точек, дают эффект двухмодового вырождения. Пересечение поверхности L по внутренней точке грани, принадлежащей

L_n, приводит к одномерной бифуркации с модой $e_n = \sqrt{2}\sin(\pi\, n\, x)$. Пересечение L по точке излома, принадлежащей линии (характеристистической) пересечения плоскостей L_n, L_m приводит к двумерной бифуркации с модами e_n, e_m. Соответственно, пересечение L по характеристической точке, являющейся точкой пересечения плоскостей L_n, L_m, L_l, приводит к трехмерной бифуркации с модами e_n, e_m, e_l. Три характеристические плоскости L_m, L_n, L_l, отвечающие произвольной тройке попарно различных натуральных чисел m, n, l, пересекаются по единственной точке

$$(a_1,a_2,a_3) = (n^2m^2l^2\pi^6, (n^2m^2 + m^2l^2 + n^2l^2)\pi^4, (n^2 + m^2 + l^2)\pi^2). \tag{7}$$

Доказательство этого факта вытекает из того, что характеристическая точка определяется системой уравнений

$$a_1 - n^2\pi^2 a_1 + n^4\pi^4 a_3 - n^6\pi^6 = a_1 - m^2\pi^2 a_2 + m^4\pi^4 a_3 - m^6\pi^6 = a_1 - l^2\pi^2 a_2 + l^4\pi^4 a_3 - l^6\pi^6 = 0\,.$$

Здесь l,m,n — натуральные попарно различные числа. Этой системе уравнений отвечает единственное решение (7).

В частном случае $l = 1, m = 2, n = 3$, получаем ранее выбранный пример. В случае других наборов мод исследования проводятся аналогичным образом.

2. ПОСТРОЕНИЕ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ В СЛУЧАЕ $3D$-ВЫРОЖДЕНИЯ

Анализ бифуркационных эффектов, происходящих при локализации управляющих параметров вблизи точки $\overline{a} = (1,2,3)$: $a_k = \bar{a}_k + \delta_k$, $k = 1,2,3$, можно осуществить посредством вариационной версии редукции Ляпунова-Шмидта [4] к анализу ключевой функции (от трех ключевых переменных) (4), которую запишем в виде

$$W(\xi,\delta) = \inf_{w:<w,e_k>=\xi_k,\ k=1,\ 2,\ 3} V(w,\bar{a} + \delta), \tag{8}$$

$\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)^\top$, $\delta = (\delta_1,\delta_2,\delta_3)^\top$. Известно, что в рассматриваемых условиях функция $W(\xi,\delta)$ является гладкой. Эта функция наследует все аналитические и топологические свойства V на E [4]. В частности, при достаточно малых δ существует взаимно однозначное соответствие между критическими точками V и W, сохраняющее типы точек (кратности, значения индекса Морса и т. п.).

Так как функционал V четен: $V(-w,a) = V(w,a)$ и симметричен относительно инволюции $I_1 : w(x) \longmapsto w(1 - x)$, то V инвариантен относительно действия группы $\mathbf{Z_2^2}$, заданного парой инволюций I_1,I_2, где $I_2 = -I_1$.

Очевидно, что выполняются соотношения

$$I_1(e_1) = e_1, \quad I_1(e_2) = -e_2, \quad I_1(e_3) = e_3\,.$$

Следовательно,

$$W(-\xi_1,\xi_2,-\xi_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3) = W(\xi_1,-\xi_2,\xi_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3) =$$
$$= W(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\delta_1,\delta_2,\delta_3).$$

Можно записать, учитывая эту симметрию, следующее асимптотическое представление ключевой функции:

$$W(\xi,\delta) = U(\xi,\delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \tag{9}$$

где

$$U(\xi,\delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3,\delta) \tag{10}$$

— ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2, e_3. Непосредственные вычисления приводят к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для ключевой функции (8) имеет место асимптотическое представление*

$$W(\xi,\delta) = \frac{1}{2}(\bar{\delta}_1\,\xi_1^2 + \bar{\delta}_2\,\xi_2^2 + \bar{\delta}_3\,\xi_3^2) +$$

$$+\frac{3}{8}\left(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4\right) + \frac{3}{2}\left(\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2 + \xi_1\xi_2^2\xi_3 - \frac{1}{3}\xi_1^3\xi_3\right) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\bar{\delta}_1 = (-\delta_1 + \delta_2 - \delta_3)\pi^2,$$
$$\bar{\delta}_2 = (-\delta_1 + 4\delta_2 - 16\delta_3)\pi^4,$$
$$\bar{\delta}_3 = (-\delta_1 + 9\delta_2 - 81\delta_3)\pi^6.$$

Доказательство вытекает из следующих соотношений:

$$W(\xi,\delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3,\delta) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\left(\left(-\left(\frac{d^3(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^3}\right)^2 +\right.\right.$$

$$+(14+\delta_3)\left(\frac{d^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^2}\right)^2 - (49+\delta_2)\left(\frac{d(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx}\right)^2 +$$

$$\left.\left.+(36+\delta_1)(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^2 + \frac{(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^4}{4}\right)\right)dx\,,$$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{d^3(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^3}\right)^2 = \left(\xi_1^2 + 64\xi_2^2 + 729\xi_3^2\right)\,\pi^6\,,$$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{d^2(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx^2}\right)^2 = \left(\xi_1^2 + 16\xi_2^2 + 81\xi_3^2\right)\,\pi^4\,,$$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{d(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)}{dx}\right)^2 = \left(\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 9\xi_3^2\right)\,\pi^2\,,$$

$$\int\limits_0^1 (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^2 dx = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\,,$$

$$\int\limits_0^1 (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^4 dx = \frac{3}{2}\left(\xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4\right) + 6\left(\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2 + \xi_1\xi_2^2\xi_3\right) - 2\xi_1^3\xi_3\,.$$

Подставив полученные значения для интегралов в $W(\xi,\delta)$, получим искомое выражение.

Замечание 1. «Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $W(\xi,\delta)$ полностью определяются ее главной частью $U(\xi,\delta)$ [4].

Замечание 2. В случае ненулевого, но малого функционального параметра p изложенная схема немного усложняется за счет появления в уравнениях и аналитических выкладках дополнительных слагаемых. Можно ограничиться рассмотрением разложения по основным модам: $p(x) = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_2 e_3$. Членами разложения Фурье по остальным модам можно пренебречь, так как они вносят малый вклад в окончательное асимптотическое представление решений (по сравнению с параметрами δ_j, η_k).

3. АНАЛИЗ КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ВТОРИЧНОЙ РЕДУКЦИИ (К ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ)

Так как функция (10) обладает симметрией относительно группы $\mathbb{Z}_2^2$, заданного парой инволюций I_1,I_2, где $I_2 = -I_1$, $I_1 : w(x) \longmapsto w(1-x)$, то эта функция четна по переменной ξ_2: $U(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\delta) = U(\xi_1,-\xi_2,\xi_3,\delta)$. Следовательно, она может быть представлена в виде

$$U(\xi,\delta) = \frac{3}{8}\xi_2^4 + \frac{p}{2}\xi_2^2 + q,$$

где

$$p = \bar{\delta}_2 + 3\left(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1\xi_3\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\bar{\delta}_1\xi_1^2 + \bar{\delta}_3\xi_3^2\right) + \frac{3}{8}\left(\xi_1^4 + \xi_3^4 + 4\xi_1^2\xi_3^2\right) - \frac{1}{2}\xi_1^3\xi_3\,.$$

Такое представление функции U дает возможность вторичной редукции: дальнейшего сокращения числа переменных до двух (редукции к функции двух переменных). При этом выделются два случая: $p \geqslant 0$ и $p \leqslant 0$. При $\bar{\delta}_2 \leqslant 0$ эти соотношения выделяют в плоскости переменных ξ_1, ξ_3 внешность и внутренность эллипса $\bar{\delta}_2 + 3\left(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1\xi_3\right) = 0$. При $\bar{\delta}_2 \geqslant 0$ неравенство $p \geqslant 0$ выполняется для всех зачений ξ_1, ξ_3.

В случае $p \geqslant 0$ можно рассмотреть вторично редуцированную ключевую функцию $q = q(\xi_1,\xi_3) := \inf\limits_{\xi_2} U$. В предполагаемых условиях функция q наследует (вблизи нуля) аналитические и топологические свойства функции $U(\xi)$. Причем имеется естественное взаимнооднозначное соответствие $(\xi_1,\xi_3) \longmapsto (\xi_1,0,\xi_3)$ между критическими точками функций q и U, сохраняющее топологические типы точек.

В случае $p \leqslant 0$ получаем (вторично) редуцированую ключевую функцию $\inf\limits_{\xi_2} U$ двух видов:

a) $U_1 = U(\xi_1,0,\xi_3) = q$; при этом соответствие $(\xi_1,\xi_3) \longmapsto (\xi_1,0,\xi_3)$ (между критическими точками функций q и U) повышает индекс Морса на единицу;

b) $U_2 = U(\xi_1,\pm\sqrt{-\frac{2p}{3}},\xi_3)$; при этом соответствие $(\xi_1,\xi_3) \longmapsto (\xi_1,\pm\sqrt{-\frac{2p}{3}},\xi_3)$ (между критическими точками функций U_1 и U) сохраняет индекс Морса.

Таким образом, вторичная редукция сводит изучение критических точек к описанию каустик и раскладов бифурцирующих экстремалей для функций с особенностями двумерных сборок. Достаточно полный анализ таких функций проведен в работах [14], [15].

Исследование параметрических разверток двумерных сборок проводится по единой схеме: после приведения к нормальной форме и перехода к полярным координатам редуцированная ключевая функция приобретает удобный для исследования каустики и bif-раскладов [3]-[5], [16]. Причем эти исследования можно провести посредством элементарных методов математического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. — М. : Физматгиз, 1960. — 492 с.

2. Арнольд, В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2008. — 32 с.

3. Сапронов, Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю. И. Сапронов // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 101–132.

4. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

5. Костин, Д. В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем / Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. — 207 с.

6. Сапронов, Ю. И. Многомодовые бифуркации упругих равновесий / Ю. И. Сапронов // Прикл. матем. и механ. — 1988. — Т. 52, вып. 6. — С. 997–1006.

7. Сапронов, Ю. И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций / Ю. И. Сапронов // Матем. сборник. — 1989. — Т. 180, № 10. — С. 1299-1310.

8. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов // Известия ВУЗов. Математика. — 1997. — Т. 2. — С. 35—46.

9. Зачепа, А. В. О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3−мерной сборки / А. В. Зачепа, Ю. И. Сапронов // Труды математического факультета (новая серия). — 2005. — вып. 9. — С. 57–71.

10. Мітропольський, Ю. О. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи) / Ю. О. Мітропольський, Б. І. Мосеенков. — Киïв : Видавництво Киïвського університету, 1961. — 123 п.

11. Thompson, J. M. T. A General Theory of Elastic Stability / J. M. T. Thompson, G. W. Hunt // John Wiley & Sons, 1973. — 322 p.

12. Thompson, J. M. T. Advances in Shell Buckling : Theory and Experiments / J. M. T. Thompson // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2015. — V. 25, № 1. — P. 1–25.

13. Бардин, Б. С. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании / Б. С. Бардин, С. Д. Фурта // В кн. : Актуальные проблемы классической и небесной механики. — М. : Эльф, 1998. — С. 13–22.

14. Костин, Д. В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях / Д. В. Костин // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83, вып. 1. — С. 50–60.

15. Костин, Д. В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д. В. Костин // Доклады Академии Наук. — 2008. — Т. 418, № 4. — С. 295–299.

16. Даринский, Б. М. Ветвление сегнетоэлектрических фаз неоднородного кристалла вблизи критической фазы с трехмерной особенностью шестого порядка / Б. М. Даринский, И. В. Колесникова, Ю. И. Сапронов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, Математика. — 2009. — № 3. — С. 101–107.

REFERENCES

1. Vlasov V.Z., Leontyev N.N. Beams, plates and covers on the elastic basis. [Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii]. Moscow, 1960, 492 p.

2. Arnold V.I. "Rigid" and "soft" mathematical models. [Arnol'd V.I. «ZHyostkie» i «myagkie» matematicheskie modeli]. Moscow, 2008, 32 p.

3. Sapronov, Yu.I. Finite-dimensional reductions in the smooth extreme tasks. [Sapronov Yu.I. Konechnomernye redukcii v gladkix ekstremal'nyx zadachax]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1996, vol. 51, no. 1, pp. 101–132.

4. Darinsky B.M., Sapronov Yu.I., Tsaryov S.L. Bifurcations of extremals of Fredholm functionalities. [Darinskiyj B.M., Sapronov Yu.I., Carev S.L. Bifurkacii ekstremaleyj fredgol'movyx funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

5. Kostin D.V., Sapronov Yu.I. Functional analysis and multimode deflections of the elastic systems. [Kostin D.V., Sapronov Yu.I. Funkcional'nyyj analiz i mnogomodovye progiby uprugix sistem]. Voronezh, 2012, 207 p.

6. Sapronov Yu.I. Multimode bifurcations of elastic equilibrium. [Sapronov Yu.I. Mnogomodovye bifurkacii uprugix ravnovesiyj]. *Prikladnaya matematika i mexanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, vol. 52, iss. 6, pp. 997–1006.

7. Sapronov Yu.I. Semi-regular angular features of smooth functions. [Sapronov Yu.I. Poluregulyarnye uglovye osobennosti gladkix funkciyj]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1989, vol. 180, no. 10, pp. 1299–1310.

8. Darinsky B.M., Sapronov Yu.I. Bifurcations of extremals near feature multidimensional assembly. [Darinskiyj B.M., Sapronov Yu.I. Bifurkacii ekstremaleyj vblizi osobennosti mnogomernoyj sborki]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1997, vol. 2, pp. 35–46.

9. Zachepa A.V., Sapronov Yu.I. About bifurcation of extremals of Fredholm functionality from degenerate point of a minimum with feature of 3−measure assembly. [Zachepa A.V., Sapronov Yu.I. O bifurkacii ekstremaleyj fredgol'mova funkcionala iz vyrozhdennoyj tochki minimuma s osobennost'yu 3−mernoyj sborki]. *Trudy matematicheskogo fakul'teta (novaya seriya) — Works of mathematical faculty (new series)*, 2005, iss. 9, pp. 57–71.

10. Mitropolsky Yu.O., Moseenkov B.I. Investigation of oscillations in systems with distributed parameters (asymptotic method). [Mitropol'skiyj Yu.O., Moseenkov B.I. Doslidzhennya kolivan' v sistemax z rozpodilenimi parametrami (asimptotichni metodi)]. Kiev, 1961, 123 p.

11. Thompson J.M.T., Hunt G.W. A General Theory of Elastic Stability. John Wiley & Sons, 1973, 322 p.

12. Thompson J.M.T. Advances in Shell Buckling: Theory and Experiments. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 1–25.

13. Bardin B.S., Furta S.D. Local theory of existence of the periodic wave movements of an infinite beam on not linearly elastic basis. [Bardin B.S., Furta S.D. Lokal'naya teoriya sushhestvovaniya periodicheskix volnovyx dvizheniyj beskonechnoyj balki na nelineyjno uprugom osnovanii]. In book : Actual problems classical and heavenly mechanics, Moscow, 1998, pp. 13–22.

14. Kostin, D.V. Application of a formula of Maslov for the asymptotic solutions of one task on elastic deformations. [Kostin D.V. Primenenie formuly Maslova dlya asimptoticheskogo resheniya odnoyj zadachi ob uprugix deformaciyax]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2008, vol. 83, iss. 1, pp. 50–60.

15. Kostin D.V. About one scheme of the analysis the two-method of deflections poorly non-uniform elastic beam. [Kostin D.V. Ob odnoyj sxeme analiza dvuxmodovyx progibov slabo neodnorodnoyj uprugoyj balki]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 418, no. 4, pp. 295–299.

16. Darinsky B.M., Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I. Branching ferroelectric of phases of the non-uniform crystal near a critical phase with three-dimensional feature of the sixth about. [Darinskiyj B.M., Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I. Vetvlenie segnetoelektricheskix faz neodnorodnogo kristalla vblizi kriticheskoyj fazy s trexmernoyj osobennost'yu shestogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2009, no. 3, pp. 101–107.

Гнеушев Илья Андреевич, аспирант, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: wtn70@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Gneushev I. A., Post-graduate student of the Department of mathematical modeling, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: wtn70@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Колесникова Инна Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: kolinna@inbox.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Kolesnikova Inna Viktorovna, Associate Professor, Department of mathematical analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: kolinna@inbox.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Костин Дмитрий Владимирович, д.ф.-м.н., доцент, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: dvk605@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Kostin Dmitriy Vladimirovich, Associate Professor, Department of mathematical analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Doctor of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: dvk605@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Сапронов Юрий Иванович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: yusapr@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Sapronov Yuriy Ivanovich, Professor, Department of mathematical analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Doctor of physico-mathematical sciences, docent, Voronezh, Russian Federation
E-mail: yusapr@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64