УДК 517.958

НОВАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ

А. В. Глушко, Е. А. Логинова, Е. В. Астахова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.07.2016 г.

Аннотация. В работе изучается задача термоупругости для плоскости с разрезом по отрезку. На границе области заданы неоднородные условия типа сопряжения. Статья является исследованием, завершающим цикл работ, в которых предшествующие исследования касались задач теплопроводности и упругости в плоскости с разрезом. Изучение общей задачи термоупругости позволило добиться новых, представляющих научный интерес результатов, позволяющих объединить результаты цикла. Было построено решение задачи в явном виде. Особое внимание уделено доказательству выполнения граничных условий. Показано, какие из условий выполняются по непрерывности, а какие в смысле главного значения. Наиболее значимым результатом работы явилось построение асимптотик компонент решений $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ (смещения) и их первых производных вблизи границы–разреза. При этом было показано, что функции $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ являются непрерывными и ограниченными в R^2 функциями. Также были построены асимптотические представления производных компонент решения для задачи термоупругости в случае неоднородных граничных условий сопряжения. Таким образом, в работе показано, как разность температур и тепловых потоков влияет на деформацию материала с трещиной.

Ключевые слова: эллиптическая задача термоупругости, условия типа сопряжения (трансмиссии), специальные функции, асимптотические представления решения вблизи границы, граничные условия, вырожденная граница трещина-разрез.

NEW PROBLEM OF THERMOELARTICITY IN A PLANE WITH A CUT

A. V. Glushko, E. A. Loginova, E. V. Astahova

Abstract. In this paper, the problem of thermoelasticity for a plane with a cut along a segment is studied. Non-homogeneous conditions of conjugation type are given at the boundary of the domain. The article is a study that completes the cycle of studies in which the previous studies concerned problems of thermal conductivity and elasticity in a plane with a cut. The study of the general problem of thermoelasticity let achieve new scientific results that allow to combine the results of the cycle. The solution of the problem was constructed in explicit form. Particular attention is paid to proving the boundary conditions. It is shown which conditions are satisfied by continuity, and which in the sense of the principal value. The most significant result of the work was the construction of the asymptotics of the components of the solutions $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ (displacement) and their first derivatives near the boundary-section. It was shown that functions $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ are continuous and limited functions in R^2. Also, asymptotic representations of production solutions for thermoelasticity problems were constructed in the case of inhomogeneous boundary conjugation conditions. Thus, the paper shows how the difference in temperatures and heat fluxes affects the deformation of a material with a crack.

Keywords: elliptic thermoelasticity problem, conjugation (transmission) conditions, special functions, asymptotic representations of the solution near the boundary, boundary conditions, degenerate crack-cut boundary.

Основой постановки задачи, изучаемой в настоящей работе, является рассмотренная в исследовании [1] известных механиков S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri система уравнений термоупругости, состоящая из уравнения теплопроводности

$$\Delta T + \delta \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0; \tag{1}$$

и неоднородных уравнений упругости

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^\partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = 4\alpha_0 e^{\gamma x_2}\frac{\partial T}{\partial x_1}; \tag{2}$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^\partial x_2} + \beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial x_2} = 4\alpha_0 e^{\gamma x_2}\left((\beta+\gamma)T + \frac{\partial T}{\partial x_2}\right). \tag{3}$$

В системе уравнений (1)–(3) использованы следующие обозначения: δ — множитель, участвующий в представлении $k(x_2) = k_0 e^{\delta x_2}$ коэффициента внутренней теплопроводности; β — множитель, участвующий в представлении $\mu = \mu_0 e^{\beta x_2}$ модуля сдвига; γ — множитель, участвующий в представлении $\alpha = \alpha_0 e^{\gamma x_2}$ коэффициента теплового расширения; $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3-\nu)(1+\nu)^{-1}$ для обобщенного плоского напряженного состояния. Здесь ν — коэффициент Пуассона, возникающий в законах теории упругости. Зависимость коэффициента κ от коэффициента Пуассона, а также пределы изменения коэффициента Пуассона, позволяют предполагать, что коэффициент κ изменяется в интервале $(5/3; 3)$. Также мы будем считать выполненным условия $0 < \gamma < \delta$ и $-\gamma^2 + \gamma\delta > 0$.

Система уравнений (1)–(3) рассматривается в плоской области $x = (x_1; x_2) \in R^2 \backslash l$, где $l = \{x = (x_1; x_2) | x_2 = 0;\ x_1 \in (-1; 1)\}$. Данная область моделирует наличие трещины-разреза в рассматриваемой неоднородной среде. Также наличие трещины моделируют условия сопряжения (трансмиссии), заданные на берегах трещины l. Очевидно, что задача расцепляется и уравнение теплопроводности можно рассмотреть в первую очередь, до рассмотрения уравнений (2), (3). Задачи подобного вида были рассмотрены авторами в работах [2]–[4].

Дополним уравнение (1) условиями сопряжения на границе

$$T(x_1, +0) - T(x_1, -0) = T_0(x_1), \tag{4}$$

$$\frac{\partial T(x_1,+0)}{\partial x_2} + \frac{\delta}{2}T(x_1,+0) - \frac{\partial T(x_1,-0)}{\partial x_2} - \frac{\delta}{2}T(x_1,-0) = T_1(x_1). \tag{5}$$

Задача (1), (4), (5) рассмотрена в [2], как вспомогательная. Приведем без доказательства полученные там результаты.

Определение 0.1. (см. [3]). Решением задачи (1), (4), (5) назовем функцию $T(x_1,x_2)$, принадлежащую $C^2(\mathrm{R}^2 \backslash l)$, удовлетворяющую уравнению (1), для которой в смысле главного значения при x_1, принадлежащем $(-1; 1)$ выполнены условия (4), (5) и такую, что функции $T(x_1,x_2)$, $\sqrt{(1 \pm x_1)^2 + x_2^2}\frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial T(x_1,-x_2)}{\partial x_2}$, $(1 \pm x_1)\frac{\partial T(x_1;x_2)}{\partial x_1}$ ограничены в окрестности трещины l.

Замечание 0.1. Дополнительные условия ограниченности решения вблизи границы были использованы в [3] для сведения задачи (1), (4), (5) к обобщенной задаче в $S'(R^2)$.

Теорема 1. (см. [2]). Пусть $T_r(x_1) \in C^1([-1;\ 1])$. Тогда функция T, решение задачи (1), (4), (5) , есть непрерывная ограниченная функция аргументов x_1,x_2 не принадлежащих отрезку l, для функций $\frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_2}$ при $(x_1,x_2) \notin l$ справедливы следующие представления:

$$\frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -\frac{T_0(1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2} + \frac{T_0(-1)}{2\pi}\frac{x_2}{(1+x_1)^2 + x_2^2} -$$

$$-\frac{T_1(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]+\frac{T_1(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+$$
$$+\frac{\delta T_0(1)}{8\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]-\frac{\delta T_0(-1)}{8\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]R_1(x_1,x_2), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{T_0(1)}{2\pi}\frac{1-x_1}{(1-x_1)^2+x_2^2}-\frac{T_0(-1)}{2\pi}\frac{1+x_1}{(1+x_1)^2+x_2^2}+$$
$$+\frac{T_0'(1)}{4\pi}\ln[(1-x_1)^2+x_2^2]-\frac{T_0'(-1)}{4\pi}\ln[(1+x_1)^2+x_2^2]+R_2(x_1,x_2), \quad (7)$$

где $R_k(x_1,x_2)$, $k=1;2$ — ограниченная на любом компакте функция.

Отметим также, что в работе [4] доказана теорема единственности решения задачи (1), (4), (5) в $L_2(\mathrm{R}^2)$с весом $e^{\frac{\delta}{2}x_2}$.

Второе исследование авторов, являющееся опорным для настоящей статьи, содержится в работах [5], [6]. Оно посвящено исследованию задачи упругости для модели, описанной в изучаемом нами случае. Данная модель описывается начально-краевой задачей, состоящей из системы однородных уравнений упругости, полученных из (2), (3)

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+(\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^\partial x_2}+\beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x_1}=0; \quad (8)$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+(\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^\partial x_2}+\beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial x_2}=0, \quad (9)$$

рассматриваемой в области $x\in\mathrm{R}^2\backslash l$ и дополненной граничными условиями трансмиссии

$$u(x_1;+0)-u(x_1;-0)=0; \quad (10)$$

$$v(x_1;+0)-v(x_1;-0)=0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u(x_1;+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1;-0)}{\partial x_2}=q_1(x_1); \quad (12)$$

$$\frac{\partial v(x_1;+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1;-0)}{\partial x_2}=q_2(x_1). \quad (13)$$

В условиях (10)–(13) $x_1\in(-1;1)$. В системе (8), (9) и в условиях (10)–(13) $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ — смещения точки (x_1,x_2) при деформации. Напомним, что коэффициенты κ,β введены в [1].

Сформулируем кратко результаты статей [5], [6], которые будут использованы в настоящей работе.

Определение 0.2. Решением задачи (8)–(13) назовем вектор-функцию $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$, принадлежащую множеству функций $C^2\left(\mathrm{R}^2\backslash l\right)$ и удовлетворяющую системе уравнений (8)–(9) в области $\mathrm{R}^2\backslash l$, для которой при $x_1\in(-1;\,1)$ по непрерывности выполнены граничные условия (10)–(11), граничные условия (12), (13) выполнены в смысле главного значения, и такую, что функции $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$, $\sqrt{(1\pm x_1)^2+x_2^2}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\sqrt{(1\pm x_1)^2+x_2^2}\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1,-x_2)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1,-x_2)}{\partial x_2}$ и $(1\pm x_1)\frac{\partial u(x_1;\,x_2)}{\partial x_1}$, $(1\pm x_1)\frac{\partial v(x_1;\,x_2)}{\partial x_1}$ ограничены в окрестности трещины l.

Если решение задачи (8)–(13) удовлетворяет условиям, наложенным на него в определении 0.2, удается свести эту задачу к обобщенной задаче в $S'(\mathrm{R}^2)$ (см. [6]).

Определение 0.3. Пусть функция $q(x_1)$принадлежит пространству $C\left([-1;1]\right)$. Через $q(x_1)\delta_{[-1;\,1]}(x_1,x_2)$ будем обозначать обобщенную функцию из $D'\left(\mathrm{R}^2\right)$, действующую по следующему правилу: для любой функции $\varphi(x_1{,}x_2)$, принадлежащей пространству $D\left(\mathrm{R}^2\right)$,

$$\left(q(x_1)\delta_{[-1;\,1]}(x_1,x_2){,}\varphi(x_1{,}x_2)\right) = \int\limits_{-1}^{1} q(\sigma_1)\varphi(\sigma_1{,}0)d\sigma_1.$$

Теорема 2. Пусть $\{u{,}v\}$ решение исходной задачи. Пусть также функции $q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$ являются регулярными функционалами из пространства $S'(\mathrm{R})$. Тогда $\{u{,}v\}$ — является обобщенным решением из $S'\left(\mathrm{R}^2\right)$ следующей обобщенной задачи

$$(\kappa+1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+(\kappa-1)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\,(\kappa-1)\,\frac{\partial u}{\partial x_2}+\beta\,(\kappa-1)\,\frac{\partial v}{\partial x_1}=(\kappa-1)q_1(x_1)\delta_{[-1,1]}; \quad (14)$$

$$(\kappa-1)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+(\kappa+1)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\,(3-\kappa)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}+\beta\,(\kappa+1)\,\frac{\partial v}{\partial x_2}=(\kappa+1)q_2(x_1)\delta_{[-1,1]}. \quad (15)$$

Теорема 3. Пусть функции $q_1(x_1), q_2(x_1)$ из условий (12)–(13) принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Предположим также, что справедливы равенства $\int\limits_{-1}^{1} q_r(x_1)dx_1=0, r=1;2.$ Тогда компоненты $u(x_1{,}x_2), v(x_1{,}x_2)$ решения обобщенной задачи (14), (15) из теоремы 2 являются непрерывными по совокупности переменных, ограниченными на любом компакте $K\in \mathrm{R}^2$ функциями, бесконечно дифференцируемыми в любой точке из множества $\mathrm{R}^2\backslash l$. Граничные условия (10), (11) выполнены по непрерывности. Первые производные решения удовлетворяют граничным условиям (12), (13) в смысле главного значения.

Основным и наиболее интересным результатом работ [5], [6] являются сведения об асимптотическом поведении производных решения в окрестности двух критических точек — концов отрезка l границы — трещины. Именно в этих точках возникают сингулярные компоненты производных решения обобщенной задачи (14), (15).

Теорема 4. Пусть $q_r\in C^1([-1;1]); r\in\{1;2\}$. Справедливы следующие асимптотические при $x_2\to 0; x_1\to\pm 1$ представления производных компонент решения задачи (14)–(15)

$$\frac{\partial u(x_1{,}x_2)}{\partial x_1}=\left(\frac{q_1(x_1)(2\kappa^2-2\kappa+1)}{4\pi(\kappa^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)\right)+W_{11}(x_1{,}x_2);$$

$$\frac{\partial u(x_1{,}x_2)}{\partial x_2}=\left(\frac{q_1(x_1)}{2\pi}\left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2}-\frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2}-2\operatorname{arctg}\frac{x_1-1}{x_2}+2\operatorname{arctg}\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right)-$$
$$-\frac{q_2(x_1)}{2\pi(\kappa-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+W_{12}(x_1{,}x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1{,}x_2)}{\partial x_1}=\frac{q_2(x_1)(2\kappa^2+2\kappa)}{4\pi(\kappa^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+W_{21}(x_1{,}x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1{,}x_2)}{\partial x_2}=-\frac{q_1(x_1)}{\pi(\kappa+1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2}-\frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2}-2arctg\frac{x_1-1}{x_2}+2arctg\frac{x_1+1}{x_2}\right)q_2(x_1)+W_{22}(x_1,x_2).$$

Здесь функции $W_{pq}(x_1,x_2)$, $1\leqslant p,q\leqslant 2$ — непрерывные ограниченные на любом компакте $K\in \mathrm{R}^2$ функции своих аргументов.

Мы закончили изложение основных предшествующих результатов и переходим к формулировке основных утверждений настоящей работы.

Теорема 5. Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Пусть также $T_0(\pm1)=0$. Пусть $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$ — решение задачи, состоящей из уравнений (1)–(3), граничных условий (4), (5) и однородных граничных условий (10)–(13). Тогда условия (10), (11) выполнены по непрерывности. Условия (12)–(13) выполнены в смысле главного значения.

Теорема 6. Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Пусть $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$ — решение задачи, состоящей из уравнений (1)–(3), граничных условий (4), (5) и однородных граничных условий (10)–(13). Тогда справедливы следующие асимптотические по гладкости вблизи границы представления компонент решения $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$ и их производных

$$u(x_1,x_2)=P_1(x_1,x_2),\quad v(x_1,x_2)=P_2(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{x_2\left(x_1-1\right)}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}-\frac{x_2\left(x_1+1\right)}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)+P_3(x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1-1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1+1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)+P_4(x_1,\,x_2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,\,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1-1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1+1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)+P_5(x_1,\,x_2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,\,x_2)=\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{x_2\left(x_1+1\right)}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}-2arctg\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right)T_0\left(x_1\right)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi\left(\kappa+1\right)}\left(\frac{x_2\left(x_1-1\right)}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}-2arctg\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right)\right)T_0\left(x_1\right)+P_6(x_1,\,x_2),$$

где $P_j(x_1,\,x_2)$, $j=\{1,...,6\}$ — непрерывные и ограниченные на R^2 функции.

Если объединить результаты, полученные в теоремах 4 и 6, получим следующее утверждение относительно компонент решения $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ задачи (1)–(5), (10)–(13).

Теорема 7. Пусть $q_r(x_1), T_0(x_1), T_1(x_1)\in C^1([-1;1])$; $r\in\{1;2\}$. Тогда справедливы асимптотические при $x_2\to 0$; $x_1\to\pm1$ представления компонент решения задачи, состоящей из уравнений (1)–(3) и граничных условий (4), (5), (10)–(13), и производных компонент решения указанной задачи

$$u(x_1,x_2)=W_{10}(x_1,x_2);\quad v(x_1,x_2)=W_{20}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\left(\frac{q_1(x_1)(2k^2-2k+1)}{4\pi(k^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{\alpha_0}{3\pi\left(k+1\right)}\left(\frac{x_2\left(x_1-1\right)}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}T_0\left(x_1\right)-\frac{x_2\left(x_1+1\right)}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}T_0\left(x_1\right)\right)+W_{11}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{q_1(x_1)}{2\pi}\left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2}-\frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2}-2arctg\frac{x_1-1}{x_2}+2arctg\frac{x_1+1}{x_2}\right)-$$
$$-\frac{q_2(x_1)}{2\pi(k-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{3\pi\left(k+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1-1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi\left(k+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1+1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)+W_{12}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{q_2(x_1)(2k^2+2k)}{4\pi(k^2-1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+$$
$$+\frac{\alpha_0}{3\pi\left(k+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1-1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi\left(k+1\right)}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\left(x_1+1\right)^2+x_2^2\right)+\frac{x_2^2}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}\right)T_0\left(x_1\right)+W_{21}(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial v(x_1,x_2)}{\partial x_2}=-\frac{q_1(x_1)}{\pi(k+1)}\left(\ln\left((x_1+1)^2+x_2^2\right)-\ln\left(x_1-1)^2+x_2^2\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(x_1-1)x_2}{(x_1-1)^2+x_2^2}-\frac{(x_1+1)x_2}{(x_1+1)^2+x_2^2}-2arctg\frac{x_1-1}{x_2}+2arctg\frac{x_1+1}{x_2}\right)q_2(x_1)+$$
$$\frac{\alpha_0}{3\pi\left(k+1\right)}\left(\frac{x_2\left(x_1+1\right)}{\left(x_1+1\right)^2+x_2^2}-2arctg\left(\frac{x_1+1}{x_2}\right)\right)T_0\left(x_1\right)-$$
$$-\frac{\alpha_0}{3\pi\left(k+1\right)}\left(\frac{x_2\left(x_1-1\right)}{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}-2arctg\left(\frac{x_1-1}{x_2}\right)\right)T_0\left(x_1\right)+W_{22}(x_1,x_2).$$

Здесь функции $W_{pq}(x_1,x_2)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, $0\leqslant q\leqslant 2$ — непрерывные ограниченные на любом компакте $K\in R^2$ функции своих аргументов.

Заметим, что асимптотики третьей компонент решения данной задачи содержатся в теореме 1.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(5), (10)–(13) С ОДНОРОДНЫМИ УСЛОВИЯМИ (12)–(13)

Рассмотрим систему уравнений (1), (2), (3), дополненную граничными условиями (4), (5), (10), (11) и однородными условиями

$$\frac{\partial u(x_1;+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial u(x_1;-0)}{\partial x_2}=0; \tag{16}$$

$$\frac{\partial v(x_1;+0)}{\partial x_2}-\frac{\partial v(x_1;-0)}{\partial x_2}=0. \tag{17}$$

Проведем в задаче (1), (4), (5) замену искомой функции вида $T(x_1,x_2) = e^{-\gamma x_2} p(x_1,x_2)$. Уравнение (1) примет вид

$$\Delta p(x_1,x_2) + (\delta - 2\gamma)\frac{\partial p(x_1,x_2)}{\partial x_2} + (\gamma^2 - \gamma\delta)p(x_1,x_2) = 0. \tag{18}$$

Условия (4), (5) перейдут в следующие

$$p(x_1,+0) - p(x_1,-0) = T_0(x_1), \ -1 < x_1 < 1; \tag{19}$$

$$\frac{\partial p(x_1,+0)}{\partial x_2} - \frac{\partial p(x_1,-0)}{\partial x_2} = T_1(x_1) - \left(\frac{\delta}{2} - \gamma\right) T_0(x_1). \tag{20}$$

Уравнения (2), (3) примут вид

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x_1} = 4\alpha_0 \frac{\partial p}{\partial x_1}; \tag{21}$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial x_2} = 4\alpha_0\left(\beta p + \frac{\partial p}{\partial x_2}\right). \tag{22}$$

Напомним, что граничные условия для компонент решения $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ имеют вид условий (16), (17), а также условий

$$u(x_1;+0) - u(x_1;-0) = 0; \quad v(x_1;+0) - v(x_1;-0) = 0. \tag{23}$$

Так как функции $T(x_1,x_2)$, как показано в [2], представляются через функции Макдональда – Бесселя, то используя известные асимптотики этих функций на бесконечности (см. [7], [8]), получим асимптотическую оценку функции $p(x_1,x_2)$. При условии $0 < \gamma < \delta$ имеем $p(x_1,x_2) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$, при $|x| \to \infty$. Отсюда (и из очевидной ограниченности функции $p(x_1,x_2)$ на любом компакте, вытекающей из теоремы 1) следует, что функция $p(x_1,x_2)$ является регулярным функционалом из пространства $S'(\mathrm{R}^2)$. Очевидна также единственность обобщенного решения $p(x_1,x_2)$ задачи (18)–(20) в классе регулярных функционалов из $S'(R^2)$, убывающих на бесконечности.

Поэтому, если для функции $p(x_1, x_2)$ выполнены условия определения 0.1, а для функций $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ выполнены условия определения 0.2, то решение задачи (16)–(23) удовлетворяет обобщенной задаче в $S'(\mathrm{R}^2)$, состоящей из уравнения

$$\Delta p(x_1,x_2) + (\delta - 2\gamma)\frac{\partial p(x_1,x_2)}{\partial x_2} + (\gamma^2 - \gamma\delta)p(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(T_0(x_1)\delta_{[-1;1]}\right) + \\ + \delta_{[-1;1]}\left(T_1(x_1) + \left(\frac{\delta}{2} - \gamma\right)T_0(x_1)\right) \tag{24}$$

и уравнений (21), (22). Очевидна единственность обобщенного решения $p(x_1,x_2)$ задачи (24) в классе регулярных функционалов из $S'(R^2)$, убывающих на бесконечности.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (21)–(22)

Обозначим через $F_{x\to s}$ преобразование Фурье в пространстве $S'(\mathrm{R}^2)$. Введем обозначения $R_k(s_1) = \int\limits_{-1}^{1} e^{ix_1 s_1} T_k(x_1)dx_1$, $k = 0;1$. Обозначим также $\widetilde{p}(s_1;s_2) = F_{x\to s}[p(x_1,x_2)]$; $\widetilde{u}(s_1;s_2) = F_{x\to s}[u(x_1,x_2)]$; $\widetilde{v}(s_1;s_2) = F_{x\to s}[v(x_1,x_2)]$.

Применим к уравнениям (21), (22) преобразование $F_{x\to s}$. Получим

$$-(|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta))\widetilde{p}(x_1,x_2)=(-is_2+0{,}5\delta-\gamma)R_0(s_1)+\ R_1(s_1); \qquad (25)$$

$$((\kappa+1)s_1^2+(\kappa-1)s_2^2+is_2\beta(\kappa-1))\widetilde{u}(s_1,s_2)+(2s_1s_2+is_1\beta(\kappa-1))\widetilde{v}(s_1,s_2)=$$
$$=4\alpha_0is_1\widetilde{p}(s_1,s_2); \quad (26)$$

$$(2s_1s_2+\beta(3-\kappa))\widetilde{u}(s_1,s_2)+((\kappa-1)s_1^2+(\kappa+1)s_2^2+i\beta(\kappa+1)s_2)\widetilde{v}(s_1,s_2)=$$
$$=4\alpha_0(is_2-\beta)\widetilde{p}(s_1,s_2). \quad (27)$$

Введем обозначение символа дифференциального оператора, стоящего в левой части системы (21), (22)

$$B=\begin{pmatrix} -(\kappa+1)\,s_1^2-(\kappa-1)\,s_2^2-i\beta\,(\kappa-1)\,s_2 & -2s_1s_2-i\beta\,(\kappa-1)\,s_1 \\ -2s_1s_2-i\beta\,(3-\kappa)\,s_1 & -(\kappa-1)\,s_1^2-(\kappa+1)\,s_2^2-i\beta\,(\kappa+1)\,s_2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Выразим $\widetilde{p}(s_1,s_2)$, из (25). Из (26), (27) получим

$$B(s_1,s_2)\cdot\begin{pmatrix}\widetilde{u}(s_1,s_2)\\ \widetilde{v}(s_1,s_2)\end{pmatrix}=\frac{(is_2-0{,}5\delta+\gamma)R_0(s_1)-R_1(s_1)}{|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta)}\begin{pmatrix}4\alpha_0is_1\\ 4\alpha_0(is_2-\beta)\end{pmatrix}. \quad (29)$$

В работе [6] показано, что

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot$$
$$\cdot\begin{pmatrix} -(\kappa-1)\,s_1^2-(\kappa+1)\,s_2^2-i\beta\,(\kappa+1)\,s_2 & 2s_1s_2+i\beta\,(\kappa-1)\,s_1 \\ 2s_1s_2+i\beta\,(3-\kappa)\,s_1 & -(\kappa+1)\,s_1^2-(\kappa-1)\,s_2^2-i\beta\,(\kappa-1)\,s_2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Причем определитель матрицы B имеет вид

$$\det B=\left(\kappa^2-1\right)\left(s_1^2+s_2^2\right)^2+$$
$$+2i\left(\kappa^2-1\right)s_2\left(s_1^2+s_2^2\right)\beta-(\kappa-1)\left((-3+\kappa)\,s_1^2+(1+\kappa)\,s_2^2\right)\beta^2. \quad (31)$$

Введем обозначения $s_1=|s|\cos\varphi;\ \ s_2=|s|\sin\varphi,\ \ 0\leqslant\varphi<2\pi$

Лемма 2.1. Существует постоянная $c_0>0$, такая что справедлива следующая оценка определителя $\det B$:

$$|\det B|\ \geqslant\ c_0|s|^{2{,}5}\sqrt{\left||\sin\varphi|-\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}\,|\cos\varphi|\right|}.$$

Доказательство. Преобразуем представление (31) к виду

$$\det B=(\kappa^2-1)(|s|^2+is_2\beta)^2+\beta^2(3-\kappa)(\kappa-1)s_1^2=(\kappa^2-1)\cdot$$
$$\cdot\begin{cases}\left(|s|^2+\,i\beta(|s_2|+\sqrt{\tfrac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)\right)\cdot\left(|s|^2+\,i\beta(|s_2|-\sqrt{\tfrac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)\right), \text{ при } s_2\ \geqslant 0;\\ \left(|s|^2-\,i\beta(|s_2|+\sqrt{\tfrac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)\right)\cdot\left(|s|^2-\,i\beta(|s_2|-\sqrt{\tfrac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)\right), \text{ при } s_2\ \leqslant 0.\end{cases}$$

Отсюда, как в случае $s_2\geqslant 0$, так и в случае $s_2\leqslant 0$ справедливо представление

$$|\det B|=\ (\kappa^2-1)\sqrt{|s|^4+\beta^2(|s_2|+\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)^2}\cdot\sqrt{|s|^4+\beta^2(|s_2|-\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)^2}.$$

Имеют место оценки $|s_2|+\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1| \geqslant \min\left\{1;\ \sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}\right\}|s|$;

$$\sqrt{|s|^4+\beta^2(|s_2|-\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)^2} \geqslant \sqrt{2|s|^2\left|\beta\,|s_2|-\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|\right|}.$$

Поэтому для определителя справедлива оценка $|\det B| \geqslant c_1|s|^{2,5}\sqrt{\left||\sin\varphi|-\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}\,|\cos\varphi|\right|}$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Так как справедлива оценка $\sqrt{|s|^4+\beta^2(|s_2|-\sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}|s_1|)^2}\geqslant|s|^2$, то окончательная оценка леммы 2.1 может быть записана следующим образом $|\det B| \geqslant c_1|s|^3$.

Из (29) имеем

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}(s_1,s_2) \\ \widetilde{v}(s_1,s_2) \end{pmatrix} = B^{-1}(s_1,s_2)\cdot\begin{pmatrix} 4\alpha_0 is_1 \\ 4\alpha_0(is_2-\beta) \end{pmatrix}\cdot\frac{(is_2-0{,}5\delta+\gamma)R_0(s_1)-R_1(s_1)}{|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta)}.$$

Решение обобщенной задачи (21), (22) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} u(x_1,x_2) \\ v(x_1,x_2) \end{pmatrix} = F^{-1}_{s\to x}B^{-1}(s_1,s_2)\cdot\begin{pmatrix} 4\alpha_0 is_1 \\ 4\alpha_0(is_2-\beta) \end{pmatrix}\cdot\frac{(is_2-0{,}5\delta+\gamma)R_0(s_1)-R_1(s_1)}{|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta)}.$$

Откуда $u(x_1,x_2)=\dfrac{4\alpha_0\,(1-\kappa)}{(2\pi)^2}\displaystyle\int\limits_{\mathrm{R}^2}\frac{e^{-ixs}is_1\left(|s|^2+\beta^2\right)((is_2-0{,}5\delta+\gamma)R_0(s_1)-R_1(s_1))}{\det B\,(s_1,s_2)\cdot\left(|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta)\right)}ds,$

$$v(x_1,x_2)=\frac{4\alpha_0\,(1-\kappa)}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathrm{R}^2}\frac{e^{-ixs}\left(is_2\left(|s|^2-\beta^2\right)-2\beta\,|s|^2\right)}{\det B\,(s_1,s_2)}\cdot\frac{(is_2-0{,}5\delta+\gamma)R_0(s_1)-R_1(s_1)}{|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta)}ds.$$

Введем в рассмотрение интегралы

$$I_{pqr}=F^{-1}_{s\to x}\left[\frac{(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B\,(|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta))}R_r(s_1)\right]=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}F_{-s\to x}\left[\frac{(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B\,(|s|^2+is_2(\delta-2\gamma)-(\gamma^2-\gamma\delta))}R_r(s_1)\right].$$

Тогда компоненты решения $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$ представимы в виде

$$\begin{aligned}u(x_1,x_2)&=-4\alpha_0(1-\kappa)I_{310}-4\alpha_0(1-\kappa)I_{130}+4\alpha_0(1-\kappa)\beta^2I_{110}-\\&-4\alpha_0(1-\kappa)(-0{,}5\delta+\gamma)I_{300}-4\alpha_0(1-\kappa)(-0{,}5\delta+\gamma)I_{120}-\\&-4\alpha_0(1-\kappa)(-0{,}5\delta+\gamma)\beta^2I_{100}-4\alpha_0\,(1-\kappa)\,I_{301}-4\alpha_0\,(1-\kappa)\,I_{121}+4\alpha_0\,(1-\kappa)\,\beta^2I_{101};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(x_1,x_2)&=4\alpha_0\,(1-\kappa)\,I_{220}+4\alpha_0\,(1-\kappa)\,I_{040}+\\&+4\alpha_0\,(1-\kappa)\,\beta(\beta-2(-0{,}5\delta+\gamma))I_{020}+4\alpha_0\,(1-\kappa)\,(2\beta-(-0{,}5\delta+\gamma))I_{210}+\\&+4\alpha_0\,(1-\kappa)\,(2\beta-(-0{,}5\delta+\gamma))I_{030}-4\alpha_0\,(1-\kappa)\,\beta^2(-0{,}5\delta+\gamma)I_{010}-\\&-8\alpha_0\beta\,(1-\kappa)\,(-0{,}5\delta+\gamma)I_{200}-4\alpha_0\,(1-\kappa)\,I_{211}-4\alpha_0\,(1-\kappa)\,I_{031}+\\&+4\alpha_0\,(1-\kappa)\,\beta^2I_{011}-8\alpha_0\,(1-\kappa)\,\beta I_{201}-8\alpha_0\,(1-\kappa)\,\beta I_{021}.\qquad(32)\end{aligned}$$

Таким образом, изучение компонент $u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)$ решения задачи (21), (22) сводится к изучению интегралов I_{pqr}.

3. ИЗУЧЕНИЕ ЭТАЛОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Представим $I_{pqr}(x_1,x_2)$ в виде суммы

$$I_{pqr}(x_1,x_2) = I^0_{pqr}(x_1,x_2) + I^1_{pqr}(x_1,x_2) + I^2_{pqr}(x_1,x_2),$$

где

$$I^0_{pqr}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{|s|<\delta} \frac{e^{ixs}(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B\left(|s|^2 - is_2(\delta-2\gamma) - (\gamma^2-\gamma\delta)\right)} R_r\left(s_1\right) ds; \tag{33}$$

$$I^1_{pqr}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\delta<|s|<N} \frac{e^{ixs}(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B\left(|s|^2 - is_2(\delta-2\gamma) - (\gamma^2-\gamma\delta)\right)} R_r\left(s_1\right) ds; \tag{34}$$

$$I^2_{pqr}(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{|s|>N} \frac{e^{ixs}(-is_1)^p(-is_2)^q}{\det B\left(|s|^2 - is_2(\delta-2\gamma) - (\gamma^2-\gamma\delta)\right)} R_r\left(s_1\right) ds. \tag{35}$$

Константы $\delta > 0;\ N > 0$ будут выбраны позже.

Лемма 3.1. Пусть $p+q \geqslant 1$, $\delta > \gamma > 0$, функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C([-1;1])$. Тогда интегралы $I^0_{pqr}(x_1,x_2)$ являются бесконечно дифференцируемыми, ограниченными со всеми производными функциями переменных (x_1, x_2) на любом компакте из R^2.

Доказательство. Из представления (33), леммы 2.1 и неравенства

$$\left||s|^2 + is_2(\delta-2\gamma) - (\gamma^2-\gamma\delta)\right| \geqslant Re\left(s|^2 + is_2(\delta-2\gamma) - (\gamma^2-\gamma\delta)\right) = |s|^2 - (\gamma^2-\gamma\delta) \tag{36}$$

вытекает оценка

$$\begin{aligned}
|I^0_{pqr}(x_1,x_2)| \ &\leqslant\ c \int\limits_{|s|\ \leqslant\ \delta} \frac{\left|\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1} T_r(x_1)dx_1\right| |s|^{p+q}}{|s|^{2,5}\sqrt{\left||\sin\varphi| - \sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}\,|\cos\varphi|\right|}\left(|s|^2 - (\gamma^2-\gamma\delta)\right)} ds \ \leqslant \\
&\leqslant 2c_1 \cdot \max_{x_1\ \in\ [-1;\,1]} |T_r(x_1)| \cdot \int\limits_{|s|\ \leqslant\ \delta} \frac{|s|^{p+q-2,5}}{\sqrt{\left||\sin\varphi| - \sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}\,|\cos\varphi|\right|}\left(|s|^2 + (-\gamma^2+\gamma\delta)\right)} ds \leqslant \\
&\leqslant \frac{2c_1 \cdot \max\limits_{x_1\ \in\ [-1;\,1]} |T_r(x_1)|}{\gamma\delta-\gamma^2} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\left||\sin\varphi| - \sqrt{\frac{3-\kappa}{\kappa+1}}\,|\cos\varphi|\right|} \int\limits_0^{\delta} \lambda^{p+q-1,5} d\lambda.
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\gamma\delta - \gamma^2 > 0$.

Отметим, что при $p + q \geqslant 1$ интегралы $I^0_{pqr}(x_1, x_2)$, как следует из последней оценки сходятся равномерно по внешним переменным, и, следовательно, являются непрерывными, равномерно по x_1,x_2 ограниченными функциями.

В завершение доказательства отметим, что любые производные функций $I^0_{pqr}(x_1,x_2)$ оцениваются аналогично случаю $p + q = 2$. Это связано с тем, что дифференцирование этих интегралов по внешним переменным увеличивает степень $|s|$ в числителе подынтегрального выражения, что позволяет компенсировать сингулярность знаменателя без дополнительных условий на функции $T_r(x_1)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $p+q \geqslant 0$, $\delta > \gamma > 0$. Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C([-1;1])$. Тогда интегралы $I^1_{pqr}(x_1,x_2)$ являются бесконечно дифференцируемыми, ограниченными на любом компакте из R^2 со всеми производными функциями переменных (x_1, x_2).

Доказательство. Из следствия 2.1 следует, что определитель B не обращается в нуль при $|s| \neq 0$, поэтому, если $0 < \delta < |s| < N$, то существует такая постоянная $k_0 = k_0(\delta, N) > 0$, что справедлива оценка $|\det B| \geqslant k_0$. Отсюда и из оценки (36) следует, что знаменатель подынтегрального выражения отличен от нуля.

Поэтому для интегралов (34) справедлива оценка

$$\left|D^\alpha_x I^1_{pqr}(x_1,x_2)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2\widetilde{k}} \int\limits_{\delta<|s|<N} |s|^{|\alpha|+p+q} \int\limits_{-1}^{1} |T_r(x_1)| dx_1 ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi^2\widetilde{k}_0} (\max\{1;\, N\})^{|\alpha|+p+q} \max_{x_1 \in [-1;\,1]} |T_r(x_1)| \int\limits_{\delta<|s|<N} 1\, ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi\widetilde{k}_0} (\max\{1;\, N\})^{|\alpha|+p+q} \max_{x_1 \in [-1;\,1]} |T_r(x_1)|(N^2-\delta^2).$$

Последняя оценка доказывает (см. [9]) утверждение леммы.

Перейдем к рассмотрению интегралов (35).

Лемма 3.3. Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Тогда существует постоянная $c_0 > 0$, такая, что справедлива оценка

$$|R_r(s_1)| = \left|\int\limits_{-1}^{1} e^{ix_1s_1} T_k(x_1) dx_1\right| \leqslant c_0(1+|s_1|)^{-1}.$$

Доказательство. Во-первых, очевидна оценка

$$|R_r(s_1)| \leqslant 2 \max_{x_1 \in [-1;\,1]} |T_r(x_1)|.$$

Далее, проинтегрируем $R_r(s_1)$ один раз по частям

$$R_r(s_1) = \int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1} T_r(x_1) dx_1 = \frac{1}{-is_1} \int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1} T_r(x_1) d[e^{-is_1x_1}] = \frac{1}{is_1} \int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1} T'_r(x_1) dx_1.$$

Из последнего равенства легко получить оценку

$$|R_r(s_1)| \leqslant \frac{1}{|s_1|} \left|\int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1} T'_r(x_1)\, dx_1\right| \leqslant \frac{2}{|s_1|} \max_{x_1\in[-1;1]} |T'_r(x_1)|.$$

Из этих оценок получаем:

$$|R_r(s_1)| \leqslant \begin{cases} \frac{4}{1+1} \max\limits_{x_1 \in [-1;\,1]} |T_r(x_1)| \\ \frac{4}{|s_1|+|s_1|} \max\limits_{x_1 \in [-1;\,1]} |T'_r(x_1)| \end{cases} \leqslant \begin{cases} \frac{4}{1+|s_1|} \max\limits_{x_1 \in [-1;\,1]} |T_r(x_1)|, & \text{при } 0 \leqslant |s_1| \leqslant 1; \\ \frac{4}{1+|s_1|} \max\limits_{x_1 \in [-1;\,1]} |T'_r(x_1)|, & \text{при } |s_1| > 1. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Заметим, что величина, обратная к определителю матрицы B представима в виде $(\det B)^{-1} = \left(\kappa^2 - 1\right)^{-1} |s|^{-4} \cdot \left(1 + O\left(|s|^{-1}\right)\right)^{-1}$, $|s| \to \infty$.

Прибавим и отнимем к интегралу (35) интеграл $\int\limits_{|s|>N} \dfrac{e^{ixs}(is_1)^p(is_2)^q}{|s|^6} R_r(s_1)ds$. Тогда интеграл (35) можно представить в виде суммы $I^2_{pqr}(x_1,x_2) = I^{20}_{pqr}(x_1,x_2) + I^{21}_{pqr}(x_1,x_2)$, где

$$I^{20}_{pqr}(x_1,x_2) = (2\pi)^{-2}(\kappa^2-1)^{-1} \int\limits_{|s|>N} e^{ixs}(is_1)^p(is_2)^q|s|^{-6}R_r(s_1)ds; \qquad (37)$$

$$I^{21}_{pqr}(x_1,x_2) = (2\pi)^{-2}(\kappa^2-1)^{-1} \int\limits_{|s|>N} e^{ixs}((is_1)^p(is_2)^q)O(|s|^{-7})R_r(s_1)ds;$$

Лемма 3.4. Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Тогда интеграл $I^{21}_{pqr}(x_1,x_2)$ вместе со своими первыми производными являются непрерывными ограниченными на R^2 функциями переменных (x_1,x_2),если $p+q \leqslant 4$.

Доказательство. Если $p+q \leqslant 4$, справедливо представление

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I^{21}_{pqr}(x_1,x_2) = \int\limits_{|s|>N} ((is_1)^p(is_2)^q)e^{ixs}O(|s|^{-7+m}) \int\limits_{-1}^{1} e^{-is_1x_1}T_r(x_1)dx_1ds,\ m=0;1;\ j=1;2.$$

Поэтому, на основании леммы 3.3, справедлива оценка

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I^{21}_{pqr}(x_1,x_2)\right| \leqslant \int\limits_{|s|>N} \frac{1}{|s|^{3-m}} \int\limits_{-1}^{1} |T_r(x_1)|\, dx_1 ds \leqslant c_0 \int\limits_{|s|>N} \frac{1}{|s|^2(1+|s_1|)} ds\,.$$

Перейдем в последней оценке к полярным координатам $\rho = |s|$; $s_1 = \rho\cos\varphi$; $s_2 = \rho\sin\varphi$, получим неравенство

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I^{21}_{pqr}(x_1,x_2)\right| \leqslant c_0 \int\limits_{|s|>N} \frac{1}{|s|^2(1+|s_1|)} ds \leqslant c_0 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_N^{\infty} \frac{d\rho d\varphi}{\rho(1+\rho|\cos\varphi|)}. \qquad (38)$$

Так как $1+\rho|\cos\varphi| \geqslant 2\rho^{0,5}|\cos\varphi|^{0,5}$, последнюю оценку можно продолжить следующим образом $\left|\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)^m I^{21}_{pqr}(x_1,x_2)\right| \quad \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{|\cos\varphi|^{0,5}} \int\limits_N^{\infty} \dfrac{d\rho}{\rho^{1,5}} < \infty.$

Сходимость последнего интеграла очевидна. На основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [9]), лемма доказана.

Следствие 3.1. В условиях леммы 3.4 для интегралов $I^{20}_{pqr}(x_1,x_2)$ при всех $p,q:\ p+q \leqslant 4$, $r=0;1$ также справедлива оценка с правой частью, как в неравенстве (38), поэтому указанные функции также будут непрерывны и равномерно по $x \in R^2$ ограничены.

Следствие 3.2 . Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Тогда интегралы $I^2_{pqr}(x_1,x_2)$ при всех $p,q:\ p+q \leqslant 4$, $r=0;1$ непрерывны и ограничены по (x_1,x_2), принадлежащим произвольному компакту из R^2.

Следствие 3.3. Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. На основании явных представлений компонент решения (32) и лемм 3.1, 3.2, заключаем, что $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ являются непрерывными и равномерно по $x \in R^2$ ограниченными функциями.

Утверждение следствия 3.3 вытекает из следствия 3.2 и леммы 3.4 а также представления (32), в котором, как легко видеть, для каждого из интегралов в правой части $1 \leqslant p+q \leqslant 4$.

Следствие 3.4. В условиях следствия 3.2 граничные условия (10)–(11) выполнены вследствие непрерывности $u(x_1,x_2)$, $v(x_1,x_2)$ в окрестности границы области разреза l.

Лемма 3.5. Пусть функции $T_0(x_1)$, $T_1(x_1)$ принадлежат пространству $C^1([-1;1])$. Тогда, если $1 \leqslant p+q \leqslant 5$, то верно равенство

$$I_{pqr}(x_1,\, x_2) =$$
$$= \frac{1}{48\pi\left(\kappa^2-1\right)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^{p+q}}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \left[K_2(\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}) \cdot \left((x_1-y_1)^2+x_2^2\right)\right] T_r\left(y_1\right) dy_1 + Q(x_1,\, x_2),$$

где $Q(x_1,x_2)$ — непрерывная функция.

Доказательство. Из лемм 3.1, 3.2 и 3.4 следует, что

$$I_{pqr}(x_1,\, x_2) = I^{20}_{pqr}(x_1,\, x_2) + Q_1(x_1,\, x_2),$$

где $Q_1(x_1,\, x_2) = I^{0}_{pqr}(x_1,\, x_2) + I^{1}_{pqr}(x_1,\, x_2) + I^{21}_{pqr}(x_1,\, x_2)$ — непрерывная функция.

Рассмотрим интеграл $I^{20}_{pqr}(x)$. Добавим и вычтем функцию

$$J_1(x_1,\, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2(\kappa^2-1)} \int\limits_{|s|\geqslant N} e^{ixs} \frac{(-is_1)^p(-is_2)^q R_r\left(s_1\right)}{\left(1+|s|^2\right)^3} ds_1 ds_2.$$

Тогда $I^{20}_{pqr}(x_1,\, x_2) = J_1(x_1,\, x_2) + Q_2(x_1,\, x_2)$, где функция $Q_2(x_1,\, x_2) = I^{20}_{pqr}(x_1,\, x_2) - J_1(x_1,\, x_2)$ оценивается следующим образом

$$|Q_2(x_1,\, x_2)| \leqslant c \int\limits_{|s|\geqslant N} \frac{|s|^{p+q}\left(1+3\,|s|^2+3\,|s|^4\right)}{|s|^6\left(1+|s|^2\right)^3} ds_1 ds_2 < \infty.$$

Далее, $J_1(x_1,\, x_2) = J_2(x_1,\, x_2) + Q_3(x_1,\, x_2)$, где

$$J_2(x_1,\, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2(\kappa^2-1)} \int\limits_{\mathrm{R}^2} e^{ixs} \frac{\left(is_1\right)^p\left(is_2\right)^q R_r\left(-s_1\right)}{\left(1+|s|^2\right)^3} ds_1 ds_2,$$

а $Q_3\left(x\right) = \frac{-1}{(2\pi)^2(\kappa^2-1)} \int\limits_{|s|\leqslant N} e^{ixs} \frac{(is_1)^p(is_2)^q R_r(-s_1)}{\left(1+|s|^2\right)^3} ds_1 ds_2$ можно оценить

$$|Q_3\left(x\right)| \leqslant c_1 \int\limits_{|s|\leqslant N} \frac{|s|^{p+q}}{\left(1+|s|^2\right)^3} ds_1 ds_2 = c_1 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{N} \frac{\lambda^{p+q}}{\left(1+\lambda^2\right)^3} d\lambda \leqslant c \cdot N^{p+q+2} < \infty.$$

На основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [9]), функции $Q_2(x_1,\, x_2)$ и $Q_3(x_1,\, x_2)$ являются непрерывными на R^2 функциями переменных $(x_1,\, x_2)$. То есть, $I_{pqr}(x_1,\, x_2) = J_2(x_1,\, x_2) + Q(x_1,\, x_2)$, где $Q(x_1,\, x_2) = \sum\limits_{i=1}^{3} Q_i(x_1,\, x_2)$ — непрерывная на

R^2 функция. Преобразуем $(2\pi)^2(\kappa^2-1)\cdot J_2(x_1,\, x_2)$ по теореме о свёртке:

$$\int\limits_{\mathrm{R}^2} e^{ixs}\left(-is_1\right)^p\left(-is_2\right)^q\left(1+|s|^2\right)^{-3}\int\limits_{-1}^{1} e^{iy_1s_1}T_r\left(y_1\right)dy_1ds_1ds_2=$$

$$=F_{s_2\to x_2}[F_{s_1\to x_1}[(-is_1)^p\left(-is_2\right)^q\left(1+|s|^2\right)^{-3}]*T_r\left(y_1\right)]=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{R}^1} F_{\substack{s_1\to(x_1-y_1)\\ s_2\to x_2}}[(is_1)^p\left(is_2\right)^q\left(1+|s|^2\right)^{-3}]T_r\left(y_1\right)dy_1=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial^{p+q}}{\partial x_1^p\partial x_2^q}F_{\substack{s_1\to(x_1-y_1)\\ s_2\to x_2}}[\left(1+|s|^2\right)^{-3}]T_r\left(y_1\right)dy_1.$$

Последнее равенство верно в силу свойств преобразования Фурье и финитности функций $T_r\left(y_1\right),\, r=\{0;\,1\}$.

В [7] приводится формула представления модифицированных функций Бесселя (функций Макдональда-Бесселя)

$$K_{\frac{n-a}{2}}\left(|x|\right)=2^{\frac{a-2}{2}}(2\pi)^{-1}\Gamma\left(0{,}5a\right)|x|^{\frac{n-a}{2}}F_{\xi\to x}[\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{a}{2}}].$$

Таким образом, справедливо равенство из утверждения леммы.

Лемма 3.6. Верны следующие равенства

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x_1^p\partial x_2^q}\left[K_2\left(|x|\right)\cdot|x|^2\right]=O\left(1\right),\, p+q=\{1,...,4\}\,;$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x_2^5}\left[K_2\left(|x|\right)\cdot|x|^2\right]=-\frac{x_2\left(3x_2^4+10x_1^2x_2^2+15x_1^4\right)}{|x|^6}+O\left(1\right);$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x_1\partial x_2^4}\left[K_2\left(|x|\right)\cdot|x|^2\right]=\frac{x_1\left(-3x_1^4+6x_1^2x_2^2+x_2^4\right)}{|x|^6}+O\left(1\right);$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x_1^2\partial x_2^3}\left[K_2\left(|x|\right)\cdot|x|^2\right]=-\frac{x_2\left(-3x_1^4+6x_1^2x_2^2+x_2^4\right)}{|x|^6}+O\left(1\right);$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x_1^3\partial x_2^2}\left[K_2\left(|x|\right)\cdot|x|^2\right]=-\frac{x_1\left(-3x_2^4+6x_1^2x_2^2+x_1^4\right)}{|x|^6}+O\left(1\right);$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x_1^4\partial x_2}\left[K_2\left(|x|\right)\cdot|x|^2\right]=\frac{x_2\left(-3x_2^4+6x_1^2x_2^2+x_1^4\right)}{|x|^6}+O\left(1\right).$$

Здесь функции $O(1)$ ограничены по совокупности переменных x_1, x_2, принадлежащих любому компакту из R^2.

Доказательство. На основании формул (см. [8])

$$K_n'\left(z\right)=\frac{K_{n-1}\left(z\right)+K_{n+1}\left(z\right)}{-2},\quad K_{-n}\left(z\right)=K_n\left(z\right),$$

и асимптотических представлений [8]

$$K_0\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(k!\right)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\psi\left(k+1\right)-\ln\frac{z}{2}\right),$$

$$K_n\left(z\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k\left(n-k-1\right)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}\Big(2\ln\frac{z}{2}-\psi\,(k+1)-\psi\,(k+n+1)\Big),$$

где $\psi\,(1)=-\gamma$, $\psi\,(k+1)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}$, γ — постоянная Эйлера, получаем справедливость доказываемых равенств. Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство теоремы 6. Интегральное представление функций $u(x_1,\,x_2)$ и $v(x_1,\,x_2)$ можно переписать в виде линейной комбинации (32) интегралов $I_{pqr}(x_1,\,x_2)$. Из лемм 3.5 и 3.6 следует, что линейная комбинация таких интегралов при $1\leqslant p+q\leqslant 4$ является непрерывной функцией, так как величина $\int\limits_{-1}^{1} O\,(1)\,T_r\,(y_1)\,dy_1$ в представлении (38), очевидно непрерывна и ограничена на R^2. Значит, сами функции $u(x_1,\,x_2)$ и $v(x_1,\,x_2)$ непрерывны по совокупности переменных и ограничены на R^2, т. к. сумма $p+q$ в их представлениях не превосходит 4.

Таким образом, при рассмотрении производных нас будут интересовать только слагаемые с $p+q>4$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\,x_2)=4\alpha_0\,(\kappa-1)\,(I_{410}+I_{230})+\sum_{p+q=1}^{4}c_{pqr}I_{pqr},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,\,x_2)=4\alpha_0\,(\kappa-1)\,(I_{320}+I_{140})+\sum_{p+q=1}^{4}c_{pqr}I_{pqr},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1,\,x_2)=4\alpha_0\,(\kappa-1)\,(I_{320}+I_{140})+\sum_{p+q=1}^{4}c_{pqr}I_{pqr},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1,\,x_2)=4\alpha_0\,(\kappa-1)\,(I_{230}+I_{050})+\sum_{p+q=1}^{4}c_{pqr}I_{pqr}.$$

Из лемм 3.5 и 3.6 непосредственным вычислением с использованием представления $T_r(y_1)=T_r(x_1)+O(x_1-y_1)$ получаются доказываемые представления. Теорема доказана.

Следствие 4.1. Из выше доказанных утверждений (лемма 3.7) и условия $T_0(\pm1)=0$ следует выполнение условий (23) по непрерывности, из чего вытекает соответствующее утверждение теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. El-Borgi, S. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // International Journal of Engineering Science. — 2004. — № 42. — С. 371–393.

2. Логинова, Е. А. Построение решения задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной / Е. А. Логинова // Вестник СПбГУ серия 1. Математика. Механика. Астрономия. — 2012. — Вып. 1. — С. 40–47.

3. Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности / А. В. Глушко, Е. А. Логинова, В. Е. Петрова, А. С. Рябенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 695—703.

4. Глушко, А. В. Асимптотические свойства решения задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / А. В. Глушко, Е. А. Логинова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 2. — С. 47–50.

5. Глушко, А. В. Решение задачи деформаций неоднородного материала с трещиной под воздействием нагрузок / А. В. Глушко, Е. А. Логинова, С. В. Пронина // Сборник научн. трудов по итогам международной научно-практической конференции "Актуальные вопросы естественных и математических наук в современных условиях развития страны". — Санкт-Петербург: ИЦРОН, 2017. — Вып. IV. — С. 11–15.

6. Глушко, А. В. Асимптотическое поведение производных решения задачи упругих деформаций неоднородного материала под воздействием механических нагрузок / А. В. Глушко, Е. А. Логинова, С. В. Пронина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 70–87.

7. Никольский, С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1977. — 456 с.

8. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1 / Г. Н. Ватсон. — М. : Издательство иностранной литературы, 1949. — 787 с.

9. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 527 с.

REFERENCES

1. El-Borgi S., Erdogan F., Hidri L. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading. International Journal of Engineering Science, 2004, no. 42, pp. 371–393.

2. Loginova E.A. Construction of a solution to the problem of heat distribution in a non-uniform material with a crack. [Loginova E.A. Postroenie resheniya zadachi o raspredelenii tepla v neodnorodnom materiale s treshhinoyj]. *Vestnik SPbGU seriya 1. Matematika. Mexanika. Astronomiya — Bulletin of St. Petersburg University. series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2012, iss. 1, pp. 40–47.

3. Glushko A.V., Loginova E.A., Petrov V.E., Ryabenko A.S. Study of stationary heat distribution in a plane with a crack at a variable coefficient of internal thermal conductivity. [Glushko A.V., Loginova E.A., Petrova V.E., Ryabenko A.S. Izuchenie stacionarnogo raspredeleniya tepla v ploskosti s treshhinoyj pri peremennom koefficiente vnutrenneyj teploprovodnosti]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 4, pp. 695–703.

4. Glushko A.V., Loginova E.A. Asymptotic properties of the solution of the problem of stationary heat distribution in a non-uniform plane with a crack. [Glushko A.V., Loginova E.A. Asimptoticheskie svoyjstva resheniya zadachi o stacionarnom raspredelenii tepla v neodnorodnoyj ploskosti s treshhinoyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 47–50.

5. Glushko A.V., Loginova E.A., Pronina S.V. Solution of the problem of deformation of heterogeneous material with a crack under the influence of loads. [Glushko A.V., Loginova E.A., Pronina S.V. Reshenie zadachi deformaciyj neodnorodnogo materiala s treshhinoyj pod vozdeyjstviem nagruzok]. Collection of scientific works on the results of the international scientific-practical conference "Topical issues of natural and mathematical Sciences in the modern conditions of the country's development", Saint-Petersburg, 2017, iss. IV, pp. 11–15.

6. Glushko A.V., Loginova E.A., Pronina S.V. Asymptotic behavior of derivatives for solving the problem of elastic deformations of heterogeneous material under the influence of mechanical loads. [Glushko A.V., Loginova E.A., Pronina S.V. Asimptoticheskoe povedenie proizvodnyx resheniya zadachi uprugix deformaciyj neodnorodnogo materiala pod vozdeyjstviem mexanicheskix nagruzok]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 70–87.

7. Nikolsky S.M. Approximation of functions of many variables and embedding theorem. [Nikol'skiyj S.M. Priblizhenie funkciyj mnogix peremennyx i teoremy vlozheniya]. Moscow, 1977, 456 p.

8. Watson G.N. Theory of Bessel functions. P. 1. [Vatson G.N. Teoriya besselevyx funkciyj. Ch. 1]. Moscow, 1949, 787 p.

9. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. [Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoyj fiziki]. Moscow, Nauka, 1976, 527 p.

Глушко А. В., доктор физико-математических наук; профессор, зав. кафедрой уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Логинова Е. А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: vangog2007@list.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Астахова Е. В., аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: vangog2007@list.ru
Тел.: +7(473)220–86–18

Glushko A. V., doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: kuchp2@math.vsu.ru
Tel.: +7(473)220–86–18

Loginova E. A., PhD of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of department of partial differential equations and theory of probabilities, mathematical Faculty of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: vangog2007@list.ru
Tel.: +7(473)220–86–18

Astahova E. V.,
E-mail: vangog2007@list.ru
Tel.: +7(473)220–86–18