УДК 514.8

СТРОГАЯ ТЕОРИЯ ПОТОКОВ ГРАДИЕНТА И ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ВЫПУКЛОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ТИПА ХЕЛЛИНГЕРА-КАНТОРОВИЧА-ВАССЕРШТЕЙНА НА ПРОСТРАНСТВЕ КОНЕЧНЫХ МЕР РАДОНА*

Д. А. Воротников

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 10.01.2018 г.

Аннотация. Мы развили строгую теорию потоков градиента и геодезической выпуклости относительно геометрической структуры типа Хеллингера-Канторовича-Вассерштейна на пространстве конечных мер Радона. Это даст нам возможность развить вариационную схему типа де Джорджи-Джордана-Киндерлерера-Отто для построения решений этих потоков градиента, хотя мы также будем использовать альтернативные методы, такие как аппроксимационно-топологический метод. Так как различные системы УЧП типа реакции-диффузии и динамики популяций могут быть записаны как потоки градиента относительно наших структур, мы применим этот подход к ним. Кроме того, структура потока градиента дает возможность естественным образом использовать энтропийные методы и геометрическую интуицию, чтобы изучить предельное поведение таких систем через так называемые неравенства энтропии и продукции энтропии, которые иногда следуют из универсальных соображений, но иногда могут быть легко угаданы с помощью градиентно-потоковой интуиции и затем строго доказаны другим методом. На этом пути доказаны некоторые тонкие функциональные неравенства, которые представляют независимый интерес. Также изучены свойства уравнений Гамильтона-Якоби, которые характеризуют геодезические в нашей геометрической структуре и найдена связь с теорией Обри-Мэтера.

Ключевые слова: строгая теория потоков градиента, геометрическая структура типа Хеллингера-Канторовича-Вассерштейна, мера Радона, уравнение Гамильтона-Якоби.

RIGOROUS THEORY OF GRADIENT FLOWS AND GEODESIC CONVEXITY WITH RESPECT TO GEOMETRIC STRUCTURE OF HELLINGER-KANTOROVICH-WASSERSTEIN TYPE ON THE SPACE OF FINITE RADON MEASURES

D. A. Vorotnikov

Abstract. We have established a rigorous theory of gradient flows and displacement convexity with respect to HKW geometric structure on the space of finite Radon measures. This will give us opportunity to develop a kind of variational de Giorgi-Jordan-Kinderlehrer-Otto scheme for construction of the solutions of these gradient flows, although we will also try other methods such as the topological approximation method. Since various reaction-diffusion and population dynamics PDE systems can be written as gradient flows with respect to this structure, we will apply this approach to them. Moreover, the gradient flow structure

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037)

© Воротников Д. А., 2018

paves the way to naturally use entropy methods and geometric intuition to study the long-time behaviour of such systems via so-called entropy-entropy production inequalities which sometimes follow from generic considerations but sometimes can be easily guessed from the gradient flow intuition and then rigorously reproved. On this way we have proved some fine functional inequalities which are of independent interest. We have studied the properties of the Hamilton-Jacobi equations which characterize the geodesics in our geometric structure and we have found relations with the Aubry-Mather theory.

Keywords: rigorous theory of gradient flows, geometric structure of Hellinger-Kantorovich-Wasserstein type, Radon measures, Hamilton-Jacobi equation.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МОТИВАЦИЯ

Пусть Ω — открытая связная ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей и ν — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Мы исследуем неотрицательные решения задачи

$$\partial_t u = -\operatorname{Div}(u\nabla f) + fu, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{2}$$

$$u = u^0, \qquad (x,t) \in \Omega \times 0. \tag{3}$$

Здесь u — неизвестная функция, $f = f(x, u(x))$ заданная нелинейная функция от x и u.

Заметим, что нелинейное уравнение Фоккера-Планка

$$\partial_t u = -\operatorname{Div}(u\nabla(f(x,u))) \tag{4}$$

выражает поведение случайных систем, возникающих в различных отраслях физики, химии и биологии, см. [1]–[4]. Для учета процессов создания и уничтожения массы, в [5] было предложено общее уравнение (1) реакции-диффузии-дрейфа. В рассмотрениях [5] (см. также [1]), важная роль отводится свободной энергии — функционалу, который с точностью до константы совпадает с нашим функционалом относительной энтропии $\mathcal{E}$, см. (20) ниже. Мы используем такую терминологию (хотя для специалистов по термодинамике свободная энергия включает (физическую) энтропию, внутреннюю энергию и температуру), потому что в математическом анализе удобно называть основной функционал Ляпунова энтропией, см. [6, p. 270].

С другой стороны, уравнение (1) — общая нелинейная модель для пространственной динамики популяции, которая стремится достигнуть *идеального свободного распределения* [7], [8] (т. е. такое распределение, которое в конце концов имеет место, при условии, что все индивиды свободны выбрать свое местоположение) в разнородной окружающей среде. Стратегия рассеивания определяется локальной характеристикой организмов, называемой *фитнесом* (см., например, [9], [10]). Фитнес проявляет себя как относительная скорость пролиферации, и одновременно влияет на рассеивание, так как особи двигаются вдоль градиента фитнеса, выбирая таким образом самое благоприятное направление. В (1) нужно тогда считать, что $u(x,t)$ это плотность организмов, и $f(x,u)$ — фитнес. Равновесное решение $u(x) \equiv m(x)$, т. е. когда фитнес тождественно равен нулю, соответствует идеальному свободному распределению. Классическая модель модель [9], [11] использует линейный логистический фитнес

$$f = m(x) - u, \tag{5}$$

но вообще говоря это может быть любая нелинейная функция пространственной переменной и плотности, см. [10]. Предположения (10), (11), (12) в этом смысле естественны, так как они просто подразумевают, что фитнес является убывающей функцией относительно плотности населения (поскольку ресурсы ограничены), будучи положительным для очень маленькой плотности и отрицательным для очень большой плотности. Наша Теорема 5 показывает, что плотность популяции сходится к идеальному свободному распределению с экспоненциальной скоростью.

Существование слабых решений для движимого фитнесом рассеивания типа (1) — (3) с логистическим фитнесом (5) был показано в [12], а экспоненциальная сходимость в смысле энтропии к m была установлена нами в [13]. Подобные результаты для модели распространения нескольких взаимодействующих популяций (с логистическим фитнесом) могут быть найдены в [14]. Похожая модель с двумя популяциями была исследована в [15], [16], где одна популяция использует стратегию фитнес-рассеивания как описано выше, а другая распространяется свободно или не перемещается вообще. Система двух взаимодействующих популяций с определенной нелинейной функцией фитнеса недавно рассмотрена в [17]. Эта работа является единственным существующим математическим исследованием нелогистической модели фитнеса, о которой мы знаем.

Но, возможно, наша главная мотивация исследовать (1) это то, что это поток градиента функционала $\mathcal{E}$ относительной энтропии относительно интересной и недавно введенной метрики на пространстве мер Радона, которая связана с неравновесным оптимальным переносом массы (т. е., не сохраняющего общую транспортируемую массу), и которая известна в литературе как метрика Хеллингера-Канторовича или метрика Вассерштейна-Фишера-Рао [13], [18]–[20]. Эта метрика задает на множестве мер Радона формальную (бесконечномерную) риманову структуру $\langle\cdot,\cdot\rangle$, что дало возможность развить дифференциальное исчисление первого и второго порядка [13] в духе Отто [6], [21], [22]. В частности, можно вычислить метрические градиенты функционалов типа

$$\mathcal{F}(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u(x))\,\mathrm{d}x.$$

Они задаются формулой

$$\operatorname{grad}\mathcal{F}(u) = -\operatorname{Div}\left(u\nabla\frac{\delta F}{\delta u}\right) + u\frac{\delta F}{\delta u}, \tag{6}$$

где $\frac{\delta F}{\delta u} = \partial_u F(x,u)$ обозначает первую вариацию относительно u и $\nabla = \nabla_x$ является обычным градиентом в евклидовом пространстве, см. ниже. Так как $f = -\partial_u E$, мы можем переписать (1) как поток градиента

$$\partial_t u = -\operatorname{grad}\mathcal{E}(u). \tag{7}$$

Тождество продукции энтропии (21), которое кстати было уже известно Франку [5], есть тогда ни что иное как только типичное свойство потоков градиента

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(u) = -\langle\operatorname{grad}\mathcal{E}(u), \operatorname{grad}\mathcal{E}(u)\rangle_u.$$

В этой связи мы напомним, что для метрических потоков градиента, каким является (7), геодезическая выпуклость направляющего функционала энтропии (или по крайней мере полувыпуклость, т. е., λ–выпуклость с отрицательным постоянным λ) имеет большое значение [6], [21]–[24]. Наличие такой выпуклости позволяет применять схемы типа ДеДжорджи (минимальных движений) [23], [25] для того, чтобы построить решения потока градиента. Кроме того, λ–выпуклость со строго положительным λ позволяет применить процедуру Бакри-Эмери, которая является обычным методом доказательства экспоненциальной сходимости относительной энтропии к нулю. Схемы минимального движения для потоков градиента в метрике Хеллингера-Канторовича для геодезически выпуклых функционалов и для близких к ним уравнений реакции-диффузии были предложены в [26], [27].

Наша энтропия $\mathcal{E}$ является геодезически $(-1/2)$–выпуклой относительно структуры Хеллингера-Канторовича, если $f = 1 - u^\alpha$, $\alpha > 0$, но она даже не полувыпукла при $f = u^\alpha - 1$, $\alpha < 0$ и при $f = -\log u$ (последний вариант соответствует интересному случаю энтропии Больцмана). Пространственная разнородность еще более усложняет ситуацию. Квадратная (логистическая) многокомпонентная энтропия, которую рассматривали в [14], [28], даже не полувыпукла. Все это можно видеть, вычисляя гессиан энтропии, см. ниже; невыпуклость энтропии Больцмана относительно метрики Хеллингера-Канторовича была также упомянута в [19], [20], [26], [27]. Однако Сантамброджо [24] подчеркивает, что отсутствие геодезической выпуклости не является универсальным препятствием для исследования потоков градиента; наши текущие результаты, а также в [13], [14], [28], [29] иллюстрируют эту идею.

При рассмотрении задачи (1)–(3), мы всегда делаем следующие предположения относительно функции $f\colon \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$:

$$f \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,\infty)) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \tag{8}$$

$$uf, uf_x \in C(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)) \tag{9}$$

$$f_u < 0, \tag{10}$$

$$\limsup_{u\to\infty} f(x,u) < 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{11}$$

$$\liminf_{u\to+0} f(x,u) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{12}$$

$$|f(x,u)| + u|f_u(x,u)| + u|f_{xu}(x,u)| \leqslant g(u) \quad \text{п.в. } u > 0;\ g \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,\infty), \tag{13}$$

$$(uf_x)\big|_{u=0} = 0. \tag{14}$$

Иногда мы также будем предполагать, что

$$\text{или } f_x = 0 \text{ при больших } u \quad \text{или} \quad \lim_{u\to\infty} f(x,u) = -\infty\ \forall x \in \overline{\Omega} \tag{15}$$

$$\text{или } f_x = 0 \text{ при больших } u \quad \text{или} \quad \lim_{u\to+0} f(x,u) = \infty\ \forall x \in \overline{\Omega} \tag{16}$$

Мы не требуем, что f должна быть определена при $u = 0$, чтобы не исключить интересные случаи, такие как $f = -(\log u + V(x))$ (который соответствует линейному уравнению Фоккера-Планка, см. [1], [25]) и $f = u^\alpha - 1$, $\alpha < 0$ (быстрая диффузия, см. [30]). Однако мы считаем в (9) то, что функции uf и uf_x допускают непрерывные расширения к $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$. Это гарантирует, что условия в (1) имеют смысл. Кроме того, предположение (14) позволяет избежать определенных осложнений с продукцией энтропии, что будет видно ниже.

Предположение (10) важно, оно гарантирует параболичность (1). Уравнение становится выродившимся или сингулярным только если $u = 0$ или u велико. Последнее не так страшно для нас, так как мы работаем с ограниченными решениями в дальнейшем.

Предположения (11), (12) гарантируют существование положительного равновесия, см. ниже.

Оценка (13) гарантирует, что энтропия и энергия уравнения корректно определены и хорошо себя ведут. Обратим внимание на то что, по крайней мере, некоторые ограничения на рост f_u при $u \to 0$ неизбежны, так как возникающий при этом оператор очень быстрой диффузии, как известно, ведет себя некорректно [31].

Условия (15) и (16) это технические предположения, необходимые для получения L^∞-оценок (следовательно, для теоремы существования) и для контроля энергии при больших u в доказательстве Теоремы 2. Однако они не нужны везде, таким образом, мы явно упоминаем их, когда возникает потребность.

Из (10)–(12) следует, что для всех $x \in \overline{\Omega}$ имеется единственное $m(x) > 0$ такое, что

$$f(x, m(x)) = 0.$$

Очевидно, что $m \in C^2(\overline{\Omega})$. Это стационарное решение задачи (1), (2). Как мы увидим, все нестационарные решения сходятся к m при больших временах.

2. ЭНЕРГИЯ И ЭНТРОПИЯ

Введем понятия энергии и энтропии для уравнения (1) и понятие слабого решения.

Положим

$$\Phi(x,u) = -\int\limits_0^u \xi f_u(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad \Psi(x,u) = \int\limits_0^u \Phi(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Тогда

$$\Phi(x,0) = \Psi(x,0) = 0,\ \Phi_u = -uf_u,\ \Phi_x = -\int\limits_0^u \xi f_{xu}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi,\ \Psi_u = \Phi.$$

Как Φ, так и Ψ неотрицательны и строго возрастают относительно u.

Так как u неотрицательная функция x и возможно t, L^∞-оценка на u дает L^∞-оценку на $\Phi(\cdot, u(\cdot))$, т. е. оператор Немыцкого Φ L^∞-ограничен. То же касается Ψ.

Пусть u классическое решение (1)–(3). Уравнение (1) может быть эквивалентно записано в виде

$$\partial_t u = \Delta\Phi - \mathrm{Div}(\Phi_x + uf_x) + uf. \tag{17}$$

Умножая на $\Phi(x, u(x,t))$ и интегрируя по Ω, мы получаем

$$\partial_t \int\limits_\Omega \Psi\,\mathrm{d}x = -\int\limits_\Omega |\nabla\Phi|^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega (\Phi_x + uf_x)\cdot\nabla\Phi\,\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega uf\Phi\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

Мы называем функционал

$$\mathcal{W}(u) = \int\limits_\Omega \Psi(x, u(x))\,\mathrm{d}x$$

энергией задачи (1)–(3) и формулу (18) *энергетическим равенством.* Таким образом *всякое классическое решение* (1)–(3) *удовлетворяет энергетическому равенству* (18).

Определение 1. Пусть $u^0 \in L^\infty(\Omega)$. Функция $u \in L^\infty(Q_T)$ называется *слабым решением* (1)–(3) на $[0,T]$ если $\Phi(\cdot, u(\cdot)) \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ и

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (u\partial_t\varphi + (-\nabla\Phi + \Phi_x + uf_x)\cdot\nabla\varphi + fu\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_\Omega u^0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \tag{19}$$

для любой $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T])$ такой, что $\varphi(x,T) = 0$; элемент $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^\infty(\Omega))$ есть слабое решение (1)–(3) на $[0,\infty)$ если для всех $T > 0$ он является таковым на $[0,T]$.

Положим теперь

$$E(x,u) = -\int\limits_{m(x)}^u f(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Из (13) следует что E определен и непрерывен на $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$. Поскольку f убывает и $f(x,m(x)) = 0$, то ясно что $E \geqslant 0$ и $E(x,u) = 0$ если и только если $u = m(x)$. Относительная *энтропия* уравнения (1) это функционал

$$\mathcal{E}(u) = \int\limits_{\Omega} E(x,u(x))\,\mathrm{d}x. \tag{20}$$

Заметьте, что он определен, по крайней мере, для $u \in L^{\infty}(\Omega)_{+}$.

Непосредственное вычисление показывает, что для положительного классического решения из (1)–(3) мы имеем

$$\partial_t \mathcal{E}(u) = -\int\limits_{\Omega} u(f^2 + |\nabla f|^2)\,\mathrm{d}x. \tag{21}$$

Уравнение (21) называют *тождеством продукции энтропии* и интеграл справа из (21) называют продукцией или производством энтропии. Однако член $\int_{\Omega} u|\nabla f|^2\,\mathrm{d}x$ может не иметь никакого смысла для нулевого или негладкого u. Чтобы обобщить определение производства энтропии, мы используем тождество

$$u|\nabla f|^2 = \frac{1}{u}|-\nabla\Phi + \Phi_x + uf_x|^2 \quad (u > 0).$$

Таким образом, мы можем определить производство энтропии для таких функций формулой

$$D\mathcal{E}(u) = \int\limits_{\Omega} uf^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{[u>0]} \frac{1}{u}|-\nabla\Phi + \Phi_x + uf_x|^2\,\mathrm{d}x,$$

где второй интеграл справа может быть бесконечным. Таким образом мы видим что *любое положительное классическое решение* (1)–(3) *удовлетворяет тождеству продукции энтропии*

$$\partial_t \mathcal{E}(u) = -D\mathcal{E}(u). \tag{22}$$

Как обычно, в случае слабых решений устанавливаются не тождества (18) и (22), а скорее соответствующие неравенства, то есть *энергетическое неравенство*

$$\partial_t \mathcal{W}(u) \leqslant \int\limits_{\Omega} \big(-|\nabla\Phi|^2 + (\Phi_x + uf_x)\cdot\nabla\Phi + uf\Phi\big)\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

и *неравенство продукции энтропии*

$$\partial_t \mathcal{E}(u) \leqslant -D\mathcal{E}(u). \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть f удовлетворяет* (8)–(14) *и* (15). *Пусть $U \subset L^{\infty}_{+}(\Omega)$ множество функций такое, что для всех $u \in U$, мы имеем $\Phi(\cdot,u(\cdot)) \in H^1(\Omega)$ и*

$$\inf_{u\in U} \|u\|_{L^1(\Omega)} > 0. \tag{25}$$

Тогда существует константа C_U такая, что

$$\mathcal{E}(u) \leqslant C_U D\mathcal{E}(u) \quad (u \in U). \tag{26}$$

Теорема 2 следует из общего функционального неравенства устанавливаемого ниже.

Теорема 3. *Пусть f удовлетворяет* (8)–(14) *и* (15), (16). *Тогда для всех $u^0 \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ существует неотрицательное слабое решение $u \in L^{\infty}(\Omega \times (0,\infty))$ задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. (L^∞-оценка)

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\infty))} \leqslant \inf\left\{\xi \geqslant 0\colon \sup_{x\in\Omega} f(x,\xi) \leqslant -\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f^-(x,u^0(x))\right\}; \tag{27}$$

2. u удовлетворяет (23) *в смысле мер и*

$$\operatorname*{ess\,lim\,sup}_{t\to+0} \mathcal{W}(u(t)) \leqslant \mathcal{W}(u^0); \tag{28}$$

3. u удовлетворяет (24) *в смысле мер и*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t>0} \mathcal{E}(u(t)) \leqslant \mathcal{E}(u^0); \tag{29}$$

4. (нижняя L^1-оценка)

$$\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} \geqslant \|\min(u^0,m)\|_{L^1(\Omega)} \quad a.a.\ t>0. \tag{30}$$

Теорема 3, с необходимыми изменениями, также имеет место в случае уравнения Фоккера-Планка (4) без реакции. Даже в этом случае, наши условия на f нелинейности более слабые, чем имеющиеся в литературе, например, [30], [32]–[38] и ссылки в них.

В общем случае единственность решений не имеет места из-за нелипшицевого члена реакции. Однако следующая теорема показывает, что наши слабые решения единственны, если начальные данные отделены от нуля.

Для $c\in\mathbb{R}$, определим $u_c \in C^2(\overline{\Omega})$ посредством

$$f(x,u_c(x)) = c. \tag{31}$$

Так как f монотонна по u, функция u_c единственна, но не обязана существовать при каждом c. Обратим внимание, что $u_0 = m$.

Теорема 4. *Пусть f удовлетворяет* (8)–(14) *и* (15), (16). *Тогда для любого $u^0 \in L^\infty_+$ такого, что*

$$\kappa \leqslant u^0 \leqslant \frac{1}{\kappa} \quad \text{п.в. на } \Omega$$

с некой константой $\kappa > 0$, существует единственное неотрицательное слабое решение

$$u \in L^\infty_+(\Omega\times[0,\infty)) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^1(\Omega)),$$

удовлетворяющее следующим дополнительным свойствам: i) верхняя оценка (27) *и нижняя оценка* (30)*; ii) энергетическое и энтропийное неравенства* (28) *и* (29)*; iii) ограниченное сжатие в следующем смысле*

$$\int_\Omega (u-u_c)^+\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (u^0-u_c)^+\,\mathrm{d}x \quad (c\leqslant 0), \tag{32}$$

$$\int_\Omega (u-u_c)^-\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (u^0-u_c)^-\,\mathrm{d}x \quad (c\geqslant 0) \tag{33}$$

там, где u_c имеет смысл; iv) если $\widehat{u}$ есть другое решение с начальным данным $\widehat{u}^0$, имеет место L^1-сжатие:

$$\|(u(t)-\widehat{u}(t))^+\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \mathrm{e}^{L_\kappa t}\|(u^0-\widehat{u}^0)^+\|_{L_1(\Omega)}. \tag{34}$$

В соответствии с предположениями Теоремы 3, правая часть (27) всегда конечна. Кроме того, если u^0 удовлетворяет оценке $\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant a$, неравенство (27) обеспечивает оценку $\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\infty))} \leqslant C_a$.

Следующая теорема показывает, что решения, которые мы построили, экспоненциально сходятся к m. При этом (16) не требуется для сходимости.

Теорема 5. *Предположим, что выполнено* (15) *и слабое решение* u (1)–(3) *с* $u^0 \not\equiv 0$ *удовлетворяет неравенствам энергии и продукции энтропии, а также* L^1*-оценке* (30). *Тогда* u *сходится к* m *в следующем смысле:*

$$\mathcal{E}(u(t)) \leqslant \mathcal{E}(u^0)\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad \text{п.в. } t > 0, \tag{35}$$

где $\gamma > 0$ *не зависит от начальных данных, удовлетворяющих*

$$\|\min(u^0, m)\|_{L^1(\Omega)} \geqslant c \tag{36}$$

с неким $c > 0$.

3. МЕТРИКА ХЕЛЛИНГЕРА-КАНТОРОВИЧА

Пусть
$$\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}_b^+(\mathbb{R}^d)$$
обозначает пространство мер Радона на $\mathbb{R}^d$. Для всякой кривой $\rho \in \mathcal{C}_w([0,1]; \mathcal{M}^+)$ мы обозначим $L^2(0,1; H^1(\mathrm{d}\rho_t))$ замыкание фактора по ядру полунормы пространства $\mathcal{C}_b^1((0,1) \times \mathbb{R}^d)$ с гильбертовой полунормой

$$\|\varphi\|^2_{L^2(0,1;H^1(\mathrm{d}\rho_t))} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla\varphi(t,x)|^2 + |\varphi(t,x)|^2 \right) \mathrm{d}\rho_t(x) \right) \mathrm{d}t.$$

Тогда $L^2(0,1; H^1(\mathrm{d}\rho_t))$ отождествляется с

$$\Big\{ \mathfrak{u} = (i(\mathfrak{u}), j(\mathfrak{u})) \,|\, i(\mathfrak{u}) \in L^2(0,1; L^2(\mathrm{d}\rho_t)), j(\mathfrak{u}) \in L^2(0,1; L^2(\mathrm{d}\rho_t; \mathbb{R}^d)),$$
$$\exists \{\varphi^k\} \subset \mathcal{C}_b^1((0,1) \times \mathbb{R}^d), \lim_{k\to\infty} \varphi^k = i(\mathfrak{u}) \text{ in } L^2(0,1; L^2(\mathrm{d}\rho_t)),$$
$$\lim_{k\to\infty} \nabla\varphi^k = j(\mathfrak{u}) \text{ in } L^2(0,1; L^2(\mathrm{d}\rho_t; \mathbb{R}^d)) \Big\}. \tag{37}$$

Можно показать, что если $\mathfrak{u} \in L^2(0,1; H^1(\mathrm{d}\rho_t))$, тогда $\mathfrak{u}_t := (i(\mathfrak{u})_t, j(\mathfrak{u})_t) \in H^1(\mathrm{d}\rho_t)$ корректно определено для почти всех $t \in (0,1)$, и

$$\|\mathfrak{u}\|^2_{L^2(0,1;H^1(\mathrm{d}\rho_t))} = \int\limits_0^1 \|\mathfrak{u}_t\|^2_{H^1(\mathrm{d}\rho_t)} \mathrm{d}t.$$

Мы будем писать u вместо $i(\mathfrak{u})$ и ∇u вместо $j(\mathfrak{u})$ для $\mathfrak{u} \in L^2(0,1; H^1(\mathrm{d}\rho_t))$. Гильбертова норма на $L^2(0,1; H^1(\mathrm{d}\rho_t))$ тогда есть

$$\|\mathfrak{u}\|^2_{L^2(0,1;H^1(\mathrm{d}\rho_t))} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla u_t(x)|^2 + |u_t(x)|^2 \right) \mathrm{d}\rho_t(x) \right) \mathrm{d}t.$$

Определение 6. Пусть (X,ϱ) — метрическое пространство, и σ — локально компактная хаусдорфова топология на X. Говорят, что ϱ (секвенциально) полунепрерывна снизу относительно σ, если для всех σ-сходящихся последовательностей

$$x_k \xrightarrow{\sigma} x, \qquad y_k \xrightarrow{\sigma} y$$

выполнено

$$\varrho(x,y) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \varrho(x_k,y_k).$$

Определение 7. Пусть даны две меры Радона $\rho_0,\rho_1 \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$. Определим

$$d^2(\rho_0,\rho_1) = \inf_{\mathcal{A}(\rho_0,\rho_1)} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u_t|^2 + |u_t|^2)\mathrm{d}\rho_t \right) \mathrm{d}t, \tag{38}$$

где $\mathcal{A}(\rho_0,\rho_1)$ состоит из пар $(\rho_t,\mathfrak{u}_t)_{t\in[0,1]}$ таких, что

$$\begin{cases} \rho \in \mathcal{C}_w([0,1];\mathcal{M}^+), \\ \rho|_{t=0} = \rho_0; \quad \rho|_{t=1} = \rho_1, \\ \mathfrak{u} \in L^2(0,T;H^1(\mathrm{d}\rho_t)), \\ \partial_t\rho_t + \operatorname{Div}(\rho_t\nabla u_t) = \rho_t u_t \quad \text{в смысле распределений.} \end{cases}$$

Теорема 8. *d есть невырожденная конечная метрика на $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$.*

Теорема 9. *$(\mathcal{M}^+,d)$ есть полное метрическое пространство, и d метризует узкую сходимость мер на $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^d)$.*

Теорема 10. *Метрика d полунепрерывна снизу относительно $*$-слабой топологии на $\mathcal{M}^+$.*

Теорема 11. *Любые два элемента $\rho_0,\rho_1 \in \mathcal{M}^+$ могут быть соединены геодезической, и инфимум в (38) всегда достигается на (узко непрерывной) кривой ρ такой, что $d(\rho_t,\rho_s) = |t-s|d(\rho_0,\rho_1)$ и потенциале $\mathfrak{u} \in L^2(0,1;H^1(\mathrm{d}\rho_t))$ таком, что $\|\mathfrak{u}_t\|_{H^1(\mathrm{d}\rho_t)} = cst = d(\rho_0,\rho_1)$ для п.в. $t \in [0,1]$.*

Можно показать, что геодезические (точнее, экспоненциальное отображение) удовлетворяют системе из транспортного уравнения и уравнения типа Гамильтона-Якоби

$$\begin{cases} \partial_t\rho_t = -\operatorname{Div}(\rho_t\nabla u_t) + \rho_t u_t, \\ \partial_t u_t = -\frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u_t|^2), \\ \rho_0 = \rho,\ u_0 = u. \end{cases} \tag{39}$$

Напомним, что если $(\mathcal{M},g)$ есть гладкое риманово многообразие и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, то с помощью гладких $\mathcal{C}^1$ кривых $t \mapsto x_t$ проходящих через $x|_{t=0} = x$ со скоростью $\frac{dx_t}{dt}\big|_{t=0} = \zeta$ можно определить градиент $\operatorname{grad}\mathcal{F}$ посредством

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(x_t)\bigg|_{t=0} = \langle D\mathcal{F}(x),\zeta\rangle_{T_x^*\mathcal{M},T_x\mathcal{M}} = g_x(\operatorname{grad}\mathcal{F}(x),\zeta).$$

Обобщая (в духе Отто) это наблюдение на наше метрическое пространство, можно видеть, что градиенты функционалов $\mathcal{F} : \mathcal{M}^+ \to \mathbb{R}$ формально задаются как

$$\operatorname{grad}_d \mathcal{F}(\rho) = -\operatorname{Div}\left(\rho\nabla\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}\right) + \rho\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}, \qquad \|\operatorname{grad}_d \mathcal{F}(\rho)\|_{T_\rho\mathcal{M}^+} = \left\|\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}\right\|_{H^1(\mathrm{d}\rho)}, \tag{40}$$

где $\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}$ есть первая вариация функционала в классическом смысле (напр., для $\mathcal{F}(\rho) = \int U(x)d\rho(x)$ имеем $\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho} = U$).

Касательное пространство задается

$$T_\rho\mathcal{M}^+ := \{\zeta = -\operatorname{Div}(\rho\nabla u) + \rho u : \, u \in H^1(\mathrm{d}\rho)\}$$

и

$$\|\zeta\|_{T_\rho\mathcal{M}^+} := \|u\|_{H^1(\mathrm{d}\rho)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\mathrm{d}\rho\right)^{1/2}.$$

Заметим, что для данного ζ эллиптическое уравнение

$$-\operatorname{Div}(\rho\nabla u) + \rho u = \zeta \tag{41}$$

коэрцитивно в $H^1(\mathrm{d}\rho)$, так что соответствие между касательным вектором ζ и потенциалом u взаимно однозначно (по крайней мере, формально). Тогда риманова метрика на $T\mathcal{M}^+$ может быть задана по формуле

$$\left\langle \frac{d\rho}{dt_1}, \frac{d\rho}{dt_2} \right\rangle_\rho := \langle u_1, u_2\rangle_{H^1(\mathrm{d}\rho)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + u_1 u_2)\mathrm{d}\rho.$$

Полезно отметить, что

$$\left\langle \frac{d\rho}{dt_1}, \frac{d\rho}{dt_2} \right\rangle_\rho = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + u_1 u_2)\mathrm{d}\rho$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} u_2 \zeta_1 \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u_2 \partial_{t_1}\rho \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u_1 \zeta_2 \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u_1 \partial_{t_2}\rho \, \mathrm{d}x. \tag{42}$$

Наше определение (38) тогда имеет простой геометрический вид

$$d^2(\rho_0, \rho_1) = \inf\left\{ \int\limits_0^1 \left\| \frac{d\rho_t}{dt} \right\|^2_{T_{\rho_t}\mathcal{M}^+} \mathrm{d}t \right\},$$

где инфимум берется по всем допустимым кривым, соединяющим ρ_0, ρ_1. Касательные векторы также могут быть интерпретированы как горизонтальные векторы обобщенной субмерсии Отто из множества диффеоморфизмов конуса над $\mathbb{R}^d$ в радоновы меры.

Зная экспоненциальное отображение, можно также развить исчисление второго порядка

Определение 12. Гессиан функционала $\mathcal{F} : \mathcal{M}^+ \to \mathbb{R}$ формально определяется формулой

$$\langle \operatorname{Hess}_d \mathcal{F}(\rho) \cdot \zeta, \zeta \rangle_\rho = \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}(\rho_t). \tag{43}$$

Здесь путь ρ_t определяется (39), где начальный потенциал u связан с касательным вектором ζ посредством (41).

Тогда естественно дать

Определение 13. Функционал $\mathcal{F}$ над $\mathcal{M}^+$ выпуклый (соотв. λ-выпуклый, $\lambda \in \mathbb{R}$) относительно нашей геометрии если $\langle \operatorname{Hess}_d \mathcal{F}(\rho) \cdot \zeta, \zeta \rangle_\rho \geqslant 0$ (соотв., $\langle \operatorname{Hess}_d \mathcal{F}(\rho) \cdot \zeta, \zeta \rangle_\rho \geqslant \lambda \langle \zeta, \zeta \rangle_\rho = \lambda \|u\|^2_{H^1(\mathrm{d}\rho)}$) для всех ρ, ζ.

Вычисления гессианов технически тяжелы, и как пример мы дадим формулу для гессиана внутренней энергии [6], определяемой по формуле

$$\mathcal{E}(\rho) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} E(\rho(x))\mathrm{d}x,$$

где E неотрицательная измеримая плотность энергии. Для этого функционала

$$\langle \mathrm{Hess}_d\, \mathcal{E}(\rho)\cdot\zeta,\zeta\rangle_\rho = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big\{ P(\rho)\Gamma_2(u) + P_2(\rho)|\Delta u|^2 - (2P_2(\rho) + P(\rho))u\Delta u$$
$$+ \left(Q_2(\rho) - \frac{1}{2}Q(\rho) - P_2(\rho)\right)|\nabla u|^2 + \left(Q_2(\rho) - \frac{1}{2}Q(\rho)\right)|u|^2\Big\},$$

где

$$P(\rho) = E'(\rho)\rho - E(\rho), \qquad P_2(\rho) = P'(\rho)\rho - P(\rho),$$
$$Q(\rho) = E'(\rho)\rho, \qquad Q_2(\rho) = Q'(\rho)\rho,$$
$$\Gamma_2(u) = \sum_{i,j=1}^{d} |\partial^2_{x_i x_j} u|^2.$$

4. НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

Теорема 14. *Пусть Ω открытая, связная, ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ допускающая изопериметрическое неравенство. Пусть $p \geqslant 1$. Пусть функции $E, g \in C(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, и $f \in C^1(\Omega \times (0,+\infty))$ удовлетворяют*

$$E \geqslant 0,\ \ g \geqslant 0; \tag{44}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{0<u\leqslant\varepsilon \\ x\in\Omega}} E(x,u) < \infty; \tag{45}$$

$$\inf_{\substack{u>\varepsilon \\ x\in\Omega \\ E(x,u)\neq 0}} \frac{g(x,u)}{E(x,u)} > 0 \quad \forall\varepsilon > 0, \tag{46}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{\substack{0<u\leqslant\varepsilon \\ x\in\Omega}} f(x,u) > \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{u>0 \\ E(x,u)<\varepsilon}} f(x,u). \tag{47}$$

Пусть множество $U \subset C^1(\Omega)$ состоящее из строго положительных функций не содержит последовательностей $\{u_n\}$ таких, что $\{E(\cdot, u_n(\cdot))\}$ ограничено в $L^1(\Omega)$ и $\{u_n\}$ сходится к 0 по мере. Тогда найдется константа $C = C(\Omega, p, E, g, f, U)$ such that

$$\int\limits_\Omega E(x,u(x))\,\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int\limits_\Omega \left(g(x,u(x)) + u(x)|\nabla_x f(x,u(x))|^p\right)\mathrm{d}x\right) \quad (u\in U). \tag{48}$$

Заметим, что изопериметрическре неравенство для Ω имеет вид

$$P(A;\Omega) \geqslant c_\Omega |A|^{\frac{d-1}{d}}, \quad A\subset\Omega,\ |A| \leqslant \frac{1}{2}|\Omega|, \tag{49}$$

где $P(A;\Omega)$ обозначает относительный периметр множества A локально конечного периметра относительно Ω. Напомним, что относительный периметр определяется как

$$P(A;\Omega) = |\mu_A|(\Omega),$$

где μ_A мера Гаусса-Грина-ДеДжорджи, ассоциированная с A, см. [39]. Носитель μ_A содержится в топологической границе A.

Если $E \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+)$, условие (45) автоматически выполнено.

Инфимум в (46) зависит ε и может стремиться к нулю, когда $\varepsilon \to 0$, иначе утверждение тривиально.

Теорема 15. *Пусть Ω такова, как в предыдущей теореме. Пусть $p \geqslant 1$ и I некий, возможно неограниченный, интервал. Пусть $\mathcal{X} = \{(E, g, f, v)\}$ есть множество наборов $E, g, v \in C(\Omega \times I)$, $f \in C^1(\Omega \times I)$, и*

$$E \geqslant 0,\ g \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \quad \forall (E, g, f, v) \in \mathcal{X}; \tag{50}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{E(x,u)\colon (E,f,g,v) \in \mathcal{X}, (x,u) \in \Omega \times I, v(x,u) \leqslant \varepsilon\} < \infty \tag{51}$$

$$\inf\left\{\frac{g(x,u)}{E(x,u)}\colon (E,f,g,v) \in \mathcal{X}, (x,u) \in \Omega \times I, E(x,u) \neq 0, v(x,u) > \varepsilon\right\} > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0} \inf\{f(x,u)\colon (E,f,g,v) \in \mathcal{X}, (x,u) \in \Omega \times I, v(x,u) \leqslant \varepsilon\} \\ &> \lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{f(x,u)\colon (E,f,g,v) \in \mathcal{X}, (x,u) \in \Omega \times I, E(x,u) \leqslant \varepsilon\} \end{aligned} \tag{53}$$

Пусть множество $U \subset C^1(\Omega; I)$ удовлетворяет следующему условию: для любых последовательностей $\{(E_n, g_n, f_n, v_n)\} \subset \mathcal{X}\}$ и $\{u_n\} \subset U$ таких, что $\{E_n(\cdot, u_n(\cdot))\}$ равномерно ограничена в $L^1(\Omega)$, последовательность $\{v_n(\cdot, u_n(\cdot))\}$ не сходится к 0 по мере. Тогда существует константа C, зависящая лишь от Ω, p, U и $\mathcal{X}$ такая, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega E(x, u(x))\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \leqslant C\left(\int\limits_\Omega \big(g(x,u(x)) + v(x,u(x))|\nabla_x f(x,u(x))|^p\big)\,\mathrm{d}x\right) \quad ((E,g,f,v) \in \mathcal{X}, u \in U). \end{aligned}$$

В случае приложений к градиентным потокам релевантен следующий вариант неравенства

Теорема 16. *Пусть функции $E \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, $f \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,+\infty))$, и $m \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяют*

$$E(x,u) \geqslant 0, \quad (x,u) \in \overline{\Omega} \times [0,\infty); \tag{54}$$

$$m(x) > 0, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{55}$$

$$E(x, m(x)) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{56}$$

$$E_u(x,u) = -f(x,u), \quad (x,u) \in \Omega \times (0,+\infty); \tag{57}$$

$$f_u(x,u) < 0, \quad (x,u) \in \overline{\Omega} \times (0,+\infty) \tag{58}$$

и пусть $U \subset C^1(\Omega)$ множество строго положительных функций, такое что нет последовательностей $\{u_n\} \subset U$ таких, что $\{E(\cdot, u_n(\cdot))\}$ ограничено в $L^1(\Omega)$ и сходится к 0 по мере. Пусть $\sigma \in (0, \min_{\overline{\Omega}} m)$ и

$$v_\sigma(\xi) = \frac{\xi^2}{\max(\xi, \sigma)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} E(x,u(x))\,\mathrm{d}x \leqslant C \int\limits_{\Omega} v_\delta(u(x))\big((f(x,u(x)))^2 + |\nabla_x f(x,u(x))|^2\big)\,\mathrm{d}x \quad (u \in U), \tag{59}$$

где $C>0$ *зависит* Ω, f, σ, *и* U.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frank, T. D. Nonlinear Fokker-Planck equations : Fundamentals and Applications / T. D. Frank. — Berlin : Springer-Verlag, 2005. — 413 p.

2. Tsallis, C. Introduction to nonextensive statistical mechanics / C. Tsallis. — Springer, 2009. — 382 p.

3. Jüngel, A. Entropy methods for diffusive partial differential equations / A. Jüngel. — Switzerland : Springer, 2016. — 146 p.

4. Lyapunov functionals for boundary-driven nonlinear drift-diffusion equations / T. Bodineau, J. Lebowitz, C. Mouhot, C. Villani // Nonlinearity. — 2014. — V. 27, № 9. — P. 2111–2132.

5. Frank, T. D. Asymptotic properties of nonlinear diffusion, nonlinear drift-diffusion, and nonlinear reaction-diffusion equations / T. D. Frank // Ann. Phys. — 2004. — V. 13, № 7–8. — P. 461–469.

6. Villani, C. Topics in optimal transportation / C. Villani. — American Mathematical Soc., 2003. — 370 p.

7. Fretwell, S. D. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds I. Theoretical development / S. D. Fretwell, H. L. Lucas // Acta Biotheoretica. — 1969. — V. 19, № 1. — P. 16–36.

8. Fretwell, S. D. Populations in a seasonal environment / S. D. Fretwell. — Princeton University Press, 1972. — 224 p.

9. Cosner, C. A dynamic model for the ideal-free distribution as a partial differential equation / C. Cosner // Theoretical Population Biology. — 2005. — V. 67, № 2. — P. 101–108.

10. Cosner, C. Beyond diffusion : conditional dispersal in ecological models / C. Cosner // Fields Institute Communications. — 2013. — V. 64. — P. 305–317.

11. MacCall, A. D. Dynamic geography of marine fish populations / A. D. MacCall. — Seattle : Washington Sea Grant Program Seattle, 1990. — 153 p.

12. Cosner, C. Well-posedness and qualitative properties of a dynamical model for the ideal free distribution / C. Cosner, M. Winkler // Journal of mathematical biology. — 2014. — V. 69, № 6–7. — P. 1343–1382.

13. Kondratyev, S. A new optimal transport distance on the space of finite Radon measures / S. Kondratyev, L. Monsaingeon, D. Vorotnikov // Adv. Differential Equations. — 2016. — V. 21, № 11–12. — P. 1117–1164.

14. Kondratyev, S. A fitness-driven cross-diffusion system from population dynamics as a gradient flow / S. Kondratyev, L. Monsaingeon, D. Vorotnikov // J. Differential Equations. — 2016. — V. 261, № 5. — P. 2784–2808.

15. Random dispersal versus fitness-dependent dispersal / R. S. Cantrell, C. Cosner, Y. Lou, C. Xie // J. Differential Equations. — 2013. — V. 254, № 7. — P. 2905–2941.

16. Lou, Y. Approaching the ideal free distribution in two-species competition models with fitness-dependent dispersal / Y. Lou, Y. Tao, M. Winkler // SIAM J. Math. Anal. — 2014. — V. 46, № 2. — P. 1228–1262.

17. Strong solutions and instability for the fitness gradient system in evolutionary games between two populations / Q. Xu et. al. // J. Differential Equations. — 2017. — V. 262, № 7. — P. 4021–4051.

18. An interpolating distance between optimal transport and Fischer-Rao / L. Chizat, B. Schmitzer, G. Peyré, F.-X. Vialard // arXiv preprint arXiv:1506.06430, 2015.

19. Liero, M. Optimal entropy-transport problems and a new Hellinger-Kantorovich distance between positive measures / M. Liero, A. Mielke, G. Savaré // arXiv preprint arXiv:1508.07941, 2015.

20. Liero, M. Optimal transport in competition with reaction : the Hellinger-Kantorovich distance and geodesic curves / M. Liero, A. Mielke, G. Savaré // SIAM J. Math. Anal. — 2016. — V. 48, no. 4. — P. 2869–2911.

21. Otto, F. The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation / F. Otto // Comm. Partial Differential Equations. — 2001. — V. 26, № 1–2. — P. 101–174.

22. Villani, C. Optimal transport : old and new / C. Villani. — Springer Science & Business Media, 2008. — 1000 p.

23. Ambrosio, L. Gradient Flows : in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures / L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré. — Basel : Birkhäuser Basel, 2008. — 334 p.

24. Santambrogio, F. {Euclidean, metric, and Wasserstein} Gradient flows : an overview / F. Santambrogio // Bull. Math. Sci. — 2017. — V. 7, № 1. — P. 87–154.

25. Jordan, R. The variational formulation of the Fokker–Planck equation / R. Jordan, D. Kinderlehrer, F. Otto // SIAM journal on mathematical analysis. — 1998. — V. 29, № 1. — P. 1–17.

26. Gallouët, T. O. A JKO splitting scheme for Kantorovich-Fisher-Rao gradient flows / T. O. Gallouët, L. Monsaingeon // SIAM J. Math. Anal. — 2017. — V. 49, № 2. — P. 1100–1130.

27. Gallouët, T. An unbalanced optimal transport splitting scheme for general advection-reaction-diffusion problems / T. Gallouët, M. Laborde, L. Monsaingeon // arXiv:1704.04541, 2017.

28. Kondratyev, S. A new multicomponent Poincaré-Beckner inequality / S. Kondratyev, L. Monsaingeon, D. Vorotnikov // J. Funct. Anal. — 2017. — V. 272, № 8. — P. 3281–3310.

29. Shi, W. The gradient flow of the potential energy on the space of arcs / W. Shi, D. Vorotnikov // arXiv preprint arXiv:1702.00747, 2017.

30. Vázquez, J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory / J. L. Vázquez. — Oxford : Oxford University Press, 2007. — 647 p.

31. Vázquez, J. L. Failure of the strong maximum principle in nonlinear diffusion. Existence of needles / J. L. Vázquez // Comm. Partial Differential Equations. — 2005. — V. 30, № 7–9. — P. 1263–1303.

32. Alt, H. W. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations / H. W. Alt, S. Luckhaus // Math. Z. — 1983. — V. 183, № 3. — P. 311–341.

33. Bertsch, M. A density dependent diffusion equation in population dynamics : stabilization to equilibrium / M. Bertsch, D. Hilhorst // SIAM J. Math. Anal. — 1986. — V. 17, № 4. — P. 863–883.

34. Kačur, J. On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz-Sobolev spaces. I / J. Kačur // Math. Z. — 1990. — V. 203, № 1. — P. 153–171.

35. Kačur, J. On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz-Sobolev spaces. II / J. Kačur // Math. Z. — 1990. — V. 203, № 4. — P. 569–579.

36. Filo, J. Local existence of general nonlinear parabolic systems / J. Filo, J. Kačur // Nonlinear Anal. — 1995. — V. 24, № 11. — P. 1597–1618.

37. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities / J. A. Carrillo et. al. // Monatsh. Math. — 2001. — V. 133, № 1. — P. 1–82.

38. Barbu, V. Generalized solutions to nonlinear Fokker-Planck equations / V. Barbu // J. Differential Equations. — 2016. — V. 261, № 4. — P. 2446–2471.

39. Maggi, F. Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems : An Introduction to Geometric Measure Theory / F. Maggi. — Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2012. — 475 p.

REFERENCES

1. Frank T. D. Nonlinear Fokker-Planck equations: Fundamentals and Applications. Berlin, Springer-Verlag, 2005, 413 p.

2. Tsallis C. Introduction to nonextensive statistical mechanics. Springer, 2009, 382 p.

3. Jüngel A., Entropy methods for diffusive partial differential equations. Switzerland, Springer, 2016, 146 p.

4. Bodineau T., Lebowitz J., Mouhot C., Villani C. Lyapunov functionals for boundary-driven nonlinear drift-diffusion equations. Nonlinearity, 2014, vol. 27, no. 9, pp. 2111–2132.

5. Frank T. D. Asymptotic properties of nonlinear diffusion, nonlinear drift-diffusion, and nonlinear reaction-diffusion equations. Ann. Phys., 2004, vol. 13, no. 7–8, pp. 461–469.

6. Villani C. Topics in optimal transportation. American Mathematical Soc., 2003, 370 p.

7. Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds I. Theoretical development. Acta Biotheoretica, 1969, vol. 19, no. 1, pp. 16–36.

8. Fretwell S. D. Populations in a seasonal environment. Princeton University Press, 1972, 224 p.

9. Cosner C. A dynamic model for the ideal-free distribution as a partial differential equation. Theoretical Population Biology, 2005, vol. 67, no. 2, pp. 101–108.

10. Cosner C. Beyond diffusion: conditional dispersal in ecological models. Fields Institute Communications, 2013, vol. 64, pp. 305–317.

11. MacCall A.D. Dynamic geography of marine fish populations. Seattle, Washington Sea Grant Program Seattle, 1990, 153 p.

12. Cosner C., Winkler M. Well-posedness and qualitative properties of a dynamical model for the ideal free distribution. Journal of mathematical biology, 2014, vol. 69, no. 6–7, pp. 1343–1382.

13. Kondratyev S., Monsaingeon L., Vorotnikov D. A new optimal transport distance on the space of finite Radon measures. Adv. Differential Equations, 2016, vol. 21, no. 11–12, pp. 1117–1164.

14. Kondratyev S., Monsaingeon L., Vorotnikov D. A fitness-driven cross-diffusion system from population dynamics as a gradient flow. J. Differential Equations, 2016, vol. 261, no. 5, pp. 2784–2808.

15. Cantrell R. S., Cosner C., Lou Y., Xie C. Random dispersal versus fitness-dependent dispersal. J. Differential Equations, 2013, vol. 254, no. 7, pp. 2905–2941.

16. Lou Y., Tao Y., Winkler M., Approaching the ideal free distribution in two-species competition models with fitness-dependent dispersal. SIAM J. Math. Anal., 2014, vol. 46, no. 2, pp. 1228–1262.

17. Xu Q., Belmonte A., deForest R., Liu C., Tan Z. Strong solutions and instability for the fitness gradient system in evolutionary games between two populations. J. Differential Equations, 2017, vol. 262, no. 7, p. 4021–4051.

18. Chizat L., Schmitzer B., Peyré G., Vialard F.-X. An interpolating distance between optimal transport and Fischer-Rao. arXiv preprint arXiv:1506.06430, 2015.

19. Liero M., Mielke A., Savaré G. Optimal entropy-transport problems and a new Hellinger-Kantorovich distance between positive measures. arXiv preprint arXiv:1508.07941, 2015.

20. Liero M., Mielke A., Savaré G. Optimal transport in competition with reaction: the Hellinger-Kantorovich distance and geodesic curves. SIAM J. Math. Anal., 2016, vol. 48, no. 4, pp. 2869–2911.

21. Otto F. The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation. Comm. Partial Differential Equations, 2001, vol. 26, no. 1–2, pp. 101–174.

22. Villani C. Optimal transport: old and new. Springer Science & Business Media, 2008, 1000 p.

23. Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient Flows: in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. Basel, Birkhäuser Basel, 2008, 334 p.

24. Santambrogio F. {Euclidean, metric, and Wasserstein} Gradient flows: an overview. Bull. Math. Sci., 2017, vol. 7, no. 1, pp. 87–154.

25. Jordan R., Kinderlehrer D., Otto F. The variational formulation of the Fokker–Planck equation. SIAM journal on mathematical analysis, 1998, vol. 29, no. 1, pp. 1–17.

26. Gallouët T. O., Monsaingeon L. A JKO splitting scheme for Kantorovich-Fisher-Rao gradient flows. SIAM J. Math. Anal., 2017, vol. 49, no. 2, pp. 1100–1130.

27. Gallouët T., Laborde M., Monsaingeon L. An unbalanced optimal transport splitting scheme for general advection-reaction-diffusion problems. arXiv:1704.04541, 2017.

28. Kondratyev S., Monsaingeon L., Vorotnikov D. A new multicomponent Poincaré-Beckner inequality. J. Funct. Anal., 2017, vol. 272, no. 8, pp. 3281–3310.

29. Shi W., Vorotnikov D. The gradient flow of the potential energy on the space of arcs. arXiv preprint arXiv:1702.00747, 2017.

30. Vázquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford, Oxford University Press, 2007, 647 p.

31. Vázquez J. L. Failure of the strong maximum principle in nonlinear diffusion. Existence of needles. Comm. Partial Differential Equations, 2005, vol. 30, no. 7–9, pp. 1263–1303.

32. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. Math. Z., 1983, vol. 183, no. 3, pp. 311–341.

33. Bertsch M. A density dependent diffusion equation in population dynamics: stabilization to equilibrium. SIAM J. Math. Anal., 1986, vol. 17, № 4, pp. 863–883.

34. Kačur J. On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz-Sobolev spaces. I. Math. Z., 1990, vol. 203, no. 1, pp. 153–171.

35. Kačur J. On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz-Sobolev spaces. II. Math. Z., 1990, vol. 203, no. 4, pp. 569–579.

36. Filo J., Kačur J. Local existence of general nonlinear parabolic systems. Nonlinear Anal., 1995, vol. 24, no. 11, pp. 1597–1618.

37. Carrillo J. A., Jüngel A., Markowich P. A., Toscani G., Unterreiter A. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. Monatsh. Math., 2001, vol. 133, no. 1, pp. 1–82.

38. Barbu V. Generalized solutions to nonlinear Fokker-Planck equations. J. Differential Equations, 2016, vol. 261, no. 4, pp. 2446–2471.

39. Maggi F. Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems: An Introduction to Geometric Measure Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2012, 475 p.

Воротников Дмитрий Александрович, к.ф.-м.н., научный сотрудник Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mitvorot@mat.uc.pt

Vorotnikov Dmitry Alexandrovich, PhD, researcher of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mitvorot@mat.uc.pt