УДК 517.954.988.8

ОЦЕНКИ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А. С. Бондарев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 24.03.2017 г.

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве гладко разрешимое линейное параболическое уравнение с периодическим условием на решение решается приближенно проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина, а по времени — с использованием неявного метода Эйлера. В работе установлены оценки в сильных нормах погрешности приближенных решений, из которых следует сходимость приближенных решений к точному, а также порядки скорости сходимости, зависящие от гладкости точного решения. В частности, в работе получены точные по порядку аппроксимации оценки погрешности для подпространств типа конечных элементов.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, гладкая разрешимость, периодическое условие, неявный метод Эйлера.

STRONG-NORM ERROR ESTIMATES FOR THE PROJECTION-DIFFERENCE METHOD OF SOLUTION OF THE PARABOLIC EQUATION WITH A PERIODIC CONDITION ON THE SOLUTION

A. S. Bondarev

Abstract. A smooth soluble linear parabolic equation with a periodic condition on the solution is solved approximately by the projection-difference method in a separable Hilbert space using the Galerkin method in space and implicit Euler method in time. Strong-norm error estimates for approximate solutions, which imply convergence of approximate solutions to the exact solution and order of convergence rate depending of the smoothness of the exact solution, are obtained. In particular, error estimates, exact by order of approximation, are obtained for special subspaces of finite elements.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, smooth solvability, periodic condition, implicit Euler method.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть даны вложенные сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u,v \in V$ форму $a(u,v)$. Пусть для $u,v \in V$

$$|a(u,v)| \leqslant \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$, такой, что $(Au,v) = a(u,v)$, где выражение типа (z,v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z,v) — скалярное произведение в H [1].

Рассмотрим в V' на $[0,T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{2}$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщенном смысле. В [2] показано, что для заданного $f \in L_2(0,T;V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$ задачи (2), называемое слабым решением.

Далее будем считать, что выполнены условия гладкой разрешимости, т.е. справедлива следующая теорема [3].

Теорема 1. *Пусть вложение $V \subset H$ компактно, а форма $a(u,v)$ удовлетворяет требованиям (1). Пусть функция $t \to f(t) \in V'$ дифференцируема, $f' \in L_2(0,T;V')$, и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда слабое решение задачи (2) будет таким, что $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$, причем справедлива оценка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u'(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2\, dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\, dt \leqslant C \left(\int\limits_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\, dt + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt \right). \tag{3}$$

В данной работе задача (2) решается полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием метода Галеркина по пространственным переменным и неявной схемы Эйлера по временной переменной. Отметим, что в работе [4] установлены энергетические оценки погрешности данного метода в условиях слабой разрешимости задачи. В настоящей работе в более сильных предположениях гладкой разрешимости получены оценки в сильных нормах погрешности приближенного решения.

Следует заметить, что в случае, когда уравнение (2) рассматривается с начальным условием (задача Коши), оценки в сильных нормах погрешности для проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени установлены в работе [5].

Итак, пусть V_h, где h — положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup |(u_h,v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h, \|v_h\|_V = 1$. Отметим, что $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h — ортопроектор в пространстве H на V_h. Как замечено в [6], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_h} : V' \to V_h'$, причем для $u \in V'$ справедливо $\|\overline{P_h} u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'}$. Отметим для $u \in V'$ и $v \in V$ важное соотношение $(\overline{P_h}u,v) = (u,P_h v)$, полученное в [7].

Для построения приближенных решений возьмем равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ отрезка $[0,T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим периодическую разностную задачу: для $k = \overline{1,N}$

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P_h} A u_k^h = \overline{P_h} f(t_k), \quad u_0^h = u_N^h, \tag{4}$$

где $\tau N = T, t_k = k\tau$.

Однозначная разрешимость задачи (4) установлена в [4].

Далее будем предполагать, что форма $a(u,v)$ является симметричной, то есть $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряженному числу.

Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u,v \in V | (u,v)_{V(A)} = a(u,v)\}.$$

Из (1) следует, что нормы в пространствах V и $V(A)$ эквивалентны, т.е.

$$\alpha^{1/2}\|u\|_V \leqslant \|u\|_{V(A)} \leqslant \mu^{1/2}\|u\|_V \quad (u \in V). \tag{5}$$

Лемма 1. *Для $u \in V$ справедлива оценка*

$$\|[I - Q_h(A)]u\|_V \leqslant \alpha^{-1/2}\|[I - Q_h(A)]u\|_{V(A)} \leqslant \alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\|(I - Q_h)u\|_V, \tag{6}$$

где $Q_h(A)$ — ортопроектор в $V(A)$ на V_h, а Q_h — ортопроектор в V на V_h.

Доказательство следует из оценок (1) и (5):

$$\|[I - Q_h(A)]u\|_V \leqslant \alpha^{-1/2}\|[I - Q_h(A)]u\|_{V(A)} = \alpha^{-1/2}\min_{u_h\in V_h}\|u - u_h\|_{V(A)} \leqslant$$

$$\alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\min_{u_h\in V_h}\|u - u_h\|_V = \alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\|(I - Q_h)u\|_V.\blacksquare$$

Лемма 2. *Пусть $v_k^h \in V_h$ $(k = \overline{0,N})$, $N\tau = T$. Тогда*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|v_k^h\|_V^2 \leqslant K\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(\|\overline{P_h}Av_{k-1}^h\|_H^2 + \|\overline{P_h}Av_k^h\|_H^2\right)\tau + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\right\}. \tag{7}$$

Доказательство. Определим на $[0,T]$ непрерывную кусочно-линейную функцию $v^h(t)$ со значениями в V_h, которая на $[t_{k-1},t_k]$ задана формулой

$$v^h(t) = v_{k-1}^h + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}(v_k^h - v_{k-1}^h) \quad (k = \overline{1,N}).$$

Поскольку функция $\|v^h(t)\|_{V(A)}^2 = a(v^h(t),v^h(t))$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$, то для всех $t_0,t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$\|v^h(t_0)\|_{V(A)}^2 = \|v^h(t)\|_{V(A)}^2 + \int_t^{t_0}\frac{d}{ds}\|v^h(s)\|_{V(A)}^2\,ds\,. \tag{8}$$

Заметим, что

$$\frac{d}{ds}\|v^h(s)\|_{V(A)}^2 = 2\mathrm{Re}\left(v^h(s)\,,\frac{d}{ds}v^h(s)\right)_{V(A)} = 2\mathrm{Re}\,a\left(v^h(s)\,,\frac{d}{ds}v^h(s)\right) =$$

$$2\mathrm{Re}\left(Av^h(s)\,,\frac{d}{ds}v^h(s)\right)_H \leqslant 2\|\overline{P_h}Av^h(s)\|_H\left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_H$$

почти всюду на $[0,T]$. Тогда из (8) следует оценка

$$\|v^h(t_0)\|_{V(A)}^2 \leqslant \|v^h(t)\|_{V(A)}^2 + 2\left|\int_t^{t_0}\|\overline{P_h}Av^h(s)\|_H\left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_H ds\right| \leqslant$$

$$\|v^h(t)\|_{V(A)}^2 + \int_0^T\|\overline{P_h}Av^h(s)\|_H^2\,ds + \int_0^T\left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_H^2 ds\,. \tag{9}$$

Интегрируем (9) по t от 0 до T.

$$T\|v^h(t_0)\|_{V(A)}^2 \leqslant \int_0^T\|v^h(t)\|_{V(A)}^2\,dt + T\int_0^T\|\overline{P_h}Av^h(s)\|_H^2\,ds + T\int_0^T\left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_H^2 ds\,. \tag{10}$$

Проведем оценку для $u_h \in V_h$

$$\|u_h\|^2_{V(A)} = a(u_h,u_h) = (Au_h,u_h) = (\overline{P_h}Au_h, u_h) \leqslant \|\overline{P_h}Au_h\|_H \|u_h\|_H .$$

В силу непрерывного вложения $V \subset H$ и неравенства (5) получим

$$\|u_h\|^2_H \leqslant c^2 \|u_h\|^2_V \leqslant c^2\alpha^{-1}\|u_h\|^2_{V(A)} .$$

Таким образом, $\|u_h\|_{V(A)} \leqslant C\|\overline{P_h}Au_h\|_H$. Тогда из (10) следует

$$T\|v^h(t_0)\|^2_{V(A)} \leqslant (C^2+T)\int\limits_0^T \|\overline{P_h}Av^h(s)\|^2_H\,ds + T\int\limits_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|^2_H ds\,.$$

Учитывая, что $t_0 \in [0,T]$ произвольно, из последней оценки получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v^h(t)\|^2_{V(A)} \leqslant \frac{C^2+T}{T}\int\limits_0^T \|\overline{P_h}Av^h(s)\|^2_H\,ds + \int\limits_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|^2_H ds\,. \tag{11}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^T \|\overline{P_h}Av^h(s)\|^2_H\,ds = \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P_h}Av^h(s)\|^2_H\,ds\,,$$

Проведем оценку

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P_h}Av^h(s)\|^2_H\,ds = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\overline{P_h}A\left[v^h_{k-1} + \frac{s-t_{k-1}}{\tau}(v^h_k - v^h_{k-1})\right]\right\|^2_H ds =$$

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\frac{s-t_{k-1}}{\tau}\,\overline{P_h}Av^h_k + \left(1-\frac{s-t_{k-1}}{\tau}\right)\overline{P_h}Av^h_{k-1}\right\|^2_H ds \leqslant$$

$$2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P_h}Av^h_k\|^2_H\,ds + 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P_h}Av^h_{k-1}\|^2_H\,ds = 2\left(\|\overline{P_h}Av^h_{k-1}\|^2_H + \|\overline{P_h}Av^h_k\|^2_H\right)\tau.$$

Итак, получаем оценку

$$\int\limits_0^T \|\overline{P_h}Av^h(s)\|^2_H\,ds \leqslant 2\sum_{k=1}^N \left(\|\overline{P_h}Av^h_{k-1}\|^2_H + \|\overline{P_h}Av^h_k\|^2_H\right)\tau. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь

$$\int\limits_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|^2_H ds = \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\frac{v^h_k - v^h_{k-1}}{\tau}\right\|^2_H ds = \sum_{k=1}^N \left\|\frac{v^h_k - v^h_{k-1}}{\tau}\right\|^2_H \tau\,. \tag{13}$$

Осталось заметить, что $v^h(t_k) = v^h_k$ для $k = \overline{0,N}$. Поэтому

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|v^h_k\|^2_{V(A)} \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|v^h(t)\|^2_{V(A)}\,. \tag{14}$$

В результате оценка (7) следует из (5), (14), (11), (12) и (13). ■

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

Теорема 2. *Пусть для задачи (2) выполнены условия теоремы 1 и форма $a(u,v)$ симметрична. Пусть $u(t)$ — решение задачи (2), обладающее дополнительной гладкостью $u'' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ — решение задачи (4). Тогда для $z_k^h = Q_h(A)u(t_k) - u_k^h$ справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N} \|z_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \left(\left\| (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} \right\|_H^2 \tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2 \right) \leqslant$$

$$C\left\{ \int_0^T \|[I - Q_h(A)]u'(t)\|_H^2\, dt + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p\, dt \right)^{2/p} \right\}. \tag{15}$$

Доказательство. Нетрудно установить тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P_h} A z_k^h = P_h \left\{ \frac{Q_h(A)[u(t_k) - u(t_{k-1})]}{\tau} - u'(t_k) \right\}. \tag{16}$$

Умножим (16) скалярно в H на $(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}$. Преобразуем выражение:

$$\left(P_h \left\{ \frac{Q_h(A)[u(t_k) - u(t_{k-1})]}{\tau} - u'(t_k) \right\}, \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right) =$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left([Q_h(A) - I]u'(t), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right) dt + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - u'(t_k), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right) dt.$$

Получим

$$\left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 + a\left(z_k^h, \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left([Q_h(A) - I]u'(t), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right) dt +$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - u'(t_k), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right) dt. \tag{17}$$

Заметим, что

$$a\left(z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} \right) =$$

$$(2\tau)^{-1}[a(z_k^h - z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h) + a(z_k^h, z_k^h) - a(z_{k-1}^h, z_{k-1}^h) + \operatorname{Im} a(z_{k-1}^h, z_k^h)].$$

Возьмем от (17) удвоенную вещественную часть. Тогда

$$2\left\| (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1} \right\|_H^2 + \tau^{-1}\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2 + \tau^{-1}\|z_k^h\|_{V(A)}^2 - \tau^{-1}\|z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2 =$$

$$\frac{2}{\tau} \mathrm{Re} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left([Q_h(A) - I]u'(t), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right) dt +$$

$$\frac{2}{\tau}\mathrm{Re}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-u'(t_k),\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt = I_1 + I_2. \tag{18}$$

Оценим слагаемые в правой части (18).

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H dt \leqslant$$

$$\tau^{-1}\varepsilon_1^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt + \varepsilon_1\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2.$$

Оценим I_2:

$$I_2 = \frac{2}{\tau}\mathrm{Re}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int\limits_{t_k}^{t}u''(s)\,ds,\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt \leqslant 2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\,ds\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H \leqslant$$

$$\varepsilon_2^{-1}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\,ds\right)^2 + \varepsilon_2\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 \leqslant$$

$$\varepsilon_2^{-1}\tau^{2-2/p}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H^p\,ds\right)^{2/p} + \varepsilon_2\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2.$$

В левой части (18) с помощью (5) оценим снизу

$$\tau^{-1}\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2 \geqslant \tau^{-1}\alpha\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_V^2.$$

Положим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{1}{2}$. Тогда из (18) получим неравенство

$$\left\|(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau^{-1}\right\|_H^2 + \tau^{-1}\alpha\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_V^2 + \tau^{-1}\|z_k^h\|_{V(A)}^2 - \tau^{-1}\|z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2 \leqslant$$

$$C\left\{\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt + \tau^{2-2/p}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{19}$$

Умножим (19) на τ и просуммируем по $k=\overline{1,N}$. Заметим, что, в силу периодических условий задач (2) и (4), $z_0^h=z_N^h$. Получим

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\left\|(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau^{-1}\right\|_H^2\tau + \|z_k^h-z_{k-1}^h\|_V^2\right) \leqslant$$

$$C\left\{\int\limits_0^T\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_V^2\,dt + \tau^{3-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{20}$$

Проведем оценку $\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_V^2$. Для этого воспользуемся леммой 2 и учтем периодическое условие.

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_V^2 \leqslant K\left\{2\sum_{k=1}^{N}\|\overline{P_h}Az_k^h\|_H^2\tau + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\right\}. \tag{21}$$

Проведем оценку для $\|\overline{P_h}Az_k^h\|_H^2$. Из (16) получим

$$\overline{P_h}Az_k^h = P_h\left\{\frac{Q_h(A)[u(t_k)-u(t_{k-1})]}{\tau} - u'(t_k)\right\} - \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}.$$

Тогда

$$\|\overline{P_h}Az_k^h\|_H^2\tau \leqslant 2\left\|P_h\left\{\frac{Q_h(A)[u(t_k)-u(t_{k-1})]}{\tau} - u'(t_k)\right\}\right\|_H^2\tau + 2\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Оценим первое слагаемое в правой части последнего неравенства.

$$\left\|P_h\left\{\frac{Q_h(A)[u(t_k)-u(t_{k-1})]}{\tau} - u'(t_k)\right\}\right\|_H^2\tau \leqslant$$

$$\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[Q_h(A)-I]u'(t)\,dt - \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(u'(t)-u'(t_k))\,dt\right\|_H^2\tau \leqslant$$

$$\frac{2}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[Q_h(A)-I]u'(t)\,dt\right\|_H^2 + \frac{2}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_k}^{t}u''(s)\,ds\,dt\right\|_H^2 \leqslant$$

$$2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt + 2\tau^{3-2/p}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}. \tag{22}$$

С учетом (22) неравенство (21) преобразуется к виду

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_V^2 \leqslant M\Bigg\{\int_0^T\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt +$$

$$\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p} + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\Bigg\}. \tag{23}$$

Теперь (15) следует из (20) и (23). ■

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть $u(t)$ — решение задачи (2), а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ — решение задачи (4). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau +$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant C\Big\{\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+$$

$$\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2\,dt+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\Big\}. \tag{24}$$

Доказательство. Оценку (15) преобразуем к виду, который позволил бы оценить погрешность

$$z_k=u(t_k)-u_k^h=z_k^h+[I-Q_h(A)]u(t_k).$$

С учетом утверждения леммы 1 получим

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|z_k\|_V^2\leqslant 2\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_V^2+2\alpha^{-1}\mu\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$z_k-z_{k-1}=(z_k^h-z_{k-1}^h)+\int_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt.$$

Из последнего равенства следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2+\frac{2\mu}{\alpha}\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2\,dt. \tag{26}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k-z_{k-1}}{\tau}\right\|_H^2\tau=\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Для завершения оценки (15) осталось рассмотреть слагаемое

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\left\|u'(t_k)-\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt\right\|_H^2\tau+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau=I_1+I_2. \tag{27}$$

Оценка слагаемого I_2 уже установлена в (26). Рассмотрим слагаемое

$$I_1=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u'(t_k)-u'(t)]\,dt\right\|_H^2\leqslant$$

$$2\tau\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\,ds\right)^2\leqslant 2\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(s)\|_H^p\,ds\right)^{2/p}. \tag{28}$$

Оценка (24) теперь следует из оценок (25), (26), (27), (28) и (15). ■

Из оценки (24) естественным образом получается сходимость погрешности к нулю. Для этого достаточно предположить, что задана предельно плотная в V при $h \to 0$ последовательность подпространств $\{V_h\}$. Это означает, что $\|(I-Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Тогда при $\tau \to 0$ и $h \to 0$

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k)-u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \to 0.$$

Оценка (24) позволяет получить скорость сходимости и по пространственным переменным. Введем в рассмотрение множество $D(A)=\{u\in V : Au\in H\}$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A)\subset E\subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|v\|_E \leqslant \delta\|Av\|_H \quad (v\in D(A)), \tag{29}$$

где $\delta \geqslant 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства: $H=L_2(\Omega), V=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), V'=W_2^{-1}(\Omega), E=W_2^2(\Omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то пространства следующие: $H=L_2(\Omega), V=W_2^1(\Omega), E=W_2^2(\Omega)$.

Пусть подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством

$$\|(I-Q_h)v\|_V \leqslant rh\|v\|_E \quad (v\in E), \tag{30}$$

типичным для подпространств типа конечных элементов [8].

В [9] показано, что из (29) и (30) для $v\in V$ следует оценка (аналог леммы Обэна-Нитше)

$$\|[I-Q_h(A)]v\|_H \leqslant r\mu\delta^{-1}h\|(I-Q_h)v\|_V. \tag{31}$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть также выполнено условие (29) и решение $u(t)$ задачи (2) такое, что $u\in C([0,T],E)$. Пусть подпространства V_h обладают свойством (30). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k)-u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \leqslant C\left\{ \tau^{3-2/p} \left(\int\limits_0^T \|u''(t)\|_H^p\,dt \right)^{2/p} + \right.$$

$$\left. h^2 \left(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2 \right) \right\}. \tag{32}$$

Доказательство оценки (32) следует из оценки (24). При этом следует воспользоваться оценками (30) и (31). ■

Автор выражает благодарность В. В. Смагину за постановку задачи и обсуждение научных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М. : Мир, 1977. — 384 с.

2. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 372 с.

3. Бондарев, А. С. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 78–88.

4. Бондарев, А. С. Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев, В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 81–94.

5. Смагин, В. В. Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения / В. В. Смагин // Матем. заметки. — 1997. — Т. 62, № 6. — С. 898–909.

6. Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

7. Смагин, В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143–160.

8. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

9. Смагин, В. В. Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана / В. В. Смагин // Изв. вузов. Матем. — 1996. — № 3. — С. 50–57.

REFERENCES

1. Aubin J.-P. Approximate solution of the elliptic boundary problems. [Obe'n Zh.-P. Priblizhennoe reshenie e'llipticheskikh kraevikh zadach]. Moscow: Mir, 1977, 384 p.

2. Lions J.-L., Magenes E'. Inhomogeneous boundary problems and its applications. [Lions Zh.-L., Magenes E'. Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya]. Moscow: Mir, 1971, 372 p.

3. Bondarev A.S. The solvability of the variational parabolic equation with a periodic condition on the solution. [Bondarev A.S. Razreshimost' variacionnogo parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 78–88.

4. Bondarev A.S., Smagin V.V. The convergence of projection-difference method of approximate solution of parabolic equation with a periodic condition on the solution. [Bondarev A.S., Smagin V.V. Skhodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhyonnogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 81–94.

5. Smagin V.V. Strong-norm error estimates for the projective-difference method for approximately solving abstract parabolic equations. [Smagin V.V. Ocenki v sil'nykh normakh pogreshnosti proekcionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya abstraktnogo

parabolicheskogo uravneniya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1997, vol. 62, no. 6, pp. 898–909.

6. Vaynikko G.M., Oya P.E. About the convergence and the velocity of convergence of the Galerkin's method for abstract evolutionary equations. [Vajnikko G.M., Oya P.E'. O shodimosti i bystrote shodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh e'volucionnykh uravneniy]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1269–1277.

7. Smagin V.V. Estimates of the rate of convergence of projective and projective-difference methods for weakly solvable parabolic equations. [Smagin V.V. Ocenki skorosti skhodimosti proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metodov dlya slabo razreshimykh parabolicheskikh uravnenij]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 3, pp. 143–160.

8. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction to projection-difference methods. [Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Vvedenie v proekcionno-setochnye metody]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.

9. Smagin V.V. Error estimates of the Galerkin semi-discrete approximations for parabolic equations with the Neumann boundary condition. [Smagin V.V. Ocenki pogreshnosti poludiskretnykh priblizhenij po Galerkinu dlya parabolicheskikh uravnenij s kraevym usloviem tipa Nejmana]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya: Mathematics*, 1996, no. 3, pp. 50–57.

Бондарев Андрей Сергеевич, аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Bondarev Andrei Sergeevich, postgraduate student of the department of Functional analysis and operation equations of the Maths faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation,
E-mail: bondarev@math.vsu.ru