УДК 517.927.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ СУММОЙ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

Е. С. Болдырева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 08.05.2017 г.

Аннотация. В данной работе исследуется устойчивость решения дифференциального уравнения, левая часть которого представлена в виде суммы двух коммутирующих неограниченных операторов, один из которых порождает сильно-непрерывную однопараметрическую полугруппу (C_0-полугруппу), а другой — аналитическую полугруппу. Рассматривается случай бесконечномерного пространства и исследуются условия на производящие операторы полугрупп, стоящие в левой части уравнения. В статье разрабатывается метод доказательства сильной устойчивости полугрупп, порожденных суммой двух коммутирующих операторов на гильбертовом пространстве. Доказательство основано на методах, связанных с теоремой Томилова, формулами Da Prato – Grisvard и аппроксимациями Иосиды.

Ключевые слова: аналитическая полугруппа, C_0-полугруппа, резольвента, интегральное представление, устойчивость.

ABOUT STABILITY OF STRONGLY CONTINUOUS SEMIGROUPS GENERATED BY SUM OF TWO OPERATORS

E. S. Boldyreva

Abstract. We study the stability of solutions of differential equation; which left side is represented as the sum of two commuting unbounded operators. One of which generates strongly continuous one-parametric semigroup (C_0-semigroup) and another one generates analytic semigroup. We study the case of infinite-dimensional space and investigate the conditions on generators of semigroups, which are located at the left-hand side of the equation. The aim of the article is to provide a method of proving the strong stability of semigroups generated by the sum of two commuting unbounded operators in Hilbert space. The proof is based on the methods associated with Tomilov's theorem, formulas of Da Prato – Grisvard and Yosida approximations.

Keywords: analytic semigroup, strongly continuous semigroup, resolvent, integral representation, stability.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была доказана сильная устойчивость полугрупп, порожденных суммой двух коммутирующих операторов, которые порождали аналитическую полугруппу. В настоящей работе такое исследование проводилось в случае, когда один из операторов порождает C_0-полугруппу, а другой — аналитическую.

В случае гильбертова пространства для доказательства аналогичного утверждения мы будем опираться на результаты, изложенные Yu. Tomilov [2], [3], А. М. Гомилко [4], T. Eisner [5], М. А. Красносельским [6], G. Da Prato et P. Grisvard [7], E. Hille [8], K.-J. Engel, R. Nagel [9],

[10], L. Lorenzi, A. Lunardi, G. Metafune, D. Pallara [11], K. Taira [12]. Приведем эти результаты ниже в удобной для нас форме в разделе основные определения. Другие задачи теории устойчивости полугрупп, порожденных суммой операторов, рассматривались В. А. Костиным [13], М. И. Каменским, И. М. Гудошниковым [14].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. *[6] Пусть в банаховом пространстве X задано семейство T(t) ($t \geqslant 0$) ограниченных операторов. Говорят, что это семейство образует C_0-полугруппу, если выполнены следующие условия:*

1. $T(t+s) = T(t)\,T(s) = T(s)\,T(t)$ *при* $t,\ s\ \geqslant 0$ *и* $T(0) = I$.
2. *Функция T(t)x непрерывна по норме на* $[0{,}\infty)$ *при каждом фиксированном* $x \in X$.

В точке t=0, естественно, предполагается лишь, что T(t)x непрерывна справа.

В случае одномерного пространства непрерывные полугруппы — это функции $T(t) = e^{\alpha t}$, *где* α *– произвольное комплексное число.*

Определение 2. *[5]* C_0*-полугруппа T(t) в банаховом пространстве X называется ограниченной, если*

$$\sup_{\mathrm{t}\geqslant 0}\|T(t)\| < \infty.$$

Определение 3. *[8] Пусть* T(t) - C_0*-полугруппа оператора, действующего в банаховом пространстве* X. *Обозначим через* A *линейный оператор, определяемый как сильный предел*

$$Ax = \lim_{\Delta \mathrm{t}\to +0}\frac{1}{\Delta \mathrm{t}}\left[T(t) - I\right]x$$

на тех элементах x, для которых указанный предел существует. Оператор A называется производящим оператором полугруппы T(t). Ниже эту полугруппу мы будем обозначать e^{At}.

Определение 4. *[4] Пусть A – производящий оператор полугруппы* e^{At}. *Тогда его резольвента* $R(a+is{,}A) = (A - (a+is)\,I)^{-1}$ *имеет следующий вид*

$$\int\limits_0^\infty e^{-(a+is)t}e^{At}dt$$

Определение 5. *[5]* C_0*-полугруппа* e^{At} *в банаховом пространстве X называется сильно устойчивой, если*

$$\lim_{\mathrm{t}\to\infty}\left|\left|e^{At}x\right|\right| = 0$$

для всех $x \in X$.

Теорема Томилова [3]: Пусть $(e^{\mathrm{At}})_{t\geqslant 0}$ ограниченная C_0-полугруппа на гильбертовом пространстве H с производящим оператором A. Тогда полугруппа $(e^{\mathrm{At}})_{t\geqslant 0}$ будет устойчивой тогда и только тогда, когда для каждого $x \in H$

$$\lim_{\mathrm{a}\to +0} a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\left|R(a+i\beta,\ A)\,x\right|\right|^2 d\beta = 0$$

Обозначим через $L(X)$ множество ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве X.

Определение 6. *[11] Линейный оператор $A\ : D\,(A) \subset X \to X$ называется секториальным оператором в X, если существуют константы $\omega \in \mathbb{R}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $M > 0$, для которых выполнено :*

a. $\rho_A \supset S_{\theta,\omega} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$,

b. $\|R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \lambda \in S_{\theta,\omega}$.

Для каждого $t > 0$ данные условия позволяют выразить полугруппу $T(t) = e^{At}$, порожденную оператором A, в виде интегральной формулы

$$e^{At} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r,\eta}} e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda, t \in \mathbb{R}$$

где $r > 0$, $\eta \in (\frac{\pi}{2}, \theta)$. Контуром $\gamma_{r,\eta}$ является кривая заданная следующей формулой

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |arg\lambda| = \eta, |\lambda| \geqslant r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg\lambda| \leqslant \eta, |\lambda| = r\},$$

где контур обходится против часовой стрелки, как на рисунке 1.

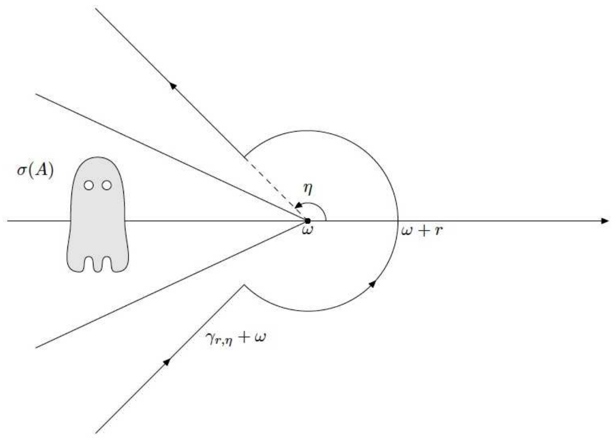

Рис. 1.

Определение 7. *[9] Семейство операторов $\left(e^{At}\right)_{t \in \Sigma_d \cup \{0\}} \subset L\,(x)$ называется аналитической полугруппой в секторе*

$$\Sigma_d := \{\lambda \in \mathbb{C}\ : |arg\lambda| < d\} \setminus \{0\},\ \ d \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

если

- $T\,(0) = I$ *и* $T\,(t_1 + t_2) = T\,(t_1)\,T\,(t_2)\ \ \forall\,(t_1, t_2 \in \Sigma_\delta)$;
- *отображение $t \to T(t)$ аналитично в Σ_d;*
- $\lim_{\Sigma_{\widetilde{d}} \ni t \to 0} T(t)x = x\ \ \forall\,(x \in X)$ *и* $0 < \widetilde{d} < d$.

Воспользуемся оценкой на резольвенту производящего оператора аналитической полугруппы из работы K. Taira [12], которая эквивалентна неравенству (b) из определения [6]. Если резольвента существует в области, изображенной на рисунке 2, то тогда неравенство

(b) из определения [6] имеет следующий вид – существует положительная константа M, такая что резольвента $(A-\lambda)^{-1}$ удовлетворяет следующему неравенству

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|},\ \forall\,(\lambda\in\Sigma_d)\,,$$

и резольвентное множество оператора A содержит сектор $\Sigma\ _d$,представленный на рисунке 2.

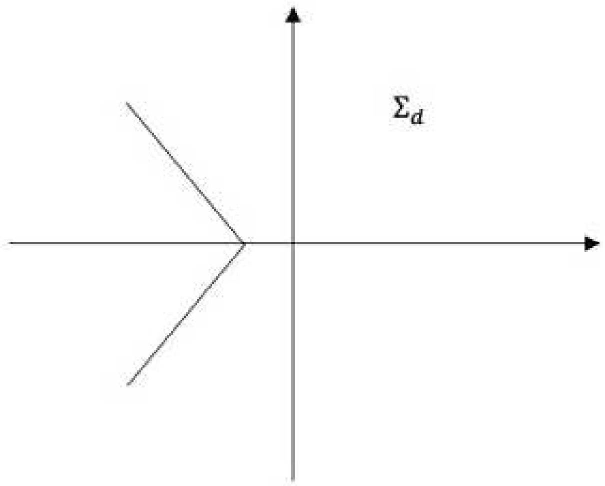

Рис. 2.

Кроме того нам потребуются результаты из статьи [7].

Рассмотрим два замкнутых оператора A, порождающий C_0-полугруппу, и B, порождающий аналитическую полугруппу, определенных на соответствующих областях $\mathrm{D_A}$ и $\mathrm{D_B}$ в X, и их резольвентные множества ρ_A *и* ρ_B не пусты.

Операторы A и B коммутируют в том смысле, что

$$\left[(A-\lambda)^{-1};(B-\mu)^{-1}\right]=0,\ \ \forall\ \lambda\in\rho_A\ u\ \mu\in\rho_B,$$

где [.] обозначает коммутант операторов $(A-\lambda)^{-1};(B-\mu)^{-1}$, то есть

$$\left[(A-\lambda)^{-1};(B-\mu)^{-1}\right]=(A-\lambda)^{-1}(B-\mu)^{-1}-(B-\mu)^{-1}(A-\lambda)^{-1}$$

Рассмотрим аппроксимации Иосиды оператора A, определяемые следующей формулой :

$$A_n=-n^2(A-n)^{-1}-n=-nA(A-n)^{-1}$$

Так как операторы A_n ограничены при каждом фиксированном $n,$ то полугруппы, порожденные операторами A_n будут аналитическими, но в разных секторах в зависимости от n. Введем константу M_{A_n}, тогда будет справедлива следующая оценка в левой полуплоскости

$$||(A_n+z-a-is)^{-1}||\leqslant\frac{M_{A_n}}{1+|z+a+is|},$$

где $s\in\mathbb{R}^1,\quad z\in\rho_{A_n+B}.$

В соответствии с работой G. Da Prato и P. Grisvard [7], удобно ввести следующее обозначение, пусть P линейное отображение с областью определения $\mathrm{D_p}$ в X и для $z\in\rho_p\subset\mathbb{C}$ определена резольвента $(P-z)^{-1}$. Пусть $\varphi\in[0;\pi]$, говорят, что P удовлетворяет $\mathrm{H}(\varphi)$, если

1) $\rho_P \supset \sum_P = \{z \in \mathbb{C};\ -\pi + \varphi < argz < \pi - \varphi\}$

2) Существует четная выпуклая функция C_P, определенная на

$[-\pi + \varphi; \pi - \varphi]$, такая что

$$\left\|(P - z)^{-1}\right\| \leqslant \frac{C_P(\theta)}{|z|}, \text{ где } \arg z = \theta.$$

Пусть оператор A_n удовлетворяет условию $H(\theta_{A_n})$ и оператор B удовлетворяет условию $H(\theta_B)$. Мы будем предполагать, что существуют θ_{A_n} и $\theta_B \geqslant 0$ такие, что

$$\theta_{A_n} + \theta_B < \pi.$$

Тогда один из углов θ_{A_n} или θ_B меньше $\frac{\pi}{2}$.

Ниже нам потребуется резольвента оператора A_n+B, то есть для заданного $a+is$ нужно найти решение уравнения

$$(A_n + B)\,x - (a + \mathrm{is})\,x = y \qquad (1)$$

Это решение задается формулой см. [7]

$$x = S_{a+is}y,$$

где

$$S_{a+\mathrm{is}} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(A_n + z - a - is)^{-1}(B - z)^{-1}dz, \quad a + is > 0,$$

Здесь γ кривая, соединяющая $\infty e^{-i\theta_0}$ c $\infty\, \mathrm{e}^{i\theta_0}$ и определенная в $(\Sigma_{A_n} - a - \mathrm{is}) \cap (\Sigma_{-B})$, где $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_{A_n}$, представлена на рисунке 3.

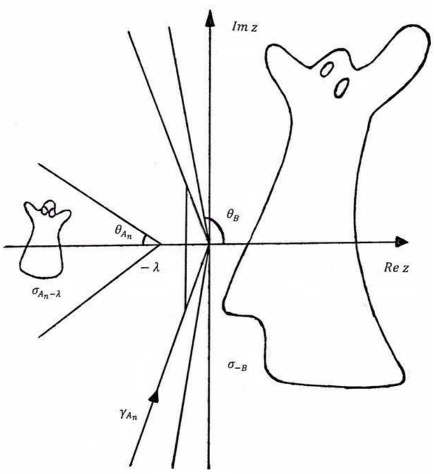

Рис. 3.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть A порождает C_0 – полугруппу e^{At} на гильбертовом пространстве H, и*

$$a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}||R(a+is,\,A_n)x||^2\mathrm{ds}\underset{a\to 0+}{\to}0$$

равномерно по n. Оператор B порождает устойчивую аналитическую полугруппу, A и B коммутируют. Тогда полугруппы $T_n(t)$, порожденные операторами (A_n+B), будут сильно устойчивы, равномерно по n, то есть

$$\left\|e^{A_n t}x\right\|\to 0$$

равномерно по n для любого $x\in H$.

Доказательство. Покажем, что

$$a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}||R(a+is,A_n+B)x||^2\mathrm{ds}\underset{a\to 0+}{\to}0 \quad (2)$$

равномерно по n.

Таким образом, так как оператор B порождает аналитическую полугруппу, то существует константа $M_B\geqslant 1$, для которой верна следующая оценка

$$\left\|(B-\mu)^{-1}\right\|\leqslant\frac{M_B}{1+|\mu|},\quad \mu\in\rho_B.$$

Поскольку оператор A порождает C_0 – полугруппу, то справедлива следующая оценка: существует константа $M_A\geqslant 1$ такая, что

$$\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\|\leqslant\frac{M_A}{\lambda},\ \ \lambda>0,\ \ \lambda\in\rho_A$$

Полугруппы, порожденные оператором A_n, являются аналитическими, поэтому мы можем переписать резольвенту $R\left(a+is,A_n+B\right)$ в следующем виде:

$$R\left(a+is,A_n+B\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left(A_n+z-a-is\right)^{-1}\left(B-z\right)^{-1}\mathrm{dz},$$

где γ контур интегрирования, состоящий из ломаной с вершиной в точке σ_0, где σ_0 – некоторое число. Обозначим $\Gamma_1\left(\alpha,\sigma_0\right)+\Gamma_2\left(\alpha,\sigma_0\right)$ - ломаную, состоящую из двух лучей $\lambda=\sigma_0+\rho e^{-i\alpha}\left(0\leqslant\rho<\infty\right)$ и $\lambda=\sigma_0+\rho e^{i\alpha}\left(0\leqslant\rho<\infty\right)$), где α любое фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}+arcsin\frac{1}{M_{A_n}}\right)$ Имеем (делая замену $z=\rho e^{\pm i\varphi},dz=e^{\pm i\varphi}d\rho$),

$$\int\limits_{\gamma}\left(A_n+z-a-is\right)^{-1}\left(B-z\right)^{-1}\mathrm{dz}=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left(A_n+z-a-is\right)^{-1}\left(B-z\right)^{-1}\mathrm{dz}=$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(A_n + \rho e^{i\varphi} - a - is\right)^{-1} \left(B - \rho e^{i\varphi}\right)^{-1} e^{i\varphi} d\rho +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \left(A_n + \rho e^{-i\varphi} - a - is\right)^{-1} \left(B - \rho e^{-i\varphi}\right)^{-1} e^{-i\varphi} d\rho$$

Итак,

$$\lim_{\mathrm{a}\to 0+} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||R\left(a + is, A_n + B\right) x||^2 \, ds =$$

$$\lim_{\mathrm{a}\to 0+} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} || - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \left(A_n + z - a - is\right)^{-1} \left(B - z\right)^{-1} \mathrm{dz \ x}||^2 \mathrm{ds} \quad (3)$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\int\limits_\gamma \left(A_n + z - a - is\right)^{-1} \left(B - z\right)^{-1} \mathrm{dz} \ x = w,$$

тогда w является решением следующего уравнения

$$\left(A_n + B\right) w - \left(a + is\right) w = x \qquad (4)$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \left(A_n + z - a - is\right)^{-1} \left(B - z\right)^{-1} dzx = \left(A_n + B - \left(a + is\right)\right)^{-1} x \qquad (5)$$

Воспользуемся аппроксимациями Иосиды и преобразуем правую часть равенства (5)

$$A_n + B - (a + is) = -n^2(A - n)^{-1} - n + B - (a + is) =$$

$$= \left(B - n - (a + is)\right)\left[1 - n^2(A - n)^{-1}(B - n - (a + is))^{-1}\right]$$

А именно,

$$\left(A_n + B - (a + is)\right)^{-1} = \left(B - n - (a + is)\right)^{-1} \left[1 - n^2(A - n)^{-1}(B - n - (a + is))^{-1}\right]^{-1}$$

Оценим $n^2(A - n)^{-1}(B - n - (a + \mathrm{is}))^{-1}$ при каждом фиксированном n. Имеем,

$$||n^2(A - n)^{-1}(B - n - (a + is))^{-1}||^2 \leqslant n^4 \frac{M_A}{n^2} \frac{M_B}{1 + |n + a + is|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_A M_B n^2}{1 + (n + a)^2 + s^2}$$

Заметим, что справедлива единственно следующая оценка

$$||(B - n - (a + is))^{-1}[1 - n^2(A - n)^{-1}(B - n - (a + is))^{-1}]^{-1}||^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_B}{1 + (n + a)^2 + s^2} \sum_{k \geqslant 0} M_A M_B \left(\frac{n^2}{1 + (n + a)^2 + s^2}\right)^k. \qquad (6)$$

Так как $(\frac{n^2}{1+(n+a)^2+s^2})^k < 1$, то

$$\sum_{k\geqslant 0}(\frac{n^2}{1+(n+a)^2+s^2})^k =$$

$$= \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{1}{1+\frac{a^2+2an+s^2+1}{n^2}}\right)^k =$$

$$= \left(1-\frac{1}{1+\frac{a^2+2an+s^2+1}{n^2}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{(a+n)^2+s^2+1}{a^2+2an+s^2+1}$$

Вернемся к оценке (6)

$$\frac{M_B}{1+(n+a)^2+s^2}\sum_{k\geqslant 0}M_AM_B(\frac{n^2}{1+(n+a)^2+s^2})^k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_B}{1+(n+a)^2+s^2}\bullet\frac{(a+n)^2+s^2+1}{a^2+2an+s^2+1}M_AM_B =$$

$$= \frac{M_AM_B^2}{a^2+2an+s^2+1}$$

Положим $n=0$ и $a=0$, имеем

$$\frac{M_AM_B^2}{a^2+2an+s^2+1} = \frac{M_AM_B^2}{s^2+1}$$

и, следовательно, интеграл в выражении (5) сходящийся.

Воспользуемся оценкой из [6] :

$$\left\|\int\limits_{\gamma}(A_n+z-a-\mathrm{is})^{-1}(B-z)^{-1}\,\mathrm{dz}\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\gamma}||(A_n+z-a-is)^{-1}(B-z)^{-1}||^2\mathrm{dz}$$

В выражении (3) мы можем воспользоваться теоремой Фубини [6] и поменять порядок интегрирования. Имеем,

$$\lim_{\mathrm{a}\to 0+} a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}||-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}(A_n+z-a-is)^{-1}(B-z)^{-1}\,\mathrm{dz}\ \mathrm{x}||^2\mathrm{ds} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\mathrm{a}\to 0+} a\int\limits_{\gamma}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\|(A_n+z-a-is)^{-1}(B-z)^{-1}\right\|^2\mathrm{ds}\ x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{dz}]^2 \qquad (7)$$

Рассмотрим оператор (A_n+z) и его резольвенту. Так как z, $\varphi\in\gamma$ имеем,

$$R\,(a+is,A_n+z) = \int\limits_0^{\infty}e^{-(a+is)t}e^{(A_n+z)t}\mathrm{dt} =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-(a+is)t} e^{\mathrm{zt}} e^{A_n t} \mathrm{dt}$$

Полугруппа $e^{A_n t}$ устойчива по условию теоремы, то есть

$$\left\| e^{A_n t} \right\| \underset{\mathrm{t}\to\infty}{\to} 0.$$

Полугруппа e^{zt} будет устойчивой для любого фиксированного z, так как z лежит в левой полуплоскости.

Следовательно, полугруппа, порожденная оператором $(A_n + z)$ будет устойчивой для любого фиксированного z.

Рассмотрим внутренний интеграл в выражении (7)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A_n + z - a - is)^{-1} (B - z)^{-1} \right\|^2 \mathrm{ds} =$$

$$= \left\| (B - z)^{-1} \right\|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ||(A_n + z - a - is)^{-1}||^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{{M_B}^2}{1 + |z|^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A_n + z - a - is)^{-1} \right\|^2 \mathrm{ds}$$

При фиксированном z оператор $\left\| (B - z)^{-1} \right\|^2$ ограничен, интеграл

$$a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A_n + z - a - is)^{-1} \right\|^2 \mathrm{ds}$$

сходится равномерно по n при $a \to 0$.

Значит по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла можно перейти к пределу под интегралом в выражении (7).

Имеем,

$$\frac{1}{4\pi^2} \lim_{a\to 0+} a[\int\limits_\gamma \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A_n + z - a - is)^{-1} (B - z)^{-1} \right\|^2 \mathrm{ds}x \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{dz}]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2} [\int\limits_\gamma \left(\lim_{\mathrm{a}\to 0+} a \frac{{M_B}^2}{1 + |z|^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| (A_n + z - a - \mathrm{is})^{-1} x \right\|^2 \mathrm{ds} \right)^{\frac{1}{2}}]^2 \, \mathrm{dz}. \tag{8}$$

Так как внутренний интеграл в силу необходимого условия теоремы Томилова сходится при фиксированном $z \in \gamma$, поэтому

$$\lim_{\mathrm{a}\to 0+} a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} | |R(a + i\beta, \, A_n) \, x| |^2 d\beta = 0$$

Таким образом,

$$a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\left| \left(A_n + z - a - is\right)^{-1} \left[(B - z)^{-1} \ x \right] \right|\right|^2 ds \to 0$$

равномерно по n.

Следовательно,

$$\lim_{a\to 0+} a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\left| R\left(a + is, A_n + B\right) x \right|\right|^2 ds = 0$$

равномерно по n, то есть полугруппы, порожденные операторами ($\mathrm{A_n}$+B), будут сильно-устойчивы, равномерно по n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдырева, Е. С. О методе доказательства устойчивости полугрупп, порожденных суммой двух операторов / Е. С. Болдырева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 2. — С. 78–84.

2. Tomilov, Yu. On the spectral bound of the generator of a C_0-semigroup / Yu. Tomilov // Studia mathematica. — 1997. — V. 125, № 1. — P. 23–33.

3. Tomilov, Yu. A resolvent approach to stability of operator semigroups / Yu. Tomilov // Operator theory. — 2001. — V. 46. — P. 63–98.

4. Гомилко, А. М. Об обратном операторе генератора ограниченной C_0-полугруппы / А. М. Гомилко // Функциональный анализ и его приложения. — 2004. — Т. 38, № 4. — С. 6–12.

5. Eisner, T. Stability of operators and operator semigroups / T. Eisner // Operator Theory : Advances and Applications (Basel). — 2010. — V. 209. — P. 204.

6. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966. — 499 с.

7. Da Prato, G. Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationnelles / G. Da Prato, P. Grisvard // J. ds Maths. — 1975. — V. 54. — P. 305–387.

8. Hille, E. Functional analysis and semi-groups / E. Hille, Ralph S. Phillips // Providence, R. I. : American Mathematical Society. — 1957. — V. 31. — P. 808.

9. Engel, K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel // Springer-Verlag New York. — 2000. — V. 194. — P. 589.

10. Engel, K.-J. A Short Course on Operator Semigroups / K.-J. Engel, R. Nagel. — Springer, 2006. — 248 p.

11. Analytic Semigroups and Reaction-Diffusion Problems / L. Lorenzi, A. Lunardi, G. Metafune, D. Pallara // Internet Seminar. — 2004–2005. — P. 127.

12. Taira, K. Semigroups, Boundary Value Problems and Markov Processes / K. Taira. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. — 716 p.

13. Костин, В. А. К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп / В. А. Костин // Алгебра и анализ. — 1999. — Т. 11, № 1. — С. 118–140.

14. Каменский, М. И. Об устойчивости возмущенных полугрупп в полуупорядоченных банаховых пространствах / М. И. Каменский, И. М. Гудошников // СМФН. — 2016. — № 59. — С. 97–118.

REFERENCES

1. Boldyreva E.S. The method of proving the stability of semigroups generated by sum of two operators. [Boldyreva E.S. O metode dokazatel'stva ustoyjchivosti polugrupp, porozhdennyx summoyj dvux operatorov]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika.*

Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2017, no. 2, P. 78–84.

2. Tomilov Yu. On the spectral bound of the generator of a C_0-semigroup. Studia mathematica, 1997, vol. 125, no. 1, pp. 23–33.

3. Tomilov Yu. A resolvent approach to stability of operator semigroups. Operator theory, 2001, vol. 46, pp. 63–98.

4. Gomilko A. The Cayley transform of the generator of a bounded C_0–semigroup. [Gomilko A.M. Ob obratnom operatore generatora ogranichennoyj C_0-polugruppy]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 2004, vol. 38, no. 4, pp. 6–12.

5. Eisner T. Stability of operators and operator semigroups. Operator Theory: Advances and Applications (Basel), 2010, vol. 209, p. 204.

6. Krasnosel'skii M.A., Zabreyko P.P., Pystylnik E.I., Sobolevski P.E. Integral operators in spaces of summable functions. [Krasnosel'skii M.A., Zabreyko P.P., Pystylnik E.I., Sobolevski P.E. Integral'nye operatory v prostranstvax summiruemyx funkciyj]. Moscow, 1966, 499 p.

7. G. Da Prato, P. Grisvard. Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationnelles. J. ds Maths, 1975, vol. 54, pp. 305–387.

8. Hille E., Ralph S. Phillips. Functional analysis and semi-groups. Providence R.I.: American Mathematical Society, 1957, vol. 31, p. 808.

9. Engel, K.-J., Nagel, R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. Springer-Verlag New York, 2000, vol. 194, p. 589.

10. Engel K.-J., Nagel R. A Short Course on Operator Semigroups. Springer, 2006, 248 p.

11. Lorenzi L., Lunardi A., Metafune G., Pallara D. Analytic Semigroups and Reaction-Diffusion Problems, Internet Seminar, 2004–2005, p. 127.

12. Taira K. Semigroups, Boundary Value Problems and Markov Processes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014, 716 p.

13. Kostin V.A. On the Solomyak-Yosida theorem for analytic semigroups. [Kostin V.A. K teoreme Solomyaka–Iosidy dlya analiticheskix polugrupp]. *Algebra i analiz — Algebra and Analiz*, 1999, vol. 11, no. 1, pp. 118–140.

14. Kamenskii, M.I., Gudoshnikov, I.M. On stability of perturbed semigroups in partially ordered Banach spaces. [Kamenskiyj M.I., Gudoshnikov I.M. Ob ustoyjchivosti vozmushhennyx polugrupp v poluuporyadochennyx banaxovyx prostranstvax]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2016, no. 59, pp. 97–118.

Болдырева Елена Сергеевна, аспирант кафедры функционального анализа и операторных уравнений математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: elenaliapina11@mail.ru
Тел.: +7(473)220–87–71

Boldyreva Elena Sergeevna, Postgraduate student, the Functional Analysis and Operator Equations Department, Mathematical faculty, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: elenaliapina11@mail.ru
Tel.: +7(473)220–87–71