УДК 519.624

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ*

Ж. И. Бахтина, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.05.2016 г.

Аннотация. В работе рассматривается модель колебаний разрывной стилтьесовской струны с произвольным распределением масс (включая сосредоточенные), помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями. Математическая модель реализуется в виде начально – краевой задачи второго порядка с особенностями в потенциале как типа δ функций, так и δ' – взаимодействий. Мы пользуемся расширенным толкованием интеграла и меры Стилтьеса, предложенным Ю. В. Покорным. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о такой мере, мы заключаем функцию, стоящую под знаком дифференциала в квадратные скобки. За счет расширения понятия интеграла удается сохранить поточечное толкование как решений, так и соотношений, что позволяет провести исследование модели методами, аналогичными классическим. В работе приведен алгоритм для нахождения приближенного решения, получена оценка сходимости.

Ключевые слова: стилтьесовская струна, интеграл Стилтьеса, разрывные решения, мера, метод конечных элементов.

ON THE ADAPTATION OF THE FINITE ELEMENTS METHOD FOR A MODEL OF STRING OSCILLATIONS WITH DISCONTINUOUS SOLUTIONS

Zh. I. Bakhtina, Zh. O. Zalukaeva, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov

Abstract. The present work is concerned with a study of a model of discontinuous Stiltjes string oscillations with arbitrary mass distribution (including concentrated masses). The string is placed in the environment with localized singularities. The mathematical model is realized in the form of the second order initial – boundary value problem with singularities in the potential of δ functions or δ' – interactions types. We apply expanded definitions of Stiltjes integral and measure, that were recommended by Yu. V. Pokornyi. To emphasize that we use the expanded definition of Stiltjes integral, we conclude the function standing under the sign of the differential in brackets. This fact has allowed to preserve the pointwise interpretation of solutions and relations, so we can investigate our model by methods which are similar to classic. The article presents the algorithm for finding of the approximate solution, the estimate of convergence is obtained.

Keywords: Stiltjes string, Stiltjes integral, discontinuous solutions, measure, finite elements method.

Исследованию процессов, происходящих в струнных системах, посвящено много работ (см., например [1]–[3]). Особое внимание уделяется изучению моделей колебаний, описываемых дифференциальными уравнениями с особенностями в коэффициентах, краевых или начальных условиях [4]–[8]. Однако численные методы для нахождения приближенных решений

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

© Бахтина Ж. И., Залукаева Ж. О., Зверева М. Б., Шабров С. А., 2018

такого рода моделей находятся в стадии формирования. В настоящей работе приведен алгоритм для нахождения приближенного решения задачи о колебаниях разрывной стилтьесовской струны с произвольным распределением масс (включая сосредоточенные), помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями. Получена оценка сходимости.

Рассмотрим математическую модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами, расположенной вдоль отрезка $[0,\ell]$

$$\begin{cases} M'_{[\sigma]}(x)u''_{tt}(x,t) = \big(p(x)u'_\mu(x,t)\big)'_{[\sigma]} - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u'_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $p(x)$, $F(x,t)$ — функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$, причем $\inf\limits_{[0,\ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$ строго возрастают на $[0,\ell]$, а $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$.

В обобщенное дифференцирование $\dfrac{d}{d[\sigma]}$ вкладывается особый смысл, определяемый предложенной Ю. В. Покорным расширенной трактовкой интеграла Стилтьеса, когда происходит "расщепление" меры в точке разрыва [9].

Дифференцирование u'_μ обращается интегрированием по Стилтьесу по μ–мере. При этом в каждой точке ξ разрыва $\mu(x)$ верно равенство

$$u'_\mu(\xi,t) = \frac{u(\xi+0,t) - u(\xi-0,t)}{\mu(\xi+0) - \mu(\xi-0)}.$$

В точках ξ, в которых $u(x,t)$ терпит разрыв, справедливы равенства

$$\Delta^- M(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi-0,t) = \Delta^-\left(p\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)(\xi,t) - u(\xi-0,t)\Delta^- Q(\xi) + \Delta^- F(\xi,t),$$

$$\Delta^+ M(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi+0,t) = \Delta^+\left(p\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)(\xi,t) - u(\xi+0,t)\Delta^+ Q(\xi) + \Delta^+ F(\xi,t).$$

$$\Delta^-\left(p\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)(\xi,t) = p(\xi)u'_\mu(\xi,t) - p(\xi-0)u'_\mu(\xi-0,t),$$

$$\Delta^+\left(p\frac{\partial u}{\partial \mu}\right)(\xi,t) = p(\xi+0)u'_\mu(\xi+0,t) - p(\xi)u'_\mu(\xi,t).$$

Заметим, что левый и правые скачки $\Delta^- M(\xi)$ и $\Delta^+ M(\xi)$ соответственно равняются массам, сосредоточенным на разорванных (в точке ξ) концах струны, $\Delta^- Q(\xi)$ и $\Delta^+ Q(\xi)$ равняются упругостям внешних пружин, прикрепленных к разорванным концам струн, а $\Delta^- F(\xi,t)$ и $\Delta^+ F(\xi,t)$ — сосредоточенные на разорванных концах струн силы.

В точках s, в которых функция $u(x,t)$ непрерывна, но хотя бы одна из функций $p(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $F(x,t)$ терпит разрыв, следует равенство

$$\Delta M(s)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t) = \Delta(pu'_\mu)(s,t) - u(s,t)\Delta Q(s) + \Delta F(s,t),$$

где символ Δ обозначает полный скачок, равный сумме левого и правого скачков.

Решение $u(x,t)$ задачи (1) ищется в классе функций E таких, что при каждом фиксированном t функция $u(x,t)$ является μ-абсолютно непрерывной по переменной x, при этом $u'_\mu(x,t)$ — функция ограниченной вариации по переменной x и непрерывна по переменной t. Функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной t; функция $u'_t(x,t)$

имеет ограниченную вариацию по переменной x. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются μ– абсолютно непрерывными, а $\varphi'_\mu(x)$, $\psi'_\mu(x)$ — функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$. При этом $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$. Как показано в [10], решение задачи (1) в классе E существует и единственно.

Для нахождения приближенного решения (1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Зафиксируем произвольное число $h > 0$. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Предположим, что множество $S(\mu)$ конечное. Заменим всякую точку ξ разрыва функции $\mu(x)$ парой $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ и обозначим полученное расширение отрезка $[0,\ell]$ через $\overline{[0,\ell]}_\mu$. Дополним $\overline{[0,\ell]}_\mu$ точками x_i^* непрерывности $\mu(x)$ так, чтобы на каждом промежутке $[0,\xi_1 - 0]$, $[\xi_1 + 0, \xi_2 - 0]$, $\ldots$, $[\xi_n + 0, \ell]$ выполнялись неравенства $\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) < h$. Таким образом, мы получили разбиение множества $\overline{[0,\ell]}_\mu$. Если же множество $S(\mu)$ счетное, то выберем сначала точки ξ_i, в которых $\Delta\mu(\xi_i) \geqslant \dfrac{h}{2}$. Заменив эти точки на пары $\{\xi_i - 0, \xi_i + 0\}$, рассмотрим аналогичное разбиение построенного расширения $\overline{[0,\ell]}_\mu$. Перенумеруем точки, входящие в разбиение, как $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = \ell$. Затем определим базисные функции $\varphi_k(x)$, где $k = 1, \ldots, N-1$, следующим образом:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu(x) - \mu(x_{k-1})}{\mu(x_k) - \mu(x_{k-1})}, & \text{если } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \dfrac{\mu(x_{k+1}) - \mu(x)}{\mu(x_{k+1}) - \mu(x_k)}, & \text{если } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, \ \text{если } x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases}$$

Приближенное решение $u_N(x,t)$ модели (1) будем искать в виде

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t)\varphi_k(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ – базисные функции.

Уравнение в (1) умножим на базисную функцию $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ и проинтегрируем по мере $[\sigma]$ по отрезку $[0,\ell]$

$$\int_0^\ell M'_{[\sigma]} u''_{tt}(x)\varphi_i(x)\, d[\sigma] = \int_0^\ell (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]}\varphi_i(x)\, d[\sigma] -$$

$$- \int_0^\ell u(x,t)\varphi_i(x)Q'_{[\sigma]}(x)\, d[\sigma] + \int_0^\ell \varphi_i(x)F'_{[\sigma]}(x,t).$$

Проинтегрировав интеграл $\int\limits_0^\ell (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]}\varphi_i(x)\, d[\sigma]$ по частям и воспользовавшись граничными условиями (которым удовлетворяют базисные функции), будем иметь

$$\int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x)u''_{tt}(x,t)\varphi_i(x)\, d[\sigma] + \int_0^\ell p(x)u'_\mu(x,t)\varphi'_{i\mu}(x)\, d\mu +$$

$$+ \int_0^\ell u(x,t)\varphi_i(x)Q'_{[\sigma]}(x)\, d[\sigma] = \int_0^\ell F'_{[\sigma]}(x,t)\varphi_i(x)\, d[\sigma],$$

откуда следует, что

$$\int_0^\ell u''_{tt}(x,t)\varphi_i(x)\,d[M] + \int_0^\ell p(x)u'_\mu(x,t)\varphi'_{i\mu}(x)\,d\mu + \\ + \int_0^\ell u(x,t)\varphi_i(x)\,d[Q] = \int_0^\ell F'_{[\sigma]}(x,t)\varphi_i(x)\,d[\sigma]. \tag{2}$$

Подставляя $u_N(x,t)$ в равенство (2), имеем

$$\sum_{k=1}^{N-1} a''_k(t)\int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x)\,d[M] + \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t)\int_0^\ell p(x)\varphi'_{k\mu}(x)\varphi'_{i\mu}(x)d\mu + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t)\int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x)\,d[Q] = \int_0^\ell F'_{[\sigma]}(x,t)\varphi_i(x)\,d[\sigma],$$

$(i = 1, 2, \ldots, N-1)$. Таким образом, мы получили систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widehat{A}a''(t) + \widehat{B}a(t) = \widehat{F}, \tag{3}$$

где $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ — квадратные матрицы порядка $N-1$, коэффициенты которых находятся по формулам

$$\widehat{A}_{ki} = \widehat{A}_{ik} = \int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x)\,d[M],$$

$$\widehat{B}_{ki} = \widehat{B}_{ik} = \int_0^l p(x)\varphi'_{k\mu}(x)\varphi'_{i\mu}(x)\,d\mu + \int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x)\,d[Q],$$

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_{N-1}(t))^T$ и $\widehat{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), ..., F_{N-1}(t))^T$ – вектор-столбцы, компоненты $F_i(t)$ которого определяются равенствами

$$F_i(t) = \int_0^\ell \varphi_i(x)\,d[F(x,t)].$$

Заметим, что равенства

$$(v,w) = \int_0^\ell v(x)w(x)d[M] \tag{4}$$

и

$$[v,w] = \int_0^\ell p(x)v'_\mu(x)w'_\mu(x)d\mu + \int_0^\ell v(x)w(x)d[Q] \tag{5}$$

являются скалярными произведениями. Введем обозначения для норм, порождаемых скалярными произведениями (4) и (5).

$$\|v\|_1 = \sqrt{(v,v)},$$
$$\|v\|_2 = \sqrt{[v,v]}.$$

Воспользуемся теперь начальными условиями. Имеем $u(x,0)=\varphi(x)$, $u'_\mu(x,0)=\varphi'_\mu(x)$, $u'_t(x,0)=\psi(x)$. Тогда для всех $i=1,2,...,N-1$ верны равенства

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\ell p(x)u'_\mu(x,0)\varphi'_{i\mu}(x)d\mu+\int\limits_0^\ell u(x,0)\varphi_i(x)d[Q]=\\=\int\limits_0^\ell p(x)\varphi'_\mu(x)\varphi'_{i\mu}(x)d\mu+\int\limits_0^\ell \varphi(x)\varphi_i(x)\,d[Q].\end{gathered}\tag{6}$$

$$\int\limits_0^\ell u'_t(x,0)\varphi_i(x)d[M]=\int\limits_0^\ell \psi(x)\varphi_i(x)d[M].\tag{7}$$

Подставим в равенства (6) и (7) вместо $u(x,t)$ функцию $u_N(x,t)$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{N-1}a_k(0)\Big(\int\limits_0^\ell p(x)\varphi'_{k\mu}(x)\varphi'_{i\mu}(x)\;d\mu+\int\limits_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x)d[Q]\Big)=$$

$$=\int\limits_0^\ell p(x)\varphi'_\mu(x)\varphi'_{i\mu}(x)\;d\mu+\int\limits_0^\ell \varphi(x)\varphi_i(x)d[Q],$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}a'_k(0)\int\limits_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x)\,d[M]=\int\limits_0^\ell \psi(x)\varphi_i(x)\,d[M],$$

или в матричном виде

$$\widehat{B}a(0)=H_1,\quad \widehat{A}a'(0)=H_2,\tag{8}$$

где H_1, H_2 — вектор-столбцы с координатами

$$(H_1)_i=\int\limits_0^\ell p(x)\varphi'_\mu(x)\varphi'_{i\mu}(x)\;d\mu+\int\limits_0^\ell \varphi(x)\varphi_i(x)d[Q],$$

$$(H_2)_i=\int\limits_0^\ell \psi(x)\varphi_i(x)\;d[M].$$

Заметим, что матрицы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ являются матрицами Грамма системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N-1}$ линейно независимых функций. Поэтому $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ имеют обратные. Тогда (3) и (8) принимают вид

$$a''(t)+\widehat{A}^{-1}\widehat{B}a=\widehat{A}^{-1}\widehat{F},\tag{9}$$

$$a(0)=\widehat{B}^{-1}H_1,\quad a'(0)=\widehat{A}^{-1}H_2.\tag{10}$$

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что система (9), дополненная начальными условиями (10), имеет единственное решение.

Для численного решения (9), (10) применим явную схему (τ – шаг по временной переменной). Для реализации алгоритма имеем следующие формулы

$$\frac{a_k((j+1)\tau)-2a_k(j\tau)+a_k((j-1)\tau)}{\tau^2}+\sum_{j=1}^{N-1}\eta_{k,j}a_j(j\tau)=F_k(j\tau),$$

где $k = 1, 2, \dots, N-1$, $\eta_{k,j}$ – коэффициенты матрицы $\widehat{A}^{-1}\widehat{B}$. Два начальных слоя мы найдем, используя начальные данные

$$a_k(0) = \left(\widehat{B}^{-1}H_1\right)_k, \quad \frac{a_k(\tau) - a_k(0)}{\tau} = \left(\widehat{A}^{-1}H_2\right)_k.$$

Выпишем теперь оценку скорости сходимости. Обозначим $\omega = u(x,t) - u_N(x,t)$. Интерполянт $u_I(x,t)$ определим как $u_I(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} u(x_k,t)\varphi_k(x)$. Равенство (2) с учетом введенных обозначений (4) и (5) перепишем в виде

$$(u''_{tt}, \varphi_i) + [u, \varphi_i] = \int_0^\ell \varphi_i d[F].$$

Поскольку

$$(u''_{Ntt}, \varphi_i) + [u_N, \varphi_i] = \int_0^\ell \varphi_i d[F],$$

то для $\omega(x,t)$ получаем равенства

$$(\omega''_{tt}, \varphi_i) + [\omega, \varphi_i] = 0, \tag{11}$$

где $i = 1, 2, \dots, N-1$. Аналогично из условий (6) и (7) получаем равенства

$$[\omega(\cdot, 0), \varphi_i(\cdot)] = 0, \tag{12}$$

$$(\omega'_t(\cdot, 0), \varphi_i(\cdot)) = 0, \tag{13}$$

где $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Докажем, что

$$\int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x,\tau)w'_t(x,\tau)\, d[M]\, d\tau + \int_0^t \int_0^\ell p(x)w'_\mu(x,\tau)w''_{t\mu}(x,\tau)\, d\mu\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\ell w(x,\tau)w'_t(x,\tau)\, d[Q]\, d\tau = \int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x,t)(u'_t(x,\tau) - u'_{It}(x,\tau))d[M]d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\ell p(x)w'_\mu(x,\tau)(u'_t(x,\tau) - u'_{It}(x,\tau))'_\mu d\mu d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\ell w(x,\tau)(u'_t(x,\tau) - u'_{It}(x,\tau))d[Q]d\tau,$$

т. е. докажем, что

$$\int_0^t (\omega''_{tt}, \omega'_t)d\tau + \int_0^t [\omega, \omega'_t]d\tau = \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{It})d\tau + \int_0^t [\omega, u'_t - u'_{It}]d\tau. \tag{14}$$

В самом деле, левая часть (14) преобразуется к следующему выражению

$$\int_0^t (\omega''_{tt}, \omega'_t) d\tau + \int_0^t [\omega, \omega'_t] d\tau = \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{Nt}) d\tau + \int_0^t [\omega, u'_t - u'_{Nt}] d\tau =$$

$$= \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{It}) d\tau + \int_0^t [\omega, u'_t - u'_{It}] d\tau +$$

$$+ \left\{ \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_{It} - u'_{Nt}) d\tau + \int_0^t [\omega, u'_{It} - u'_{Nt}] d\tau \right\}.$$

Остается показать, что выражение в фигурных скобках равно нулю. Вспоминая определения $u_N(x,t)$ и $u_I(x,t)$ и учитывая (11), получим

$$\int_0^t (\omega''_{tt}, u'_{It} - u'_{Nt}) d\tau + \int_0^t [\omega, u'_{It} - u'_{Nt}] d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{N-1} (u'_t(x_k, t) - a'_k(t))((\omega''_{tt}, \varphi_k) + [\omega, \varphi_k]) \right) d\tau = 0.$$

Применяя теорему Фубини и интегрируя по частям, левую часть (14) перепишем в виде

$$\int_0^t \int_0^\ell \omega''_{tt}(x,\tau)\omega'_t(x,\tau) d[M] d\tau + \int_0^t \int_0^\ell p(x)\omega'_\mu(x,\tau)\omega''_{t\mu}(x,\tau) d\mu d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\ell \omega(x,\tau)\omega'_t(x,\tau)\, d[Q]\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^\ell \omega_t'^2(x,t)\, d[M] - \frac{1}{2}\int_0^\ell \omega_t'^2(x,0)\, d[M] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\ell p(x)\omega_\mu'^2(x,t) d\mu - \frac{1}{2}\int_0^\ell p(x)\omega_\mu'^2(x,0) d\mu + \frac{1}{2}\int_0^\ell \omega^2(x,t) d[Q] -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^\ell \omega^2(x,0) d[Q] = \frac{1}{2}(\omega'_t, \omega'_t) + \frac{1}{2}[\omega,\omega] - \frac{1}{2}(\omega'_t(\cdot,0), \omega'_t(\cdot,0)) -$$

$$- \frac{1}{2}[\omega(\cdot,0), \omega(\cdot,0)].$$

Тогда равенство (14) можно представить как

$$\begin{gathered}(\omega'_t, \omega'_t) + [\omega,\omega] = (\omega'_t(\cdot,0), \omega'_t(\cdot,0)) + [\omega(\cdot,0), \omega(\cdot,0)] + \\ + 2\int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{It}) d\tau + 2\int_0^t [\omega, u'_t - u'_{It}] d\tau.\end{gathered} \tag{15}$$

Применив теорему Фубини к первому интегралу в последнем равенстве, перепишем (15) как

$$\begin{gathered}(\omega'_t, \omega'_t) + [\omega,\omega] = (\omega'_t(\cdot,0), \omega'_t(\cdot,0)) + [\omega(\cdot,0), \omega(\cdot,0)] + \\ + 2(\omega'_t, (u-u_I)'_t) - 2(\omega'_t(\cdot,0), (u-u_I)'_t(\cdot,0)) - \\ - 2\int_0^t (\omega'_t, (u-u_I)''_{tt}) d\tau + 2\int_0^t [\omega, (u-u_I)'_t] d\tau.\end{gathered} \tag{16}$$

Оценим слагаемые из правой части последнего равенства. Имеем

$$\|\omega_t'(\cdot,0)\|_1^2 = (\omega_t'(\cdot,0), \omega_t'(\cdot,0)) =$$
$$= (\omega_t'(\cdot,0), u_t'(\cdot,0) - u_{It}'(\cdot,0)) + (\omega_t'(\cdot,0), u_{It}'(\cdot,0) - u_{Nt}'(\cdot,0)) =$$
$$= (\omega_t'(\cdot,0), \psi(\cdot) - u_{It}'(\cdot,0)) + (\omega_t'(\cdot,0), u_{It}'(\cdot,0) - u_{Nt}'(\cdot,0)).$$

Воспользуемся представлениями для $u_N(x,t)$ и $u_I(x,t)$ и равенством (13). Рассмотрим последнее слагаемое

$$(\omega_t'(\cdot,0), u_{It}'(\cdot,0) - u_{Nt}'(\cdot,0)) = (\omega_t'(\cdot,0), \sum_{k=1}^{N-1}(\psi(x_k) - a_k'(0))\varphi_k(\cdot)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N-1}(\psi(x_k) - a_k'(0))(\omega_t'(\cdot,0), \varphi_k(\cdot)) = 0.$$

Тогда

$$\|\omega_t'(\cdot,0)\|_1^2 = (\omega_t'(\cdot,0), \omega_t'(\cdot,0)) =$$
$$= (\omega_t'(\cdot,0), \psi(\cdot) - u_{It}'(\cdot,0)) \leqslant \|\omega_t'(\cdot,0)\|_1 \cdot \|\psi(\cdot) - u_{It}'(\cdot,0)\|_1.$$

Покажем, что $\|\psi(\cdot) - u_{It}'(\cdot,0)\|_1 \leqslant c_1 h$. Имеем

$$\|\psi(\cdot) - u_{It}'(\cdot,0)\|_1^2 = \int_0^\ell \left(\psi(x) - \sum_{k=1}^{N-1}\psi(x_k)\varphi_k(x)\right)^2 d[M] =$$
$$= \sum_j \int_{x_j+0}^{x_{j+1}-0} \left(\psi(x) - \psi(x_j) - \frac{\psi(x_{j+1}) - \psi(x_j)}{\mu(x_{j+1}) - \mu(x_j)}(\mu(x) - \mu(x_j))\right)^2 d[M],$$

где из суммы исключены интегралы по промежуткам вида $[\xi - 0, \xi + 0]$, когда ξ — точка разрыва μ или M, поскольку такие интегралы равны нулю. Заметим, что при $x \in [x_j + 0, x_{j+1} - 0]$

$$\left|\psi(x) - \psi(x_j) - \frac{\psi(x_{j+1}) - \psi(x_j)}{\mu(x_{j+1}) - \mu(x_j)}(\mu(x) - \mu(x_j))\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\mu(x_{j+1}) - \mu(x_j)}\left(\int_{x_j}^{x_{j+1}}\int_{x_j}^{x}(\psi_\mu'(s) - \psi_\mu'(\tau))d\mu(s)\, d\mu(\tau)\right)\right| \leqslant V_0^\ell(\psi_\mu')h. \tag{17}$$

Значит

$$\|\psi(\cdot) - u_{It}'(\cdot,0)\|_1^2 \leqslant (V_0^\ell(\psi_\mu'))^2 h^2 (M(\ell) - M(0)),$$

откуда следует, что

$$\|\psi(\cdot) - u_{It}'(\cdot,0)\|_1 \leqslant c_1 h.$$

Тогда $\|\omega_t'(\cdot,0)\|_1 \leqslant c_1 h$.

Выпишем оценку второго слагаемого в (16). Имеем

$$\|\omega(\cdot,0)\|_2^2 = [\omega(\cdot,0), \omega(\cdot,0)] =$$
$$= [\omega(\cdot,0), u(\cdot,0) - u_I(\cdot,0)] + [\omega(\cdot,0), u_I(\cdot,0) - u_N(\cdot,0)] =$$
$$= [\omega(\cdot,0), \varphi(\cdot) - u_I(\cdot,0)] + [\omega(\cdot,0), u_I(\cdot,0) - u_N(\cdot,0)].$$

Воспользуемся представлениями для $u_N(x,t)$ и $u_I(x,t)$ и равенством (12). Рассмотрим последнее слагаемое

$$[\omega(\cdot,0), u_I(\cdot,0) - u_N(\cdot,0)] = [\omega(\cdot,0), \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi(x_k) - a_k(0))\varphi_k(\cdot)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi(x_k) - a_k(0))[\omega(\cdot,0), \varphi_k(\cdot)] = 0.$$

Тогда

$$\|\omega(\cdot,0)\|_2^2 = [\omega(\cdot,0), \omega(\cdot,0)] =$$
$$= [\omega(\cdot,0), \varphi(\cdot) - u_I(\cdot,0)].$$

Покажем, что $\|\varphi(\cdot) - u_I(\cdot,0)\|_2 \leqslant c_2 h$. Имеем

$$\|\varphi(\cdot) - u_I(\cdot,0)\|_2^2 = \int_0^\ell p(x)(\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x,0))^2 d\mu + \int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x,0))^2 d[Q].$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Обозначим через $p_1 = \sup\limits_{[0,\ell]} p(x)$. Тогда

$$\int_0^\ell p(x)(\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x,0))^2 d\mu \leqslant p_1 \left| \int_0^\ell (\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x,0)) d(\varphi(x) - u_I(x,0)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant p_1 \left| \int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x,0)) d[\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x,0)] \right| =$$

$$= p_1 \left| \sum_j \int_{x_j+0}^{x_{j+1}-0} (\varphi(x) - u_I(x)) d[\varphi'_\mu(x)] \right|.$$

Аналогично неравенству (17) можно показать, что для всех $x \in [x_j + 0, x_{j+1} - 0]$ выполняется

$$|\varphi(x) - u_I(x,0)| \leqslant C_1^* h, \tag{18}$$

откуда следует, что

$$\int_0^\ell p(x)(\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x,0))^2 d\mu \leqslant p_1 C_1^* h V_0^\ell(\varphi'_\mu).$$

Оценим теперь второе слагаемое. Имеем

$$\int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x,0))^2 d[Q] = \sum_j \int_{x_j+0}^{x_{j+1}-0} (\varphi(x) - u_I(x,0))^2 d[Q],$$

где аналогично из суммы исключены интегралы по промежуткам вида $[\xi - 0, \xi + 0]$, когда ξ – точка разрыва μ или Q, поскольку такие интегралы равны нулю. Воспользовавшись неравенством (18), получим, что

$$\int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x,0))^2 d[Q] \leqslant C_1^{*2} h^2 V_0^\ell(Q).$$

Таким образом, $\|\varphi(\cdot) - u_I(\cdot,0)\|_2 \leqslant c_2\sqrt{h}$.

Тогда имеем $\|\omega(\cdot,0)\|_2 \leqslant c_2 h$. Оценим остальные слагаемые в равенстве (16) через сумму модулей. Имеем

$$|(\omega_t', (u-u_I)_t')| + |(\omega_t'(\cdot,0), (u-u_I)_t'(\cdot,0))| + \left|\int_0^t (\omega_t', (u-u_I)_{tt}'')d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_0^t [\omega, (u-u_I)_t']d\tau\right| \leqslant \|\omega_t'\|_1 \|(u-u_I)_t'\|_1 + \|\omega_t'(\cdot,0)\|_1 \|(u-u_I)_t'(\cdot,0)\|_1 +$$

$$+\int_0^t \|\omega_t'\|_1 \|(u-u_I)_{tt}''\|_1 d\tau + \int_0^t \|\omega\|_2 \|(u-u_I)_t'\|_2 d\tau.$$

Второй сомножитель в каждом слагаемом в правой части последнего выражения оценивается сверху величиной $C\sqrt{h}$ при некоторой постоянной, не зависящей от h. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $F(x,t)$ — функции ограниченной вариации по x на $[0,\ell]$, причем $\inf\limits_{[0,\ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$ строго возрастают на $[0,\ell]$. Функция $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$. Обозначим через $u(x,t)$ и $u_N(x,t)$ точное и приближенное решения математической модели (1). Пусть $\omega(x,t) = u(x,t) - u_N(x,t)$. Тогда*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\int_0^\ell \omega_t'^2(x,t)d[M] + \int_0^\ell p(x)\omega_\mu'^2(x,t)\,d\mu + \int_0^\ell \omega^2(x,t)\,d[Q]\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\sqrt{h}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Успехи математических наук. — 2005. — Т. 60, вып. 6 (366). — С. 89–114.

2. Егоров, А. И. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, вып. 1. — С. 85–92.

3. Боровских, А. В. Формулы граничного управления неоднородной струной / А. В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, вып. 1. — С. 64–89.

4. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями : качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен : Lap Lambert Academic Publishing, 2012. — 112 с.

5. Kamenskii, M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type / M. Kamenskii, Ch. – F. Wen, M. Zvereva // Optimization. — 2017. — https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1388379.

6. Zvereva, M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions / M. Zvereva // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2017. — V. 72. — P. 141–150.

7. Зверева, М. Б. Математическая модель колебаний струны с нелинейным условием / М. Б. Зверева, М. И. Каменский, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 88–98.

8. Burlutskaya, M. On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph / M. Burlutskaya // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2017. — V. 72. — P. 37–44.

9. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

10. Дифференциал Стилтьеса в моделировании колебаний струны с локализованными особенностями / А. Д. Баев, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 73–83.

11. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

12. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

REFERENCES

1. Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimization of boundary controls of string vibrations. [Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimizaciya granichnyx upravlenij kolebaniyami struny]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 6 (366), pp. 89–114.

2. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. On the controllability of elastic oscillations connected in series objects with distributed parameters. [Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Ob upravlyaemosti uprugix kolebanij posledovatel'no soedinennyx ob'ektov s raspredelennymi parametrami]. *Trudy instituta matematiki i mexaniki UrO RAN — Supplement to Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS*, 2011, vol. 17, iss. 1, pp. 85–92.

3. Borovskikh A.V. Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. [Borovskikh A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoj strunoj]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2007, vol. 43, iss. 1, pp. 64–89.

4. Zvereva M.B. Differential equations with discontinuous solutions: qualitative theory. [Zvereva M.B. Differencial'nye uravneniya s razryvnymi resheniyami: kachestvennaya teoriya]. Saarbruecken, 2012, 112 p.

5. Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type. Optimization, 2017. https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1388379.

6. Zvereva M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 2017, vol. 72, pp. 141–150.

7. Zvereva M.B., Kamenskii M.I., Shabrov S.A. A mathematical model of string oscillations with nonlinear condition. [Zvereva M.B., Kamenskii M.I., Shabrov S.A. Matematicheskaya model' kolebanij struny s nelinejnym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 88–98.

8. Burlutskaya M. On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 2017, vol. 72, pp. 37–44.

9. Pokornyi Yu.V. The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167–169.

10. Baev A.D., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. The Stieltjes differential in the modelling of string oscillations with singularities. [Baev A.D., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Differencial Stilt'esa v modelirovanii kolebanij struny s lokalizovannymi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya:*

Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2015, no. 3, pp. 73–83.

11. Shabrov S.A. Adaptation of the finite element method for mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya matematicheskoyj modeli s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2, pp. 153–164.

12. Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lilov E.V. About the adaptation of the method of finite elements for the solution of a boundary value problem with Stieltjes differentials on a geometric graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya resheniya granichnoyj zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bahtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Залукаева Жанна Олеговна, аспирант, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zalukaeva Zhanna Olegovna, Post-graduate student of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zalukaevajoanna@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, д.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Aleksandrovich, Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90