УДК 517.926.4

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

А. Д. Баев[1], Е. А. Бородина[2], Ф. В. Голованева[1], С. А. Шабров[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Воронежский государственный университет инженерных технологий*

Поступила в редакцию 12.07.2016 г.

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель шестого порядка с негладкими решениями. Эта задача возникает как необходимое условие минимума функционала энергии стержня на двойном упругом основании с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости. При этом функционал содержит интеграл Стилтьеса. Получены результаты, которые позволяют доказать интегральную обратимость изучаемой модели. Трудности, которые возникают в следствие потере гладкости у решения, мы преодолеваем используя концепцию Ю. В. Покорного поточечной трактовки дифференциального уравнения. Последняя показала свою эффективность: построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем, не только второго порядка, но четвертого.

Ключевые слова: математическая модель, негладкое решение, производная по мере, функционал.

ABOUT THE MATHEMATICAL MODEL OF SIXTH ORDER WITH NONSMOOTH SOLUTIONS

A. D. Baev, E. A. Borodina, F. V. Golovaneva, S. A. Shabrov

Abstract. The article deals with a mathematical model of the sixth order with nonsmooth solutions. This problem arises as a necessary condition for the minimum of the energy functional of the rod on a double elastic base with localized features that lead to loss of smoothness. The functional contains the Stieltjes integral. The results are obtained that allow to prove the integral reversibility of the model under study. The difficulties which arise in consequence of the loss of smoothness of solutions, we overcome using the concept Yu. V. Pokorniy pointwise interpretation of the differential equation. The latter has shown its effectiveness: an exact parallel of the classical theory of ordinary differential equations up to oscillatory theorems, not only of the second order, but of the fourth order.

Keywords: mathematical model, nonsmooth solution, derivative with measure, functional.

ВВЕДЕНИЕ

Модифицированная модель Власова-Леонтьева с постоянными коэффициентами, впервые была предложена в [1] (стр. 136, уравнение (8.20)), где она представлена в виде обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка, которое было дополнено обобщенными краевыми условиях Дирихле.

В этой статье изучается математическая модель

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma} - (gu'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая получена как минималь функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\ell \frac{p u'''^2_{xx\mu}}{2}\, d\mu + \int\limits_0^\ell \frac{r u''^2_{xx}}{2}\, dx + \int\limits_0^\ell \frac{g u'^2_x}{2}\, dx + \int\limits_0^\ell \frac{u^2}{2}\, dQ - \int\limits_0^\ell u\, dF, \tag{2}$$

определенного на множестве E — непрерывно дифференцируемых на $[0;\ell]$ функций, вторая производная $u''_{xx}(x)$ которых μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, $u'''_{xx\mu}$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, и удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = = u''_{xx}(\ell) = 0$.

Для преодоления трудностей, вызванных потерей гладкости у решения граничной задачи, мы используем поточечный подход Ю. В. Покорного, предложенный в работе [2], который показал свою эффективность [3], [4], [5], [6], [7].

Относительно коэффициентов $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ мы предполагаем выполненными следующие условия

1. $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение.
2. $\inf\limits_{x\in[0;\ell]} p(x) > 0$.
3. $r(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$.
4. $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$.
5. функция $\mu(x)$, порождающая на $[0;\ell]$ меру, строго возрастает на $[0;\ell]$.

Применение стандартной схемы Лагранжа, дает нам равенство нулю первой вариации

$$\delta\Phi(u)h = \int\limits_0^\ell p u'''_{xx\mu} h'''_{xx\mu}\, d\mu + \int\limits_0^\ell r u''_{xx}\, dx + \int\limits_0^\ell g u'_x h'_x\, dx + \int\limits_0^\ell u h\, dQ - \int\limits_0^\ell h\, dF = 0 \tag{3}$$

для любой $h \in E$.

Вводя в рассмотрение функцию $\alpha(x) = \int\limits_0^x u\, dQ - F(x)$, равенство (3) допускает перезапись

$$\delta\Phi(u)h = \int\limits_0^\ell p u'''_{xx\mu} h'''_{xx\mu}\, d\mu + \int\limits_0^\ell r u''_{xx}\, dx + \int\limits_0^\ell \big(g u'_x - \alpha(x)\big)\, h'_x\, dx = 0, \tag{4}$$

так как

$$\int\limits_0^\ell h(x)\, d\alpha(x) = \alpha(x)h(x)\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell \alpha(x) h'_x(x)\, dx = -\int\limits_0^\ell \alpha(x) h'_x(x)\, dx,$$

внеинтегральные слагаемые равны нулю ввиду принадлежности h множеству E.

Проинтегрировав последний интеграл в (4) по частям, будем иметь

$$\delta\Phi(u)h = \int\limits_0^\ell p u'''_{xx\mu} h'''_{xx\mu}\, d\mu + \int\limits_0^\ell \big(r u''_{xx} - \beta(x)\big)\, h''_{xx}(x)\, dx = 0, \tag{5}$$

где $\beta(x) = \int\limits_0^x \big(g(s)u'_x(s) - \alpha(s)\big)\, ds$.

И, наконец, вводя функцию $\gamma(x) = \int\limits_0^x \big(r(s)u''_{xx}(s) - \beta(s)\big)\,ds$, равенство (5) допускает перезапись

$$\int\limits_0^\ell \big(pu'''_{xx\mu}(x) - \gamma(x)\big)\,h'''_{xx\mu}(x)\,d\mu = 0. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $A(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, и интеграл $\int\limits_0^\ell A(x)h'''_{xx\mu}\,d\mu$ равен нулю для всякой $h \in E$. Тогда, при некоторых постоянных C_1, C_2 и C_3 справедливо равенство $A(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2$ почти всюду (относительно меры μ), причем $A(x-0) = A(x+0)$ для всякой $x \in (0;\ell)$.*

Доказательство. Для произвольных C_1, C_2 и C_3 справедливо равенство

$$\int\limits_0^\ell \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right) h'''_{xx\mu}(x)\,d\mu = 0. \tag{7}$$

Поэтому, условие леммы мы можем переписать в виде

$$\int\limits_0^\ell \left(A(x) - \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)\right) h'''_{xx\mu}(x)\,d\mu = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \left(A(s) - \left(C_1 + C_2s + C_3s^2\right)\right)\,d\mu(s)\,d\tau\,dt. \tag{9}$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям $h(0) = h'_x(0) = h''_{xx}(0) = 0$ при любых C_1, C_2 и C_3. Покажем, что существуют C_1, C_2 и C_3 такие, что функция $h(x)$, определенная равенством (9), удовлетворяла остальным условиям $h(\ell) = h'_x(\ell) = h''_{xx}(\ell) = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы C_1, C_2 и C_3 были решением системы

$$\begin{cases} \int\limits_0^\ell \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau (C_1 + C_2s + C_3s^2)\,d\mu(s)\,d\tau\,dt = \int\limits_0^\ell \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau A(s)\,d\mu(s)\,d\tau\,dt; \\ \int\limits_0^\ell \int\limits_0^\tau (C_1 + C_2s + C_3s^2)\,d\mu(s)\,d\tau = \int\limits_0^\ell \int\limits_0^\tau A(s)\,d\mu(s)\,d\tau; \\ \int\limits_0^\ell (C_1 + C_2s + C_3s^2)\,d\mu(s) = \int\limits_0^\ell A(s)\,d\mu(s). \end{cases}$$

Определитель последней системы очевидным образом отличен от нуля. Поэтому, она имеет единственное решение C_1^*, C_2^*, C_3^*. Подставляя функцию $h(x)$ при этих значениях C_1^*, C_2^*, C_3^* в равенство (8), будем иметь

$$\int\limits_0^\ell \left(A(x) - C_1^* - C_2^*x - C_3^*x^2\right)^2\,d\mu = 0. \tag{10}$$

Из последнего равенства мы находим

$$A(x) = C_1^* + C_2^* x + C_3^* x^2 \tag{11}$$

почти всюду (в смысле меры μ).

Пусть x — произвольная точка интервала $(0;\ell)$. Для нее существуют две последовательности x_n' и x_n'', для которых справедливо равенство (11), $x_n' < x < x_n''$ и $x_n' \to x_0$, $x_n'' \to x_0$. Так как $A(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, то мы получаем $A(x-0) = A(x+0)$. Лемма доказана. □

На основании леммы, из равенства (6) мы получаем

$$pu'''_{xx\mu}(x) - \gamma(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2,$$

или, вспоминая определение функции $\gamma(x)$,

$$pu'''_{xx\mu}(x) - \int\limits_0^x \big(r(s)u''_{xx} - \beta(s)\big)\, ds = C_1 + C_2 x + C_3 x^2. \tag{12}$$

Из последнего равенства находим, что функция $pu'''_{xx\mu}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, и (12) допускает дифференцирование по x

$$\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x) - \left(ru''_{xx}\right)(x) + \int\limits_0^x \big(g(s)u'_x(s) - \alpha(s)\big)\, ds = C_2 + 2C_3 x. \tag{13}$$

Так как $r(x)$ и $u''_{xx}(x)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, то функция $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x)$ абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, равенство (13) возможно продифференцировать по x:

$$\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x) - \left(ru''_{xx}\right)'_x(x) + g(x)u'_x(x) - \alpha(x) = 2C_3,$$

или, вспоминая определение $\alpha(x)$,

$$\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x) - \left(ru''_{xx}\right)'_x(x) + g(x)u'_x(x) - \int\limits_0^x u\, dQ + F(x) = 2C_3. \tag{14}$$

В работе [8] доказано существование такой строго возрастающей функции $\sigma(x)$, порождающей на $[0;\ell]$ меру, что функции x, $\mu(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ являются σ–абсолютно непрерывными на $[0;\ell]$. Тогда, (14) допускает σ–дифференцирование

$$\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) - \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) + \left(g(x)u'_x\right)'_\sigma(x) - u(x)uQ'_\sigma(x) + F'_\sigma(x) = 0. \tag{15}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Необходимое условие минимума функционал $\Phi(u)$ на множестве E реализуется в виде граничной задачи*

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)u'_x\right)'_\sigma(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = -F'_\sigma(x); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Решение уравнения из (16) мы будем искать в классе E^σ — непрерывно дифференцируемых на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, производная $u'_x(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{xx}(x)$ μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $u'''_{xx\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. При этом решение математической модели (16) будем искать в классе E^σ_0 — функций $u(x)$, принадлежащих E^σ, и удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Здесь изучаются некоторые свойства решений уравнения

$$Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)u'_x\right)'_\sigma(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x). \tag{17}$$

В дальнейшем мы будем придерживаться терминологии из [3], [4], [5].

Уравнение (17) задано почти всюду (по мере σ) на следующем расширении отрезка $[0;\ell]$. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$ зададим метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значения $\xi-0$, $\xi+0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x < \xi - 0 < \xi + 0 < y$ для всех x, y для которых выполнялись неравенства $x < \xi < y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi-0$ и $\xi+0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x;y)$.

Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ само уравнение принимает вид

$$-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta\left(ru''_{xx}\right)'_x(\xi) - \Delta\left(g(x)u'_x\right)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi), \tag{18}$$

где $\Delta v(\xi) = v(\xi+0) - v(\xi-0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

Покажем, что для всякой точки $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$ и набора любых чисел $\{u_i\}_{i=0}^{i=5}$ существует решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} u(x_0) = u_0; \\ u'_x(x_0) = u_1; \\ u''_{xx}(x_0) = u_2; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0) = u_3; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x_0) = u_4; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x_0) = u_5. \end{cases} \tag{19}$$

Без ограничения общности можем считать, что $u_0 = u_1 = 0$. В самом деле, замена $u(x) = w(x) + u_0 + u_1 \cdot (x - x_0)$ нам дает требуемое для новой неизвестной; при этом остальные начальные условия не изменятся, правая часть поменяется на ${F_1}'_\sigma(x) = F'_\sigma(x) + g'_\sigma(x) - u_0 - u_1 \cdot (x - x_0)$.

Проинтегрировав уравнение (17) два раза, первый раз по мере σ, второй — по x, в пределах от x_0 до x, в силу начальных условий (19), будем иметь

$$\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x) = \alpha(x) + r(x)u''_{xx}(x) + g(x)u(x) - \int\limits_{x_0}^{x} u\,dg + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} u\,dQ\,dt, \tag{20}$$

где

$$\alpha(x) = u_4 - g(x_0)u_0 - r(x_0)u_2 + \int\limits_{x_0}^{x} \Big(u_5 - \left(ru''_{xx}\right)'_x(x_0) + F(x_0) - F(t)\Big)\,dt, \tag{21}$$

при этом появившийся после второго интегрирования интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} g(t)u'_x(t)\,dt$ мы проинтегрировали по частям

$$\int\limits_{x_0}^{x} g(t)u'_x(t)\,dt = g(x)u(x) - \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\,dg(t). \tag{22}$$

Теперь равенство (20) проинтегрируем дважды в пределах от x_0 до x, первый раз по x, второй — по мере, порожденной функцией $\overline{\mu}(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{d\mu(t)}{p(t)}$:

$$u''_{xx}(x) = \beta(x) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} r(x)u''_{xx}(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} g(t)u(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) -$$
$$- \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} u\,dg\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} u\,dQ\,dt\,d\tau\,d\overline{\mu}(\eta), \tag{23}$$

где

$$\beta(x) = u_2 + \int\limits_{x_0}^{x} \left(u_3 + \int\limits_{x_0}^{\tau} \alpha(t)\,dt\right) d\overline{\mu}(\tau). \tag{24}$$

Таким образом, разрешимость задачи (17), (19) эквивалентна разрешимости уравнения (23) с пространстве $C^2[0;\ell]$.

Решение последнего будем искать в виде $u(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} v(s)\,ds\,dt$, где $v(x) \in C[0;\ell]$. Введем следующее обозначение $(Bv)(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t} v(s)\,ds\,dt$. Подставим функцию $u(x)$ $(= (Bv))$ в (23):

$$v(x) = \beta(x) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} r(t)v(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} g(t)(Bv)(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) -$$
$$- \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dg\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dQ\,dt\,d\tau\,d\overline{\mu}(\eta). \tag{25}$$

Последнее уравнение можно записать в операторном виде

$$v(x) = \beta(x) + (Av)(x), \tag{26}$$

где

$$(Av)(x) = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} r(t)v(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} g(t)(Bv)(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) -$$
$$- \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dg\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dQ\,dt\,d\tau\,d\overline{\mu}(\eta). \tag{27}$$

Следует отметить, что функция $\beta(x) \in C[0;\ell]$, и оператор A действует из $C[0;\ell]$ в $C[0;\ell]$. Поэтому, разрешимость исходной задачи эквивалентна разрешимости (26) в $C[0;\ell]$, причем в силу определения операторов A и B решение будет принадлежать классу E^{σ}.

Покажем, что спектральный радиус оператора A равен нулю, это будет означать однозначную разрешимость для любой функции $\beta(x)$.

Докажем, что для всех $x \in [0;\ell]$ и натурального n справедливо неравенство

$$|A^n v(x)| \leqslant \frac{C^n}{n!}|x - x_0|^n \cdot \|v\|_C, \tag{28}$$

из которого и будет вытекать, что спектральный радиус оператора A равен нулю (здесь $\|v\|_C = \max\limits_{x\in[0;\ell]} |v(x)|$ — норма в $C[0;\ell]$).

Для $n = 1$ последовательно находим

$$|Av(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} r(t)v(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} g(t)(Bv)(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dg\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dQ\,dt\,d\tau\,d\overline{\mu}(\eta) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} r(t)v(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) \right| + \left| \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau} g(t)(Bv)(t)\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) \right| +$$
$$\left| + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dg\,dt\,d\overline{\mu}(\tau) \right| + \left| \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{\eta}\int\limits_{x_0}^{\tau}\int\limits_{x_0}^{t} (Bv)\,dQ\,dt\,d\tau\,d\overline{\mu}(\eta) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \|v\|_C \cdot \|r\|_C \cdot (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) \cdot |x - x_0| + \|g\|_C \cdot \|Bv\|_C \cdot |x - x_0| \cdot (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) +$$
$$+ \|Bv\|_C \cdot \bigvee_0^{\ell}(g) \cdot |x - x_0| \cdot (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) + \|Bv\|_C \cdot \bigvee_0^{\ell}(Q) \cdot |x - x_0| \cdot \ell\,(\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0))\,, \tag{29}$$

где $\bigvee\limits_0^{\ell}(g)$ — полная вариация функции $g(x)$ на $[0;\ell]$. А так как $\|Bv\|_C \leqslant \|v\|_C \cdot \dfrac{\ell^2}{2}$, то неравенство (28) для $n = 1$ доказано при

$$C = (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) \left(\|r\|_C + \frac{\ell^2}{2} \left(\|g\|_C + \bigvee_0^{\ell}(g) + \bigvee_0^{\ell}(Q) \right) \right). \tag{30}$$

Пусть неравенство (28) справедливо для $n = k$. Покажем, что оно верно при $n = k + 1$. Для начала заметим, что

$$|(B(A^k v))(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t} (A^k)(s)\, ds\, dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{t} |(A^k v)(s)|\, ds \right| dt \right| \leqslant C^k \|v\|_C \cdot \frac{|x-x_0|^k}{k!} \cdot \frac{\ell^2}{2}. \quad (31)$$

Поэтому, последовательно имеем

$$\begin{aligned}
&|(A^{k+1}v)(x)| = |(A(A^k v))(x)| = \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\tau} r(t) A^k v(t)\, dt\, d\overline{\mu}(\tau) + \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\tau} g(t)(BA^k v)(t)\, dt\, d\overline{\mu}(\tau) - \right. \\
&\left. - \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\tau} \int_{x_0}^{t} (BA^k v)\, dg\, dt\, d\overline{\mu}(\tau) - \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\eta} \int_{x_0}^{\tau} \int_{x_0}^{t} (BA^k v)\, dQ\, dt\, d\tau\, d\overline{\mu}(\eta) \right| \leqslant \\
&\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\tau} \Big| r(t) A^k v(t) \Big|\, dt \right| d\overline{\mu}(\tau) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\tau} \Big| g(t)(BA^k v)(t) \Big|\, dt \right| d\overline{\mu}(\tau) \right| + \\
&+ \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\tau} \left| \int_{x_0}^{t} \Big| (BA^k v) \Big|\, dg \right| dt \right| d\overline{\mu}(\tau) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\eta} \left| \int_{x_0}^{\tau} \left| \int_{x_0}^{t} \Big| (BA^k v) \Big|\, dQ \right| dt \right| d\tau \right| d\overline{\mu}(\eta) \right| \leqslant \\
&\leqslant \|r\|_C \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\tau} \left| \frac{C^k}{k!} |t-x_0|^k \|v\|_C \right| dt \right| d\overline{\mu}(\tau) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\tau} \left| \|g\|_C C^k \|v\|_C \frac{|t-x_0|^k}{k!} \frac{\ell^2}{2} \right| dt \right| d\overline{\mu}(\tau) \right| + \\
&+ \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\tau} C^k \|v\|_C \frac{|t-x_0|^k}{k!} \bigvee_0^{\ell} (g)\, dt \right| d\overline{\mu}(\tau) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left| \int_{x_0}^{\eta} \left| \int_{x_0}^{\tau} C^k \|v\|_C \frac{|t-x_0|^k}{k!} \bigvee_0^{\ell} (Q)\, dt \right| d\tau \right| d\overline{\mu}(\eta) \right| \leqslant \\
&\leqslant \|r\|_C \frac{C^k}{k!} \|v\|_C \frac{|x-x_0|^{k+1}}{k+1} \cdot (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) + \|g\|_C \|v\|_C \frac{C^k}{k!} \frac{\ell^2}{2} \frac{|x-x_0|^{k+1}}{k+1} \cdot (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) + \\
&+ \bigvee_0^{\ell} (g)\, \|v\|_C \frac{C^k}{k!} \frac{\ell^2}{2} \frac{|x-x_0|^{k+1}}{k+1} \cdot (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) + \bigvee_0^{\ell} (Q)\, \|v\|_C \frac{C^k}{k!} \frac{\ell^2}{2} \frac{|x-x_0|^{k+1}}{k+1} \cdot (\overline{\mu}(\ell) - \overline{\mu}(0)) = \\
&= \frac{C^{k+1}}{(k+1)!} |x-x_0|^{k+1} \cdot \|v\|_C, \quad (32)
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, спектральный радиус оператора B равен нулю. Это означает однозначную разрешимость в $C[0;\ell]$ уравнения $v = Bv + \beta$ для любой непрерывной функции $\beta(x)$. Тем самым доказана теорема.

Теорема 2 (Аналог теоремы Коши–Пеано). *Для любой точки $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_\sigma$ и произвольных u_i ($i = 0,1,2,3,4,5$) существует единственное решение уравнения* (17)*, удовлетворяющее начальным условиям* (19).

Доказанный аналог теоремы Коши–Пикара позволяет утверждать, что пространство решений однородного уравнения имеет размерность 6. Если $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=6}$ — базис в пространстве однородного уравнения $Lu = 0$, то общее решение уравнения $Lu = F'_\sigma$ имеет вид

$u(x) = \sum\limits_{i=1}^{6} C_i\varphi_i(x) + v(x)$, $v(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (например, при нулевых начальных условиях).

Всякую систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=6}$ *линейно независимых решений однородного уравнения* $Lu = 0$ *назовем фундаментальной системой решений* (**ФСР**).

Для удобства введем следующие обозначения: $D^0u = u$, $D^1u = u'_x$, $D^2u = u''_{xx}$, $D^3u = u'''_{xx\mu}$, $D^4u = \left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x$, $D^5u = \left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}$.

На множестве $\overline{[0;\ell]}_S$ определим аналог определителя Вронского

$$W[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6](x) = = \begin{vmatrix} D^0\varphi_1 & D^0\varphi_2 & D^0\varphi_3 & D^0\varphi_4 & D^0\varphi_5 & D^0\varphi_6 \\ D^1\varphi_1 & D^1\varphi_2 & D^1\varphi_3 & D^1\varphi_4 & D^1\varphi_5 & D^1\varphi_6 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & D^2\varphi_3 & D^2\varphi_4 & D^2\varphi_5 & D^2\varphi_6 \\ D^3\varphi_1 & D^3\varphi_2 & D^3\varphi_3 & D^3\varphi_4 & D^3\varphi_5 & D^3\varphi_6 \\ D^4\varphi_1 & D^4\varphi_2 & D^4\varphi_3 & D^4\varphi_4 & D^4\varphi_5 & D^4\varphi_6 \\ D^5\varphi_1 & D^5\varphi_2 & D^5\varphi_3 & D^5\varphi_4 & D^5\varphi_5 & D^5\varphi_6 \end{vmatrix}(x), \tag{33}$$

где $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$, — решения однородного уравнения $Lu = 0$. Для простоты введенный определитель будем обозначать через $W(x)$, всякий раз когда из контекста будет понятно для каких функций он посчитан.

Пусть $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ *— решения однородного уравнения* $Lu = 0$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *найдется точка* $x_0 \in \overline{[0;\ell]}_S$ *такая, что* $W(x_0) = 0$*;*

б) $W(x) \equiv 0$ *на* $\overline{[0;\ell]}_S$*;*

в) *Функции* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{6}$ *линейно зависимы на* $\overline{[0;\ell]}_S$*.*

Доказательство на основе теоремы 2 проводится элементарно — алгебраическими рассуждениями.

Если $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{6}$ *— решения однородного уравнения* $Lu = 0$*, то* $pW[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6](x)$ *постоянна на* $\overline{[0;\ell]}_S$*.*

Так как $D^0\varphi_i(x)$, $D^1\varphi_i$, $pD^3\varphi_i$, $D^4\varphi_i$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, $D^2\varphi_i$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$ — μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, мера Лебега и мера, порождённая функцией $\mu(x)$, являются σ-абсолютно непрерывными на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ мерами, то $D^j\varphi_i$ $(i = 1,2,3,4,5,6,\ j = 0,1,2,3,4,5)$ являются σ-абсолютными на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ функциями, следовательно, $(pW)(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$. Последнее означает, что почти всюду (по мере σ) у функции $(pW)(x)$ существует σ-производная по Радону-Никодиму. Пусть Z — множество точек в которых существуют σ-производные $\dfrac{dx}{d\sigma}$, $\dfrac{d(pW)}{d\sigma}$, $\dfrac{dr}{d\sigma}$, $\dfrac{dg}{d\sigma}$. Множество Z имеет полную σ-меру.

Для точек $x \in Z \setminus S(\sigma)$ имеем

$$\frac{d(pW)}{d\sigma} = \begin{vmatrix} D^1\varphi_1 & D^1\varphi_2 & D^1\varphi_3 & D^1\varphi_4 & D^1\varphi_5 & D^1\varphi_6 \\ D^1\varphi_1 & D^1\varphi_2 & D^1\varphi_3 & D^1\varphi_4 & D^1\varphi_5 & D^1\varphi_6 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & D^2\varphi_3 & D^2\varphi_4 & D^2\varphi_5 & D^2\varphi_6 \\ pD^3\varphi_1 & pD^3\varphi_2 & pD^3\varphi_3 & pD^3\varphi_4 & pD^3\varphi_5 & pD^3\varphi_6 \\ D^4\varphi_1 & D^4\varphi_2 & D^4\varphi_3 & D^4\varphi_4 & D^4\varphi_5 & D^4\varphi_6 \\ D^5\varphi_1 & D^5\varphi_2 & D^5\varphi_3 & D^5\varphi_4 & D^5\varphi_5 & D^5\varphi_6 \end{vmatrix}(x) \cdot \frac{dx}{d\sigma} +$$

$$+\begin{vmatrix} D^0\varphi_1 & D^0\varphi_2 & D^0\varphi_3 & D^0\varphi_4 & D^0\varphi_5 & D^0\varphi_6 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & D^2\varphi_3 & D^2\varphi_4 & D^2\varphi_5 & D^2\varphi_6 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & D^2\varphi_3 & D^2\varphi_4 & D^2\varphi_5 & D^2\varphi_6 \\ pD^3\varphi_1 & pD^3\varphi_2 & pD^3\varphi_3 & pD^3\varphi_4 & pD^3\varphi_5 & pD^3\varphi_6 \\ D^4\varphi_1 & D^4\varphi_2 & D^4\varphi_3 & D^4\varphi_4 & D^4\varphi_5 & D^4\varphi_6 \\ D^5\varphi_1 & D^5\varphi_2 & D^5\varphi_3 & D^5\varphi_4 & D^5\varphi_5 & D^5\varphi_6 \end{vmatrix}(x)\cdot\frac{dx}{d\sigma}+$$

$$+\begin{vmatrix} D^0\varphi_1 & D^0\varphi_2 & D^0\varphi_3 & D^0\varphi_4 & D^0\varphi_5 & D^0\varphi_6 \\ D^1\varphi_1 & D^1\varphi_2 & D^1\varphi_3 & D^1\varphi_4 & D^1\varphi_5 & D^1\varphi_6 \\ D^3\varphi_1 & D^3\varphi_2 & D^3\varphi_3 & D^3\varphi_4 & D^3\varphi_5 & D^3\varphi_6 \\ pD^3\varphi_1 & pD^3\varphi_2 & pD^3\varphi_3 & pD^3\varphi_4 & pD^3\varphi_5 & pD^3\varphi_6 \\ D^4\varphi_1 & D^4\varphi_2 & D^4\varphi_3 & D^4\varphi_4 & D^4\varphi_5 & D^4\varphi_6 \\ D^5\varphi_1 & D^5\varphi_2 & D^5\varphi_3 & D^5\varphi_4 & D^5\varphi_5 & D^5\varphi_6 \end{vmatrix}(x)\cdot\frac{d\mu}{d\sigma}+$$

$$+\begin{vmatrix} D^0\varphi_1 & D^0\varphi_2 & D^0\varphi_3 & D^0\varphi_4 & D^0\varphi_5 & D^0\varphi_6 \\ D^1\varphi_1 & D^1\varphi_2 & D^1\varphi_3 & D^1\varphi_4 & D^1\varphi_5 & D^1\varphi_6 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & D^2\varphi_3 & D^2\varphi_4 & D^2\varphi_5 & D^2\varphi_6 \\ D^4\varphi_1 & D^4\varphi_2 & D^4\varphi_3 & D^4\varphi_4 & D^4\varphi_5 & D^4\varphi_6 \\ D^4\varphi_1 & D^4\varphi_2 & D^4\varphi_3 & D^4\varphi_4 & D^4\varphi_5 & D^4\varphi_6 \\ D^5\varphi_1 & D^5\varphi_2 & D^5\varphi_3 & D^5\varphi_4 & D^5\varphi_5 & D^5\varphi_6 \end{vmatrix}(x)\cdot\frac{dx}{d\sigma}+$$

$$+\begin{vmatrix} D^0\varphi_1 & D^0\varphi_2 & D^0\varphi_3 & D^0\varphi_4 & D^0\varphi_5 & D^0\varphi_6 \\ D^1\varphi_1 & D^1\varphi_2 & D^1\varphi_3 & D^1\varphi_4 & D^1\varphi_5 & D^1\varphi_6 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & D^2\varphi_3 & D^2\varphi_4 & D^2\varphi_5 & D^2\varphi_6 \\ D^3\varphi_1 & D^3\varphi_2 & D^3\varphi_3 & D^3\varphi_4 & D^3\varphi_5 & D^3\varphi_6 \\ D^5\varphi_1 & D^5\varphi_2 & D^5\varphi_3 & D^5\varphi_4 & D^5\varphi_5 & D^5\varphi_6 \\ D^5\varphi_1 & D^5\varphi_2 & D^5\varphi_3 & D^5\varphi_4 & D^5\varphi_5 & D^5\varphi_6 \end{vmatrix}(x)\cdot\frac{dx}{d\sigma}+$$

$$+\begin{vmatrix} D^0\varphi_1 & D^0\varphi_2 & D^0\varphi_3 & D^0\varphi_4 & D^0\varphi_5 & D^0\varphi_6 \\ D^1\varphi_1 & D^1\varphi_2 & D^1\varphi_3 & D^1\varphi_4 & D^1\varphi_5 & D^1\varphi_6 \\ D^2\varphi_1 & D^2\varphi_2 & D^2\varphi_3 & D^2\varphi_4 & D^2\varphi_5 & D^2\varphi_6 \\ D^3\varphi_1 & D^3\varphi_2 & D^3\varphi_3 & D^3\varphi_4 & D^3\varphi_5 & D^3\varphi_6 \\ D^4\varphi_1 & D^4\varphi_2 & D^4\varphi_3 & D^4\varphi_4 & D^4\varphi_5 & D^4\varphi_6 \\ (D^5\varphi_1)'_\sigma & (D^5\varphi_2)'_\sigma & (D^5\varphi_3)'_\sigma & (D^5\varphi_4)'_\sigma & (D^5\varphi_5)'_\sigma & (D^5\varphi_6)'_\sigma \end{vmatrix}(x)=0, \quad (34)$$

так как в каждой строке есть пропорциональные строки.

Если $x\in S(\mu)$, то (для сокращения введено обозначение $\mathcal{D}(u,x)=\Delta\left(pD^3u\right)(x)$, $\mathcal{D}_1(u)=$ $=\Delta\left(pD^3u\right)''_{xx}(x)$)

$$\frac{d}{d\sigma}(pW)(x)=\frac{\Delta(pW)(x)}{\Delta\sigma(x)}=\frac{1}{\Delta\sigma}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} D^0\varphi_1(x) & D^0\varphi_2(x) & D^0\varphi_3(x) & D^0\varphi_4(x) & D^0\varphi_5(x) & D^0\varphi_6(x) \\ D^1\varphi_1(x) & D^1\varphi_2(x) & D^1\varphi_3(x) & D^1\varphi_4(x) & D^1\varphi_5(x) & D^1\varphi_6(x) \\ D^2\varphi_1(x) & D^2\varphi_2(x) & D^2\varphi_3(x) & D^2\varphi_4(x) & D^2\varphi_5(x) & D^2\varphi_6(x) \\ \mathcal{D}(\varphi_1,x) & \mathcal{D}(\varphi_2,x) & \mathcal{D}(\varphi_3,x) & \mathcal{D}(\varphi_4,x) & \mathcal{D}(\varphi_5,x) & \mathcal{D}(\varphi_6,x) \\ D^4\varphi_1(x) & D^4\varphi_2(x) & D^4\varphi_3(x) & D^4\varphi_4(x) & D^4\varphi_5(x) & D^4\varphi_6(x) \\ D^5\varphi_1(x) & D^5\varphi_2(x) & D^5\varphi_3(x) & D^5\varphi_4(x) & D^5\varphi_5(x) & D^5\varphi_6(x) \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} D^0\varphi_1(x) & D^0\varphi_2(x) & D^0\varphi_3(x) & D^0\varphi_4(x) & D^0\varphi_5(x) & D^0\varphi_6(x) \\ D^1\varphi_1(x) & D^1\varphi_2(x) & D^1\varphi_3(x) & D^1\varphi_4(x) & D^1\varphi_5(x) & D^1\varphi_6(x) \\ D^2\varphi_1(x) & D^2\varphi_2(x) & D^2\varphi_3(x) & D^2\varphi_4(x) & D^2\varphi_5(x) & D^2\varphi_6(x) \\ D^3\varphi_1(x) & D^3\varphi_2(x) & D^3\varphi_3(x) & D^3\varphi_4(x) & D^3\varphi_5(x) & D^3\varphi_6(x) \\ D^4\varphi_1(x) & D^4\varphi_2(x) & D^4\varphi_3(x) & D^4\varphi_4(x) & D^4\varphi_5(x) & D^4\varphi_6(x) \\ \mathcal{D}_1(\varphi_1) & \mathcal{D}_1(\varphi_2) & \mathcal{D}_1(\varphi_3) & \mathcal{D}_1(\varphi_4) & \mathcal{D}_1(\varphi_5) & \mathcal{D}_1(\varphi_6) \end{vmatrix}\frac{1}{\Delta\sigma(x)}. \quad (35)$$

В силу пропорциональности соответствующих строк, оба определителя в правой части последнего равенства равны нулю.

И, наконец, в случае $x \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$ имеем

$$\frac{d}{d\sigma}(pW)(x) = \frac{\Delta(pW)(x)}{\Delta\sigma(x)} = \frac{1}{\Delta\sigma} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} D^0\varphi_1(x) & D^0\varphi_2(x) & D^0\varphi_3(x) & D^0\varphi_4(x) & D^0\varphi_5(x) & D^0\varphi_6(x) \\ D^1\varphi_1(x) & D^1\varphi_2(x) & D^1\varphi_3(x) & D^1\varphi_4(x) & D^1\varphi_5(x) & D^1\varphi_6(x) \\ D^2\varphi_1(x) & D^2\varphi_2(x) & D^2\varphi_3(x) & D^2\varphi_4(x) & D^2\varphi_5(x) & D^2\varphi_6(x) \\ D^3\varphi_1(x) & D^3\varphi_2(x) & D^3\varphi_3(x) & D^3\varphi_4(x) & D^3\varphi_5(x) & D^3\varphi_6(x) \\ D^4\varphi_1(x) & D^4\varphi_2(x) & D^4\varphi_3(x) & D^4\varphi_4(x) & D^4\varphi_5(x) & D^4\varphi_6(x) \\ \mathcal{D}_1(\varphi_1) & \mathcal{D}_1(\varphi_2) & \mathcal{D}_1(\varphi_3) & \mathcal{D}_1(\varphi_4) & \mathcal{D}_1(\varphi_5) & \mathcal{D}_1(\varphi_6) \end{vmatrix} = 0, \quad (36)$$

так как в определителе есть пропорциональные строки.

Полученные результаты позволяют доказать существование функции влияния (при условии невырожденности граничной задачи, которое очевидным образом выполняется), корректную разрешимость математической модели (1). Для этого достаточно адаптировать схему рассуждений, изложенную в работах [5], [9] и [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. — М. : Физматгиз, 1960. — 492 с.

2. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

4. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

5. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

7. Тимашова, Е. В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

8. Шабров, С. А. О μ-регуляризации функции с конечным изменением / С. А. Шабров // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — 1999. — С. 166–169.

9. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

10. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

REFERENCES

1. Vlasov V.Z., Leontyev N.N. Beams, plates and covers on the elastic basis. [Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii]. Moscow, 1960, 492 p.

2. Pokorny Yu.V. The Stieltjes integral and derivatives at least in ordinary differential equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 1999, vol. 364, no. 2, P. 167–169.

3. Pokorny Y.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. et. al. Differential equations on geometrical graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Fizmatlit, 2004, 272 p.

4. Pokorny Yu.V., Bakhtina J.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A.. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Fizmatlit, 2009, 192 p.

5. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

6. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

7. Ivannikova T.A., Timashova E.V, Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

8. Shabrov S.A. On the μ–regularization of a function with finite variation. [Shabrov S.A. O μ-regulyarizacii funkcii s konechnym izmeneniem]. *Sbornik statej aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta VGU — The collection of articles of students and postgraduates of mathematical faculty of VSU*, 1999, pp. 166–169.

9. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

10. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бородина Е. А., ассистент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: eaborodina@inbox.ru

Borodina E. A., assistant of the department of higher mathematics and information technologies, Voronezh state University of engineering technologies, Voronezh, Russia
E-mail: eaborodina@inbox.ru

Голованёва Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, г. Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, Russia
E-mail: gfainav@mail.ru

Шабров Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, doctor of physical-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90