УДК 517.956

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

А. Д. Баев[1], **Ж. И. Бахтина**[1], **С. С. Бунеев**[2],
Р. А. Ковалевский[1], **А. А. Бабайцев**[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Елецкий государственный университет*

Поступила в редакцию 12.03.2016 г.

Аннотация. Статья посвящена доказательству коэрцитивных априорных оценок решений граничных задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений. Уравнение представляет собой сумму вырождающегося псевдодифференциального оператора с переменным символом, зависящим еще от комплексного параметра, и оператора дифференцирования. Получены коэрцитивные априорные оценки решений рассматриваемых задач. Оценки получены в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, вырождающийся псевдодифференциальный оператор, граничная задача, коэрцитивная априорная оценка.

ABOUT APRIORISTIC ESTIMATES OF SOLUTIONS OF BOUNDARY TASKS IN A HALF-SPACE FOR ONE CLASS OF THE DEGENERATING PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. D. Baev, J. I. Bakhtin, S. S. Buneev, R. A. Kowalewski, A. A. Babaitsev

Abstract. Article is devoted to the proof of coercive aprioristic estimates of solutions of boundary tasks in a half-space for one class of the degenerating pseudo-differential equations. The equation represents the sum of the degenerating pseudo-differential operator with the variable symbol depending on the complex parameter, and the operator of differentiation. Coercive aprioristic estimates of solutions of the considered tasks are received. Estimates are received in special weight spaces like S.L. Sobolev's spaces.

Keywords: the degenerating equation, the degenerating pseudo-differential operator, a boundary task, coercive aprioristic assessment.

ВВЕДЕНИЕ

Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к “неклассическим” задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [11].

Дальнейшее развитие теории вырождающихся уравнений потребовало исследования теории весовых пространств типа пространств С. Л. Соболева и теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений.

В этой работе доказываются коэрцитивные априорные оценки решений граничных задач в полупространстве для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих вырождающийся псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и производную первого порядка по переменной y. Формулировка полученных результатов содержится в работе [2].

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [3]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по y символом были изучены в [3], в работах [4]–[5] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau$, $\eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(y) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}\,. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(y) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta), j = 1,2,\ldots, \text{ где } D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}, \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R^n_+); H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \, |F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]|^2 \, d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)(s \geqslant 0, q > 1)$ состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_y v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1 \leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma+1, \sigma+\frac{l}{2}\}, l = 1,2\ldots,\sigma$ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in \mathrm{R}^1, p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,1,2,\ldots, l = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q, \xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

Рассмотрим в R^n_+ следующие задачи:

$$\begin{cases} K^{(q)}_-(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) - \partial_t v(x,t) = F(p,x,t) \\ v(x,t)|_{y=0} = G(x), \end{cases} \tag{8}$$

$$K^{(q)}_+(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) - \partial_t v(x,t) = F(p,x,t). \tag{9}$$

Наряду с задачами (8), (9) рассмотрим задачи, зависящие не только от комплексного параметраp, но и от вещественного параметра $r_1 > 0$.

$$\begin{cases} K^{(q)}_-(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) - \partial_t v(x,t) - r_1 v(x,t) = F(p,x,t) \\ v(x,t)|_{t=0} = G(x), \end{cases} \tag{10}$$

$$K^{(q)}_+(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\,v(x,t) - \partial_t v(x,t) + r_1 v(x,t) = F(p,x,t). \tag{11}$$

Здесь $K^{(q)}_\pm(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$. Предположим, что символы $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию.

Условие 2. Функции $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ принадлежат классу $S^q_{\alpha,p}(\Omega)$, $q > 1$ — действительное число, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Причём с некоторой константой $c > 0$, не зависящей от $p \in Q$, $t \in \Omega$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, справедливы оценки

$$\pm Re\lambda_\pm(p,y,\xi,\eta) \geqslant c(|p| + |\xi| + |\eta|)^q$$

при всех $p \in Q$, $t \in \Omega$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие $1'$. Выполнено условие 1 при $\sigma = s + q$, $l = 1,2,\ldots,[\frac{s}{q}]$, где $q > 1$, $s \geqslant 0$ — действительные числа.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_-(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любого решения $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (15) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c(\|F,|p|\|_{s,\alpha,q} + \|G,|p|\|_{s+\frac{1}{2}q} + \|v\|_{L_2(R^n_+)}) \tag{12}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G.

Теорема 2. Пусть $s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_+(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любого решения $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (16) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c(\|F,|p|\|_{s,\alpha,q} + \|v\|_{L_2(R^n_+)})$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, $r_1 \geqslant r_2$. Тогда при достаточно большом $r_2 > 0$ для любого решения $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (17) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c(\|F,|p|\|_{s,\alpha,q} + \|G,|p|\|_{s+\frac{1}{2}q})$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, для любого решения $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (18) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c\,\|F,|p|\|_{s,\alpha,q}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F.

Теорема 5. Пусть$s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_-(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > p_0 > 0\}$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для любого решения $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (15) справедлива априорная оценка

$$\|v, |p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c(\|F, |p|\|_{s,\alpha,q} + \|G, |p|\|_{s+\frac{1}{2}q})$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G.

Теорема 6. Пусть$s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_+(p,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| \geqslant p_0 > 0\}$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для любого решения $v(x,y) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (16) справедлива априорная оценка

$$\|v, |p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c\,\|F, |p|\|_{s,\alpha,q}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим следующие операторы с переменными коэффициентами

$$\widetilde{A}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u(\xi,t) = K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u - \partial_t u, \tag{1.1}$$

$$\widetilde{A}^{\pm}_{r}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u(\xi,t) = \frac{1}{r}\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u + K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u - \partial_t u, \tag{1.2}$$

$$\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u = \frac{1}{r}\Lambda^{2r_o}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u + \mu K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \pm (1-\mu)u - \partial_t u, \tag{1.3}$$

где $K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) = F_{x\to\xi}[K^{(q)}_{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})]$, $K^{(q)}_{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$, удовлетворяющим условию 2, $\mu \in [0,1]$, $r = 1,2,\ldots$, $r_0 > 0$ — целое число, $2r_0 \geqslant q > 1$, $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$, весовой псевдодифференциальный оператор $\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})$ определен равенством

$$\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t}) = F^{-1}_{\alpha}[\pm(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{r_0} F_{\alpha}[\cdot]]. \tag{1.4}$$

В дальнейшем в этом параграфе мы обозначаем норму в пространстве $L_2(R^1_+)$ через $||\cdot||$. Рассмотрим также операторы

$$\widetilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u = K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u - \partial_t u \pm r_1 u, \tag{1.5}$$

$$\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u = \frac{1}{r}\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u + K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u - \partial_t u \pm r_1 u, \tag{1.6}$$

$$\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u = \frac{1}{r}\Lambda^{2r_o}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u + \mu K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \pm (1-\mu)u - \partial_t u \pm r_1 u, \tag{1.7}$$

где $r_1 > 0$ — некоторое число.

В дальнейшем через c будем обозначать положительные константы, не зависящие от параметра p.

Доказательство основных утверждений основано на ряде вспомогательных утверждений, которые мы приведем здесь без доказательства.

Лемма 1.1. Пусть $\mu \in [0,1], r = 1,2,\dots,\ p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Пусть функция $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ и любого $s_0 \in R^1$ справедливо неравенство

$$\mu\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2+\mu^2\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}), \quad (1.8)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от $r,p,\mu;\xi \in R^{n-1}$ и функции $u(t)$.

Следствие 1.1. Пусть выполнены условия леммы 1.1. Тогда при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ справедливо неравенство

$$\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+$$
$$+\mu r_1(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2 \leqslant c(\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2). \quad (1.9)$$

Лемма 1.2. Пусть выполнены условия леммы 1.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ и любого $s_0 \in R^1$ справедливы оценки

$$\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{2r_0}\|u\|^2+\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_1(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2+\frac{\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}), \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+(1-\mu)^2\|u\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2+\mu(1-\mu)\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}), \quad (1.11)$$

где постоянные не зависят от $\mu \in [0,1], r = 1,2,\dots,\ \xi \in R^{n-1},\ u(t)$.

Следствие 1.2. При выполнении условий леммы 1.1 для любого $s_0 \in R^1$ и любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ справедлива оценка

$$\|u\|^2 \leqslant c(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2+\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}), \quad (1.12)$$

где $\mu \in [0,1]$, $r = 1,2,\dots$, постоянная не зависит от p, r, μ, xi, u.

Следствие 1.3. Пусть выполнены условия леммы 1.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, справедливы оценки

$$\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{2r_0}\|u\|^2+\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_1(\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2), \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+(1-\mu)^2\|u\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2), \quad (1.14)$$

где постоянные не зависят от $\mu \in [0,1], r = 1,2,\dots,\ \xi \in R^{n-1},\ u(t)$.

Следствие 1.4. При выполнении условий леммы 1.1 для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, справедлива оценка

$$\|u\|^2 \leqslant c(\left\|\widetilde{A}^{\pm;r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2 \mp (1-\mu)\,|u(0)|^2\,,$$

где $\mu \in [0,1]$, $r = 1,2,\ldots$, постоянная не зависит от r, p, μ, ξ, u.

Доказательство. Для доказательства достаточно почленно сложить неравенства (1.14) и (1.12) и воспользоваться неравенством $\mu^2 + (1-\mu)^2 \geqslant \frac{1}{2}$ при $\mu \in [0,1]$.

Лемма 1.3. Пусть $\mu \in [0,1]$, $r = 1, 2, \ldots$, $\xi \in R^{n-1}$. Пусть выполнено условие $1'$ и функции $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{\mu}{r}\,\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \mu^2\,\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|} + (1-\mu)\,\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|\partial_t u\|^2 + c(\varepsilon)(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2 \mp$$
$$\mp (1-\mu)\,|u(0)|^2) + \mu^2 c_1\,\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\,. \quad (1.15)$$

Здесь постояннаяс$(\varepsilon) > 0$ не зависит от p, μ, ξ, u; постоянная $c_1 > 0$ не зависит от $\varepsilon, r, p, \mu, \xi, u$; $s_0 \in R^1$ — любое число.

Следствие 1.5. Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\frac{\mu}{r}\,\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \mu^2\,\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|} + (1-\mu)\,\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|\partial_t u\|^2 + c(\varepsilon)(\left\|A^{\pm;r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp (1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2 \mp (1-\mu)\,|u(0)|^2), \quad (1.16)$$

где константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от p, μ, ξ, u.

Лемма 1.4. При выполнении условий леммы 1.3 для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{r^2}\,\|u,|p|\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|} + \frac{\mu}{r}\,\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \frac{1-\mu}{p}\,\|u,|p|\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|\partial_t u\|^2 + c(\varepsilon)(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\| \mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\,|u(0)|^2 \mp$$
$$\mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2 \mp (1-\mu)\,|u(0)|^2) + c_1\frac{\mu}{r}\,\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\,. \quad (1.17)$$

Следствие 1.6. Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\frac{1}{r^2}\,\|u,|p|\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|} + \frac{\mu}{r}\,\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \frac{1-\mu}{r}\,\|u,|p|\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,\|\partial_t u\|^2 + c(\varepsilon)(\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\,|u(0)|^2 \mp$$
$$\mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2 \mp (1-\mu)\,|u(0)|^2). \quad (1.18)$$

Лемма 1.5. Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|^2 \leqslant c\{\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\,|u(0)|^2 \mp$$
$$\mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\,|u(0)|^2 \mp (1-\mu)\,|u(0)|^2 + \|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\cdot(\frac{\mu}{r}+\mu^2+(1-\mu)\mu)\}, \quad (1.19)$$

где константа $c>0$ не зависит отr,p,μ,ξ,u. Здесь $s_0\in R^1$ — любое число.

Доказательство. Из (1.5) получим оценку

$$\|\partial_t u\|^2\leqslant c(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|+\frac{1}{r}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}+\mu\left\|u,|p|\right\|_{q,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)\left\|u\right\|). \quad (1.20)$$

Следствие 1.7. Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R^1_+)$ и любого числа $\varepsilon>0$ при $r_1\geqslant r_2$, где $r_2>0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\|\partial_t u\|^2\leqslant c(\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\left|u(0)\right|^2\mp$$
$$\mp\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\left|u(0)\right|^2\mp(1-\mu)\left|u(0)\right|^2). \quad (1.21)$$

Лемма 1.6. Пусть $s=1,2,\ldots$, $\mu\in[0{,}1]$, $r=1,2,\ldots$, $\xi\in R^{n-1}p\in Q=\{p\in C,|\arg p|<\frac{\pi}{2},|p|>0\}$. Пусть выполнено условие $1'$. Пусть функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R^1_+)$ справедливы формулы представления

$$\partial_t^s u(0)=\widetilde{\beta}^s_{\pm}(r,p,\mu,\xi)u(0)-\sum_{j=0}^{s-1}\widetilde{\beta}^j_{\pm}(r,p,\mu,\xi)\partial_t^{s-j-1}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}\left.u\right|_{t=0}+$$
$$+\sum_{j=0}^{s-2}\widetilde{\beta}^j_{\pm}(r,p,\mu,\xi)(\frac{1}{r}M^{\pm}_{s-j-1,2r_0}\left.u\right|_{t=0}+\mu M^{\pm}_{s-j-1,q}\left.u\right|_{t=0}), \quad (1.22)$$

$$\partial_t^s u(0)=\widetilde{\beta}^s_{\pm}(r,p,\mu,\xi)u(0)-\sum_{j=0}^{s-1}\widetilde{\beta}^j_{\pm}(r,p,\mu,\xi)\partial_t^{s-j-1}\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}\left.u\right|_{t=0}+$$
$$+\sum_{j=0}^{s-2}\widetilde{\beta}^j_{\pm}(r,p,\mu,\xi)(\frac{1}{r}M^{\pm}_{s-j-1,2r_0}\left.u\right|_{t=0}+\mu M^{\pm}_{s-j-1,q}\left.u\right|_{t=0}), \quad (1.23)$$

где

$$\widetilde{\beta}_{\pm}(r,p,\mu,\xi)=\pm\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}+\mu\lambda_{\pm}(p,0,\xi,0)\pm(1-\mu), \quad (1.24)$$

операторы $\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}$, $\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}$ определены в (1.3), (1.7), $M^{\pm}_{j,q}$ — коммутатор операторов ∂_t^j и $K^{(q)}_{\pm}(t,\xi,D_{\alpha,t})$, $M^{\pm}_{j,2r_0}$ — коммутатор операторов ∂_t^j и $\Lambda^{2r_0}(\xi,D_{\alpha,t})$.

Рассмотрим операторы

$$\Phi_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})=\frac{1}{r}\Lambda^{2r_0}_{+}(\xi,D_{\alpha,t})+\mu\Lambda^{q}_{+}(\xi,D_{\alpha,t})+(1-\mu)I, \quad (1.25)$$

и обозначим

$$\Phi_{r,\mu}(\xi,0)=\varphi(r,\mu,\xi)I, \quad (1.26)$$

$$\widetilde{N}_{s,r,\mu,\xi}u=\{\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}((\frac{1}{r^j})^2\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|}+$$
$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j),\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|})\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.27)$$

Лемма 1.7. Пусть $s \geqslant q > 1$ — действительное число $\mu \in [0,1], r = 1,2,\ldots, \xi \in R^{n-1}, p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$ Пусть выполнено условие $1'$ и функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ и любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi(r,\mu,\xi)\left|\partial_t^l u(0)\right|^2 \leqslant \varepsilon \widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u+$$
$$+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[s/q]}(\mu^2+\frac{1}{r^2})\left\|\partial_t^i u\right\|^2+c_1(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u+$$
$$+\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2), \quad (1.28)$$

где постоянная не зависит от r,p,μ,ξ,u, а постоянная не зависит от ε,p,μ,ξ,u.

2. Доказательство априорных оценок решений задачи Дирихле для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений с переменным по t символом, зависящим от комплексного параметра

Лемма 2.1. Пусть $\mu \in [0,1]$, $r = 1,2\ldots$, $\xi \in R^{n-1}$, $s \geqslant 0, p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Пусть выполнено условие $1'$ и функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{q,r,\mu,\xi}u \leqslant c(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \varphi(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2+(\mu^2+\frac{\mu}{r}+\mu(1-\mu))\,\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}), \quad (2.1)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от $r,p,\mu,v,u(t)$, $s_0 \in R^1$ — любое действительное число.

Доказательство. Сложим почленно неравенства (1.15), (1.17), (1.18), получим

$$\frac{\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu^2\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\frac{1}{r^2}\|u,|p|\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|}+\frac{\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+$$
$$+\frac{1-\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|}+\|\partial_t u\|^2 \leqslant c(\varepsilon)\{\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2 \mp$$
$$\mp\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2 \mp (1-\mu)\,|u(0)|^2)+\mu^2 c_1\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha}+$$
$$+c_1\frac{\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}+\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\cdot(\frac{\mu}{r}+\mu^2+(1-\mu)\mu)\}.$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим

$$\widetilde{N}^2_{q,r,\mu,\xi}u=\sum_{j=0}^{l}\left(\left(\frac{1}{r^j}\right)^2\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|}+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-q(l-j),\alpha,|\xi|}+\right.$$
$$\left.+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-ql,\alpha,|\xi|}\right) \leqslant c\left(\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \varphi(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2+\right.$$
$$(\mu^2+\frac{\mu}{r}+\mu(1-\mu))\,\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}.$$

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$ при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{q,r,\mu,\xi}u \leqslant c\left(\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\right\|^2 \mp \varphi(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2\right), \quad (2.2)$$

где постоянная $c>0$ не зависит от p,μ,v,u.

Доказательство. Сложим почленно неравенства (1.16), (1.18), (1.21), получим

$$\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\frac{1}{r^2}\left\|u,|p|\right\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|}+\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+$$
$$+\frac{1-\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|}+\|\partial_t u\|^2\leqslant c(\varepsilon)\{\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2\mp$$
$$\mp\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2\mp(1-\mu)\,|u(0)|^2)\}.$$

Выберем число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$\widetilde{N}^2_{q,r,\mu,\xi}u=\sum_{j=0}^{l}((\frac{1}{r^j})^2\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|}+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-q(l-j),\alpha,|\xi|}+$$
$$+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-ql,\alpha,|\xi|})\leqslant c\left(\left\|\widetilde{A}_r,\mu^{\pm}(p,t,\xi,D_\alpha,t,\partial_t)u\right\|^2\mp\varphi(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2\right).$$

Лемма 2.2. При выполнении условий леммы 2.1 для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\leqslant c\left(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\mp\right.$$
$$\left.\mp\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2+\sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|\partial_t^l u,|p|\right\|^2_{s_1,\alpha,|\xi|}\right),\quad(2.3)$$

где $s_1\in R^1$ — любое действительное число, $s\geqslant0$ — действительное число.

Доказательство. Применим неравенство (2.1) к функции $\Lambda^{s-ql}_{\pm}(\xi,D_{\alpha,t})\Phi^j_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{l-j}u(t)$, где операторы Λ^{s-ql}, $\Phi_{r,\mu}$ определены соответственно в (1.4) и (1.25). Получим оценку

$$\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}\{\left\|\Phi_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\Lambda^{s-ql}_{+}(\xi,D_{\alpha,t})\Phi^j_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{l-j}u\right\|^2+$$
$$+\left\|\partial_t\Lambda^{s-ql}_{+}(\xi,D_{\alpha,t})\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u\right\|^2\}\leqslant c\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}\{\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{p,\mu}\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u\right\|^2\mp$$
$$\mp\varphi(r,\mu,\xi)\left|\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}\,u|_{t=0}\right|^2+\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}\mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\},\quad(2.4)$$

где $s_0\in R^1$ — любое число.

Прокоммутируем операторы $\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}$, получим

$$\widetilde{\mathrm{A}}^{\pm}_{r,\mu}\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}=\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}\left(\partial_t^{l-j}\widetilde{\mathrm{A}}^{\pm}_{r,\mu}-\mu\mathrm{M}^{\pm}_{l-j,q}-\frac{1}{r}\mathrm{M}^{\pm}_{l-j,\,2r_0}\right)-\widetilde{\mathrm{M}}_{1,\,s-ql,j}\partial_t^{l-j},\qquad(2.5)$$

где $\mathrm{M}^{\pm}_{j,q}$, $\mathrm{M}^{\pm}_{j,2r_0}$, $\widetilde{\mathrm{M}}_{1,s-ql,j}$ коммутаторы соответственно операторов ∂_t^j и $\mathrm{K}^{(q)}_{\pm}$; ∂_t^j и $\Lambda^{2r}_{\pm}$; ∂_t и $\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}$.

Используя равенство

$$\left|\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}\,u|_{t=0}\right|^2=(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\left|\varphi^j(r,\mu,\xi)\partial_t^{l-j}u(0)\right|^2\qquad(2.6)$$

в правой части неравенства (2.4), получим неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,p,\mu,\xi}u \leqslant c\{\widetilde{N}^2_{s,p,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u + \sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}(\mp(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\left|\partial_t^{l-j}u(0)\right|^2+$$
$$+\left\|\widetilde{M}_{1,s-ql,j}\partial_t^{l-j}u\right\|^2+\mu^2\left\|\Phi^j_{r,\mu}M_{l-j,q}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}+$$
$$+\frac{1}{r^2}\left\|\Phi^j_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j,2r_0}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}+\mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda_+^{s-ql}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|_{s-ql,\alpha,|\xi|})+$$
$$+\sum_{l=1}^{[sq^{-1}]}\sum_{j=0}^{l}\mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda^{s-ql}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|_{s_0,\alpha,|\xi|}\}. \quad (2.7)$$

Оценим нормы коммутаторов в правой части неравенства (2.7). С помощью неравенства Эрлинга–Ниренберга получим оценку

$$\frac{1}{r^2}\left\|\Phi^j_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j,2r_0}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{l-j}\frac{1}{r^2}(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0(j+1),\alpha,|\xi|}+\mu^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+2r_0,\alpha,|\xi|}+$$
$$+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0,\alpha,|\xi|})+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{l-j}(\frac{1}{r^2}+\mu^2+(1-\mu)^2)\left\|\partial_t^i u\right\|^2, \quad (2.8)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое число.

Аналогично оценке (2.8) выводим неравенство

$$\left\|M^{\pm}_{1,s-ql,j}\partial_t^{l-j}u\right\|^2\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{1}\{\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^{i+l-j}u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0j,\alpha,|\xi|}+$$
$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{i+l-j}u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j),\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{i+l-j}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}\}+$$
$$+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{1}(\frac{1}{r^2}+\mu^2+(1-\mu)^2)\left\|\partial_t^{i+l-j}u\right\|^2. \quad (2.9)$$

Аналогично выводим оценку

$$\mu^2\left\|\Phi^j_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j,q}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{l-j}\mu^2\left(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0(j+1),\alpha,|\xi|}+\right.$$
$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+2r_0,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0,\alpha,|\xi|})+$$
$$+c\,(\varepsilon)\sum_{i=0}^{l-j}(\mu^2+\frac{1}{r^2}+(1-\mu)^2)\left\|\partial_t^i u\right\|^2+c_1\sum_{i=0}^{l-j-1}\mu^2(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q+2r_0j,\alpha,|\xi|}+$$
$$\left.+\mu^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+q,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q,\alpha,|\xi|}\right). \quad (2.10)$$

Применяя неравенства (2.8)–(2.10) в правой части неравенства (2.7), получим неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \leqslant \varepsilon \widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u + c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{q}]+1} \left\|\partial_t^i u\right\|^2 (\frac{1}{r^2} + \mu^2 + (1-\mu)^2) +$$
$$+ c(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}A^{\pm}_{r,\mu}u \mp \sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]} (|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2 +$$
$$+ \sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{l-j-1} \mu^2(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q+2r_0j,\alpha,|\xi|} + \mu^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+q,\alpha,|\xi|} +$$
$$+ (1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q,\alpha,|\xi|} + \mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda_+^{s-ql}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}).$$

Отсюда при $q>1$ выводим неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \leqslant \varepsilon \widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u + c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{q}]+1} (\frac{1}{r^2} + \mu^2 + (1-\mu)^2)\left\|\partial_t^i u\right\|^2 +$$
$$+ c_1(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u \mp \sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]} (|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2 + \widetilde{N}^2_{s+q-1,r,\mu,\xi}u +$$
$$+ \sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l} \mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s_0+s+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|}).$$

Применяя в последнем неравенстве неравенство Эрлинга – Ниренберга, получим оценку

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \leqslant \varepsilon \widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u + c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{q}]+1} (\frac{1}{r^2} + \mu^2 + (1-\mu)^2)\left\|\partial_t^i u\right\|^2 +$$
$$+ c_2(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widehat{A}^{\pm}_{r,\mu}u \mp \sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]} (|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2 + \sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\partial_t^l u,|p|\right\|^2_{s_0+s+(2r_0-q)l,\alpha,|\xi|}).$$

Обозначим $s_1 = s_0 + s + (2r_0 - q)l$. Так как $s_0 \in R^1$ произвольное число, то $s_1 \in R^1$ — произвольное число.

Применяя для оценки $\left\|\partial_t^i u\right\|^2$ неравенство Эрлинга–Ниренберга и выбирая в последнем неравенстве число $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (2.3).

Следствие 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ при $s \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \leqslant c\{\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u \mp \sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\,|u(0)|^2 + \|u\|^2\}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2 справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \leqslant c\left(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \mp\right.$$
$$\left.\mp \sum_{l=1}^{[s/q]} (|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\,|u(0)|^2 + \sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|\partial_t^l u,|p|\right\|^2_{s_1,\alpha,|\xi|}\right).$$

Возьмем $s_1 = 0$ и оценим выражение $\sum\limits_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\|\partial_t^l u\right\|^2$с помощью неравенства Эрлинга – Ниренберга, в силу которого справедлива оценка $\sum\limits_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\|\partial_t^l u\right\|^2 \leqslant \varepsilon \left\|\partial_t^{[\frac{s}{q}]+1} u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left\|u\right\|^2$. Получим

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \leqslant c\Big(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \mp \\ \mp \sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\left|u(0)\right|^2 + \sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|\partial_t^l u\right\|^2_{s_1,\alpha,|\xi|}\Big) \leqslant \\ \leqslant c\Big(\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \mp \sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\left|u(0)\right|^2)+ \\ + \varepsilon\left\|\partial_t^{[\frac{s}{q}]+1}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left\|u\right\|^2$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, и, используя в полученном неравенстве оценку (2.1) при $s_0 = 0$, получим оценку (2.11).

Следствие 2.3. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\widetilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \leqslant c\{\widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}A^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u \mp \sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\left|u(0)\right|^2\}. \tag{2.12}$$

Здесь $s \geqslant 0$ — действительное число.

Для доказательства достаточно применить неравенство (2.2) к функции $\Lambda_{\pm}^{s-ql}(\xi,D_{\alpha,t})\Phi^j_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{l-j}u$ и повторить доказательство леммы 2.2.

Следствие 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ при $s \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\left\|u\right\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} \leqslant c\{\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}\left|u(0)\right|^2 + \left\|u\right\|^2\}. \tag{2.13}$$

Здесь константа $c > 0$ не зависит отξ, u, t. Оператор $\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определен в (1.3).

Неравенство (2.13) вытекает из (2.2) при $\mu = 1$, $r = +\infty$, если воспользоваться тождеством $\varphi(+\infty,1,\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}$и неравенством

$$c^{-1}\left\|u,|p|\right\|_{s,\alpha,q,|\xi|} \leqslant \widetilde{N}^2_{s,+\infty,1,\xi}u \leqslant c\left\|u,|p|\right\|_{s,\alpha,q,|\xi|}.$$

Следствие 2.5. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\left\|u,|p|\right\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} \leqslant c\{\left\|\widetilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,|p|\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}\left|u(0)\right|^2\}, \tag{2.14}$$

где константа $c > 0$ не зависит от ξ, u, t, p.

Утверждение следствия 2.5 вытекает из (2.12) при $\mu = 1$, $r = +\infty$.

Доказательство теорем 1–4. Так как множество $C_0^\infty(R^n_+)$ плотно в $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0$ — действительное число), то теоремы 1 и 2 достаточно доказать на функциях $v(x,t) \in C_0^\infty(R^n_+)$. Но тогда функция $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R^1_+)$. Таким образом, теоремы 1 и 2 вытекают из оценок (2.13).

Аналогично из оценок (2.14) вытекают утверждения теорем 3 и 4.

Доказательство теорем 5, 6. Так как множество $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в$H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s \geqslant 0$ — действительное число), то теоремы 5 и 6 достаточно доказать на функциях $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$. В этом случае функция $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)]$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R_+^1)$. Воспользуемся оценкой (2.13), получим неравенство

$$\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} - \|u\|^2 \leqslant c\{\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\},$$

или

$$\frac{1}{2}\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} + (\frac{1}{2}\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} - \|u\|^2) \leqslant c\{\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp$$
$$\mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\}.$$

Так как $p \in Q_{p_0}$, то $|p| > p_0$. Таким образом, из определения нормы в пространстве $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ следует, что существует такое число p_0, что при всех $|p| > p_0$ справедливо неравенство $\frac{1}{2}\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} - c\|u\|^2 \geqslant 0$. Отсюда и из предыдущего неравенства получим, оценку

$$\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} \leqslant c_1\{\left\|\widetilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\},$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит отξ, u, t, p.

Используя в этом неравенстве равенство Парсеваля и равенство (3), получим утверждения теорем 5 и 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Baev, A. D. Boundary Value Problems for a Class of Degenerate Pseudodifferetial Equations / A. D. Baev, R. A. Kovalevskii // Doklady Mathematics. — 2015. — V. 91, № 2. — P. 131–133.

3. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

4. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

5. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

6. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 477, № 1. — С. 7–10.

7. Баев, А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун–т, 2008. — 240 с.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. On some cases of degeneracy of elliptic type equations at the boundary of the domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravneniyj ellipticheskogo tipa

na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Baev A.D., Kovalevskii R.A. Boundary Value Problems for a Class of degenerate pseudodifferetial equations. Doklady Mathematics. , 2015, vol. 91, no. 2, pp. 131–133.

3. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

4. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

5. Baev A.D., Kobylinsky P.A. About some properties of one class of the degenerating pseudo-differential operators. [Baev A.D., Kobylinskiyj P.A. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2015, vol. 460, no. 2, pp. 133–135.

6. Baev A.D.,Rabotinskaya N.I. About some properties of one class of the degenerating pseudo-differential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2017, vol. 477, no. 1, pp. 7–10.

7. Baev A.D. Qualitative methods of the theory of regional tasks for the degenerating elliptic equations. [Baev A.D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. Voronezh, 2008, 240 p.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bahtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Бунеев Сергей Сергеевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений Елецкого государственного университета, Елец, Россия
E-mail: limes88@mail.ru
Тел.: +7(950)808–38–12

Buneev Sergey S., Associate Professor of the Department of differential equations of Elechk State University, Elechk, Russia
E-mail: limes88@mail.ru
Tel.: +7(950)808–38–12

Ковалевский Ростислав Александрович, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Kovalevsky Rostislav A., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: 259608@mail.ru
Тел.: +7(951)554–45–44

Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 259608@mail.ru
Tel.: +7(951)554–45–44