УДК 517.956

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

А. Д. Баев[1], Ж. И. Бахтина[1], С. С. Бунеев[2], Р. А. Ковалевский[1], А. А. Бабайцев[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Елецкий государственный университет*

Поступила в редакцию 12.03.2016 г.

Аннотация. Статья посвящена исследованию разрешимости граничных задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений. Уравнение представляет собой сумму вырождающегося псевдодифференциального оператора с переменным символом, зависящим еще от комплексного параметра, и оператора дифференцирования. Построены регуляризаторы рассматриваемых граничных задач, при достаточно больших значениях параметра доказаны теоремы о существовании и единственности решений. Теоремы о существовании и единственности доказаны в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, вырождающийся псевдодифференциальный оператор, граничная задача, регуляризатор.

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN A HALF-SPACE FOR SOME CLASSES OF DEGENERATE PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS

A. D. Baev, J. I. Bakhtin, S. S. Buneev, R. A. Kowalewski, A. A. Babaitsev

Abstract. The article is devoted to the study of the solvability of boundary value problems in a half-space for a class of degenerate pseudo-differential equations. The equation is the sum of the degenerate pseudodifferential operator with a variable symbol that depends on the complex parameter and the differentiation operator. The regularizers of the considered boundary value problems are constructed, the theorems on the existence and uniqueness of solutions are proved for sufficiently large values of the parameter. The existence and uniqueness theorems are proved in special weight spaces of The S. L. Sobolev type of spaces.

Keywords: degenerate equation, degenerate pseudodifferential operator, boundary value problem, regulator.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к “неклассическим” задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. Вслед за этим появился ряд работ, в которых методами, близкими к методу М. И. Вишика, изучались вырождающиеся уравнения второго порядка. Достаточно полную библиографию этих можно найти в книге О. А. Олейник, Е. В. Радкевича [5]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [6], [7]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [8].

Дальнейшее развитие теории вырождающихся уравнений потребовало исследования теории весовых пространств типа пространств С. Л. Соболева и теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений.

В этой работе доказываются теоремы о существовании решений граничных задач в полупространстве для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих вырождающийся псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и производную первого порядка по переменной y. Формулировка полученных результатов содержится в работе [9].

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [10]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по y символом были изучены в [10], в работах [11]–[12] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$,$t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau$, $\eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(y) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}\,. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(y)\in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j=1,2,\ldots,\ \text{где}\ D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R^n_+)$; $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]\right|^2 d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s\geqslant 0$, $q>1$) состоит из всех функций $v(x,y)\in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_y v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu\in(0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)|\leqslant c<\infty$ при всех $t\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y)\in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1\geqslant 2N-|\sigma|$, где $N\geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1+\frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu}+1,\sigma+1,\sigma+\frac{l}{2}\}$, $l=1,2,\ldots,\sigma$ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}\ldots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $\sigma\in \mathrm{R}^1, p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$, если функция $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,1,2,\ldots$, $l=0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta)|\leqslant c_{jl}(|p|^2+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

Рассмотрим в R^n_+ следующие задачи:

$$\begin{cases} K^{(q)}_-(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\, v(x,t) - \partial_t v(x,t) = F(p,x,t) \\ v(x,t)|_{y=0} = G(x), \end{cases} \tag{8}$$

$$K^{(q)}_+(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\, v(x,t) - \partial_t v(x,t) = F(p,x,t). \tag{9}$$

Наряду с задачами (8), (9) рассмотрим задачи, зависящие не только от комплексного параметраp, но и от вещественного параметра $r_1 > 0$.

$$\begin{cases} K^{(q)}_-(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\, v(x,t) - \partial_t v(x,t) - r_1 v(x,t) = F(p,x,t) \\ v(x,t)|_{t=0} = G(x), \end{cases} \tag{10}$$

$$K^{(q)}_+(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\, v(x,t) - \partial_t v(x,t) + r_1 v(x,t) = F(p,x,t). \tag{11}$$

Здесь $K^{(q)}_\pm(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$. Предположим, что символы $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию.

Условие 2. Функции $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ принадлежат классу $S^q_{\alpha,p}(\Omega)$, $q > 1$ — действительное число, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Причём с некоторой константой $c > 0$, не зависящей от $p \in Q$, $t \in \Omega$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, справедливы оценки

$$\pm Re\lambda_\pm(p,y,\xi,\eta) \geqslant c(|p| + |\xi| + |\eta|)^q$$

при всех $p \in Q$, $t \in \Omega$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие $1'$. Выполнено условие 1 при $\sigma = s + q$, $l = 1,2,\ldots,[\frac{s}{q}]$, где $q > 1$, $s \geqslant 0$ — действительные числа.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_-(p,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда существует правый регуляризатор задачи (8), то есть такой оператор

$$\widehat{R}_1 : H_{s,\alpha,q}(R^n_+) \times H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1}) \to H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$$

что $\widehat{A}_1\widehat{R}_1(F,G) = (F,G) + T_1(F,G)$, где $\widehat{A}_1$ — оператор, порождённый задачей (8) (то есть $\widehat{A}_1 v = (F,G)$), а T_1 — ограниченный оператор из $H_{s,\alpha,q}(R^n_+) \times H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$ в $H_{s+1,\alpha,q}(R^n_+) \times H_{s+\frac{1}{2}q+1}(R^{n-1})$.

При выполнении априорной оценки правый регуляризатор является одновременно и левым регуляризатором.

Теорема 2. Пусть $s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_+(p,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда существует правый регуляризатор задачи (9), то есть такой оператор $\widehat{R}_2 : H_{s,\alpha,q}(R^n_+) \to H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$, что $\widehat{A}_2\widehat{R}_2 F = F + T_2 F$, где $\widehat{A}_2$ — оператор, порожденный задачей (9), а T_2 — ограниченный оператор из $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ в $H_{s+1,\alpha,q}(R^n_+)$.

При выполнении априорной оценки правый регуляризатор является одновременно и левым регуляризатором.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $F(p,x,y) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$,$G(x) \in H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$. Тогда при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число существует единственное решение задачи (10), принадлежащее пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть $F(p,x,y) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$. Тогда при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число существует единственное решение задачи (11), принадлежащее пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$.

Теорема 5. Пусть $s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_-(p,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, \ |\arg p| < \frac{\pi}{2}, \ |p| > p_0 > 0\}$. Пусть $F(p,x,y) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+), G(x) \in H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение задачи (8).

Теорема 6. Пусть $s \geqslant 0$, $q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_+(p,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, \ |\arg p| < \frac{\pi}{2}, \ |p| \geqslant p_0 > 0\}$. Пусть $F(p,x,y) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение задачи (9).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Рассмотрим в R^n_+ задачи вида

$$\widetilde{A}_r^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t) = f(x,t), \tag{12}$$

$$v(x,t)|_{t=0} = 0; \tag{13}$$

$$\widetilde{A}_r^{+,r_1} \ (p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t) = f(x,t), \tag{14}$$

где

$$\widetilde{A}_r^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t) = F_{x\to\xi}[\widetilde{A}_r^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)], \tag{15}$$

операторы $A_r^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определены следующим образом

$$\widetilde{A}_r^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u = \frac{1}{r}\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u + K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u - \partial_t u \pm r_1 u,$$

$$\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t}) = F_{\alpha}^{-1}[\pm(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{r_0} F_{\alpha}[\cdot]].$$

$2r_0 \geqslant q > 1$, r_0 — натуральное число.

Лемма 1.1. Пусть $s \geqslant 0$, $\mu \in [0,1]$, $r = 1,2,\ldots$. $p \in Q = \{p \in C, \ |\arg p| < \frac{\pi}{2}, \ |p| > 0\}$. Пусть выполнено условие $1'$ и функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число, для любой функции $v(x,t) \in \widetilde{H}^{\alpha}_{s+q}(R^n_+)$, справедливо неравенство

$$N_{s+q,r,\mu}v \leqslant c_1 N_{s,r,\mu}\widetilde{A}_{r,\mu}^{+,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v. \tag{16}$$

Если, кроме того, если $v(x,t)|_{t=0} = 0$, то справедлива оценка

$$N_{s+q,r,\mu}v \leqslant c_2 N_{s,r,\mu}\widetilde{A}_{r,\mu}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v, \tag{17}$$

где константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ не зависят от r,p,μ,v.

Здесь

$$\widetilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\widetilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)], \tag{18}$$

$$N_{s,r,\mu}v = \left\{ \int\limits_{R^{n-1}} \widetilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\, F_{x\to\xi}\left[v\,(x,t)\right] d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

где $r = 1,2,\ldots$ и $\mu \in [0,1]$, $\xi \in R^{n-1}$,

$$\widetilde{N}_{s,r,\mu,\xi}u = \{\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}((\frac{1}{r^j})^2 \left\|\partial_t^{l-j}u, |p|\right\|^2_{s+2r_0 j-ql,\alpha,|\xi|} +$$

$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j),\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|})\}^{1/2}.$$

Определение 1.1 Обозначим через $\widehat{H}_s^{\alpha}\left(R_+^n\right)$ пространство функций, для которых конечна норма (19) при $r=1,2,\ldots$ и $\mu\in[0,1]$.

Доказательство леммы 1.1. По построению $\widehat{H}_s^{\alpha}(R_+^n)\subset H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$. Так как $C_0^{\infty}(R_+^n)$ плотно в $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, то $C_0^{\infty}(R_+^n)$ плотно в $\widehat{H}_s^{\alpha}(R_+^n)$. Следовательно, оценки (16) и (17) вытекают из априорных оценок граничных задач в пространствах $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$.

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие $1'$ и функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Пусть$f(x,t)\in\widehat{H}_s^{\alpha}(R_+^n)$ ($s\geqslant 0$ — действительное число). Тогда при $r_1\geqslant r_2$, где $r_2>0$ — достаточно большое число, существует единственное решение задачи (12)–(13) ((14)), принадлежащее $\widehat{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n)$. Для этого решения справедлива априорная оценка (17) ((16)) при $\mu=1$.

При доказательстве теоремы 1.1 мы будем использовать следующую лемму о продолжении по параметру, доказательство которой содержится, например, в работе [13].

Лемма 1.2. Пусть $\widetilde{A}_{\mu}$ — семейство линейных операторов, действующих из банахова пространства H_1' в банахово пространство H_0', с областью определения $D\subset H_1'$, не зависящей от параметра $\mu\in\widetilde{Q}\subset R^n$. Пусть $\|\cdot\|_{1,\mu}'$; $\|\cdot\|_{0,\mu}'$ — нормы в пространствах H_1', H_0' соответственно, зависящие от параметра $\mu\in\widetilde{Q}$, эквивалентные при любых $\mu\in\widetilde{Q}$. Предположим, что выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{1,\mu}'\leqslant c_1\left(\mu\right)\left\|\widetilde{A}_{\mu}u\right\|_{0,\mu}' \tag{20}$$

при всех $\mu\in\widetilde{Q}$, $u\in D$. Пусть также справедлива оценка

$$\left\|\left(\widetilde{A}_{\mu}-\widetilde{A}_{\lambda}\right)u\right\|_{0,\mu}'\leqslant c_2\left(\mu,\lambda\right)\|u\|_{1,\mu}' \tag{21}$$

при всех λ, $\mu\in\widetilde{Q}$, $u\in D$, причем, для любого $\mu\in\widetilde{Q}$ существует число $\widetilde{r}=\widetilde{r}\left(\mu\right)$ такое, что $c_2\left(\mu,\lambda\right)c_1\left(\mu\right)<1$ при всех $\lambda\in\widetilde{Q}$, для которых $|\lambda-\mu|<\widetilde{r}\left(\mu\right)$. Предположим, что при $\mu=\mu_0$ существует ограниченный обратный оператор $\widehat{A}_{\mu_0}^{-1}:\ H_0'\to H_1'$ и для $\mu^*\in\widetilde{Q}$ существует конечная последовательность шаров $U_j=\{\lambda:|\mu_j-\lambda|\leqslant\widetilde{r}\left(\mu_j\right)\}$ с центрами в точках $\mu_j\in\widetilde{Q}$, $j=1,2,\ldots,l$ таких, что $\mu_j\in U_{j-1}$, $\mu^*\in U_l$. Тогда существует ограниченный обратный оператор $\widehat{A}_{\mu^*}^{-1}:\ H_0'\to H_1'$.

Доказательство теоремы 1.1. Для доказательства достаточно проверить, что выполнены условия леммы 1.2. Заметим, что $\widetilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=\mu\widetilde{A}_{r,1}^{\pm,r_1}+(1-\mu)\widetilde{A}_{r,0}^{\pm,r_1}$, где $r=1,2,...$, $\mu\in[0,1]$. Рассмотрим операторы $\widehat{\widetilde{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1}$ определяемые соответственно операторами $\widetilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ $(r=1,2,\ldots,\mu\in[0,1])$ и областями определения $D(\widetilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1})=D^{\pm}\subset\widehat{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n)$, причем

$$D^-=\{v\in\widehat{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n),\ \ v(x,t)|_{t=0}=0\},\quad D^+=\{v\in\widehat{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n),\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\widehat{\widetilde{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=f(x,t),\ f(x,t)\in\widehat{H}_s^{\alpha}(R_+^n). \tag{22}$$

Из леммы 1.1 получим оценку

$$\|v\|_{1,\mu}'\leqslant c_1\left\|\widehat{\widetilde{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1}v\right\|_{0,\mu}', \tag{23}$$

где константа $c_1>0$ не зависит от p, μ, v; $\|v\|'_{1,\mu}=N_{s+q,r,\mu}v$, $\|v\|'_{0,\mu}=N_{s,r,\mu}v$.

Заметим что $\widehat{\widetilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\lambda}-\widehat{\widetilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu}=(\lambda-\mu)K^{(q)}_{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\pm(\mu-\lambda)$.

Из этого равенства вытекает оценка

$$\left\|(\widehat{\widetilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\lambda}-\widehat{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu})v\right\|'_{0,\mu}\leqslant c\left|\lambda-\mu\right|N_{s,r,\mu}\Lambda^{q}_{\pm}(p,D_x,D_{\alpha,t})v\leqslant$$
$$\leqslant\widetilde{c}_1\left|\lambda-\mu\right|N_{s+q,r,\mu}v=\widetilde{c}_1\left|\lambda-\mu\right|\|v\|'_{1,\mu}\,,\tag{24}$$

где постоянная $\widetilde{c}_1>0$ не зависит от r,p,μ,λ,v.

Возьмем $\widetilde{r}=\frac{1}{c_1\widetilde{c}_1}$. Тогда если $|\mu-\lambda|<\widetilde{r}$, то $\widetilde{c}_1c_1\left|\mu-\lambda\right|<1$. Таким образом выполнены все условия леммы 1.2. Кроме того, число шагов, указанных в лемме 1.2 от $\mu=0$ до $\mu=1$ конечно.

Заметим далее, что из результатов работы [14] вытекает существование и единственность решения задачи (22) при $\mu=0$. Значит, в силу леммы 1.2 получим однозначную разрешимость задачи (22) при $\mu=1$, то есть однозначную разрешимость задач (12)- (13) и (14).

Следствие 1.1. При выполнении условий теоремы 1.1 решения задач (12)–(13) и (14) принадлежат пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$.

Это утверждение следует из оценок (16), (17) и неравенства $\|v\|_{s+q,\alpha,q}\leqslant N_{s+q,r,1}v$.

Доказательство теорем 3 и 4. Заметим, что достаточно рассматривать однородное условие при $t=0$. Рассмотрим вначале случай, когда $f(x,t)\in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R^n_+)$. Из теоремы 1.1 следует существование и единственность решения $v_r(x,t)$ задач (12)–(13), для которого справедлива оценка (17) при$\mu=1$.

Покажем, что последовательность $\{v_r(x,t)\}^{+\infty}_{r=1}$ фундаментальна в $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$. Имеем

$$\begin{aligned}0=&\left\|(\widetilde{A}^{-,r_1}_r(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\,v_r-\widetilde{A}^{-,r_1}_r v_l),|p|\right\|_{s,\alpha,q}\geqslant\\ \geqslant&\left\|\widetilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\,(v_r-v_l)\,,|p|\right\|_{s,\alpha,q}-\\ -&\tfrac{1}{r}\left\|\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,D_x,D_{\alpha,t})v_r,|p|\right\|_{s,\alpha,q}-\tfrac{1}{l}\left\|\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,D_x,D_{\alpha,t})v_l,|p|\right\|_{s,\alpha,q},\end{aligned}\tag{25}$$

где $\widetilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=F^{-1}_{\xi\to x}[\widetilde{A}^{-,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]$. Из (25) получим

$$\|(v_r-v_l),|p|\|_{s+q,\alpha,q}\leqslant c\left(\frac{1}{r}\left\|v_r,|p|\right\|_{s+2r_0,\alpha,q}+\frac{1}{l}\left\|v_l,|p|\right\|_{s+2r_0,\alpha,q}\right).\tag{26}$$

Применив в правой части (26) оценку (17) при $\mu=1$ получим

$$\begin{aligned}&\|(v_r-v_l),|p|\|_{s+q,\alpha,q}\leqslant c\left(\tfrac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}f+\tfrac{1}{l}N_{s+2r_0-q,l,1}f\right)\leqslant\\ &\leqslant c_1\left(\tfrac{1}{r}+\tfrac{1}{l}\right)\|f,|p|\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}\,.\end{aligned}\tag{27}$$

Из (27) получим фундаментальность последовательности $\{v_r(x,t)\}$в $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$. Так как пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ полное, то существует такая функция $v(x,t)\in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$, что $v(x,t)=\lim\limits_{r\to+\infty}v_r(x,t)$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$. Докажем, что построенная функция $v(x,t)$ является решением задачи (10) (при $G\equiv0$), если $f(x,t)\in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R^n_+)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет условиям (13). Покажем, что она удовлетворяет уравнению (8). Для этого достаточно показать, что $A^-_rv_r\to A^-v$ в $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$при $r\to+\infty$. С учетом (17) получим неравенство

$$\begin{aligned}&\|(A^-_rv_r-A^-v),|p|\|_{s,\alpha,q}\leqslant\|A^-\left(v_r-v\right),|p|\|_{s,\alpha,q}+\\ &+\tfrac{1}{r}\left\|\Lambda^{2r_0}_{-}(p,D_x,D_{\alpha,t})v_r,|p|\right\|_{s,\alpha,q}\leqslant c\{\|v_r-v,|p|\|_{s+q,\alpha,q}+\tfrac{1}{r}N_{s+2r_0,r,1}v_p\}\leqslant\\ &\leqslant c_1\{\|v_r-v,|p|\|_{s+q,\alpha,q}+\tfrac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}F\}\leqslant\\ &\leqslant c_2\{\|v_r-v,|p|\|_{s+q,\alpha,q}+\tfrac{1}{r}\left\|F,|p|\right\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}\},\end{aligned}\tag{28}$$

где число $c_2 > 0$ не зависит от r.

Так как правая часть неравенства (28) стремится к нулю при $r \to +\infty$, то $A^-(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = F$.

Таким образом, функция $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ является решением задачи (8), (13) при $F(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$. Но так как пространство $H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$ плотно вложено в пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ при $2r_0 \geqslant q$, то существует единственное решение задачи (10) при любой функции $f(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$.

Аналогично доказывается теорема 2.

Доказательство теорем 1 и 2. Заметим, что

$$\widetilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = \widetilde{A}^{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v \pm r_1 v, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\widetilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)],\\ &\widetilde{A}^{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = K_{\pm}^{(q)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v - \partial_t v. \end{aligned} \tag{30}$$

Из теоремы 3 следует, что существует единственное решение задачи (10) при $r_1 \geqslant r_2$, где $r_2 > 0$ — достаточно большое число. Обозначим через $R^-_{r_1}$ — оператор, обратный оператору, порожденному задачей (10).

$$R^-_{r_1}(F,G) = v,\ \ v(x,t)|_{t=0} = G(x). \tag{31}$$

Покажем, что оператор $R^-_{r_1}$ является правым регулятором задачи (8). Из (29) получим

$$\begin{aligned} &\widetilde{A}^-(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)R^-_{r_1}(F,G) = \widetilde{A}^{-,r_1}R^-_{r_1}(F,G) + r_1R^-_{r_1}(F,G) =\\ &= F(x,t) + r_1R^-_{r_1}(F,G), \end{aligned} \tag{32}$$

причем $R^-_{r_1}(F,G)\big|_{t=0} = G(x)$.

Из (32) следует, что построенный оператор R^-_r является правым регулятором задачи (8).

Аналогично доказывается теорема 2.

Аналогично лемме 1.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.3. Пусть $s \geqslant 0$, $\mu \in [0,1]$, $r = 1,2,....p \in Q_{p_0} = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > p_0 > 0\}$.Пусть выполнено условие 1' и функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда существует такое число p_0, что для всех $p \in Q_{p_0}$для любой функции $v(x,t) \in \widetilde{H}^{\alpha}_{s+q}(R_+^n)$, справедливо неравенство

$$N_{s+q,r,\mu}v \leqslant c_1 N_{s,r,\mu}\widetilde{A}^{+,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v. \tag{33}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$N_{s+q,r,\mu}v \leqslant c_2 N_{s,r,\mu}\widetilde{A}^{-,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v, \tag{34}$$

где константы$c_1 > 0$, $c_2 > 0$ не зависят от r,p, μ, v.

$$\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]. \tag{35}$$

Доказательство теорем 5 и 6.

Заметим, что достаточно рассматривать однородное условие при $t = 0$.

Рассмотрим операторы $\widetilde{\widetilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu}$ определяемые соответственно операторами $\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ $(r = 1,2,...,\ \mu \in [0,1])$ и областями определения $D(\widetilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}) = D^{\pm} \subset \widehat{H}^{\alpha}_{s+q}(R_+^n)$, причем

$$D^- = \{v \in \widehat{H}^{\alpha}_{s+q}(R_+^n),\ \ v(x,t)|_{t=0} = 0\},\ \ D^+ = \{v \in \widehat{H}^{\alpha}_{s+q}(R_+^n),\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{\widehat{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t) = f(x,t),\ \ f(x,t) \in \widehat{H}_s^{\alpha}(R_+^n). \tag{36}$$

Из леммы 1.3 получим оценку

$$\|v\|'_{1,\mu} \leqslant c_1 \left\| \widetilde{\widehat{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1} v \right\|'_{0,\mu}, \tag{37}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от p, μ, v;

$$\|v\|'_{1,\mu} = N_{s+q,r,\mu}v, \quad \|v\|'_{0,\mu} = N_{s,r,\mu}v.$$

Заметим, что

$$\widetilde{\widehat{A}}_{r,\lambda}^{\pm,r_1} - \widetilde{\widehat{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1} = (\lambda-\mu)K_{\pm}^{(q)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) \pm (\mu-\lambda).$$

Из этого равенства вытекает оценка

$$\left\|(\widetilde{\widehat{A}}_{r,\lambda}^{\pm,r_1} - \widehat{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1})v\right\|'_{0,\mu} \leqslant c\,|\lambda-\mu|\,N_{s,r,\mu}\Lambda_{\pm}^{q}(p,D_x,D_{\alpha,t})v \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{c}_1\,|\lambda-\mu|\,N_{s+q,r,\mu}v = \widetilde{c}_1\,|\lambda-\mu|\,\|v\|'_{1,\mu}, \tag{38}$$

где постоянная $\widetilde{c}_1 > 0$ не зависит от r,p,μ,λ,v.

Возьмем $\widetilde{r} = \frac{1}{c_1\widetilde{c}_1}$. Тогда если $|\mu-\lambda| < \widetilde{r}$, то $\widetilde{c}_1 c_1 |\mu-\lambda| < 1$. Таким образом выполнены все условия леммы 1.2. Кроме того, число шагов, указанных в лемме 1.2 от $\mu = 0$ до $\mu = 1$ конечно.

Так же, как при доказательстве теоремы 1.1 заметим, что из результатов работы [14] вытекает однозначная разрешимость задач (36) при $\mu = 0$. Значит, в силу леммы 1.2 получим однозначную разрешимость задач (36) при $\mu = 1$, то есть однозначную разрешимость задач (12)- (13) и (14).

При этом решения задач (12) - (13) и (14) принадлежат пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Это утверждение следует из оценок (33), (34) и неравенства $\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant N_{s+q,r,1}v$.

Докажем вначале теорему 5. Рассмотрим вначале случай, когда $f(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$. Выше было доказано существование и единственность решений $v_r(x,t)$ задач (12)-(13) при r=1,2..., для которых справедливы оценки (34) при $\mu = 1$.

Покажем, что последовательность $\{v_r(x,t)\}_{r=1}^{+\infty}$ фундаментальна в$H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \left\|(\widetilde{A}_r^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\,v_r - \widetilde{A}_r^{-,r_1}v_l),|p|\right\|_{s,\alpha,q} \geqslant \\ &\geqslant \left\|\widetilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\,(v_r-v_l)\,,|p|\right\|_{s,\alpha,q} - \\ &-\tfrac{1}{r}\left\|\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,D_x,D_{\alpha,t})v_r,|p|\right\|_{s,\alpha,q} - \tfrac{1}{l}\left\|\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,D_x,D_{\alpha,t})v_l,|p|\right\|_{s,\alpha,q}, \end{aligned} \tag{39}$$

где $\widetilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\widetilde{A}^{-,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]$.

Из (39) получим оценку

$$\|(v_r-v_l),|p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c\left(\frac{1}{r}\|v_r,|p|\|_{s+2r_0,\alpha,q} + \frac{1}{l}\|v_l,|p|\|_{s+2r_0,\alpha,q}\right). \tag{40}$$

Применив в правой части (40) оценку (34) при $\mu = 1$ получим

$$\begin{aligned} &\|(v_r-v_l),|p|\|_{s+q,\alpha,q} \leqslant c\left(\tfrac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}f + \tfrac{1}{l}N_{s+2r_0-q,l,1}f\right) \leqslant \\ &\leqslant c_1\left(\tfrac{1}{r}+\tfrac{1}{l}\right)\|f,|p|\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}. \end{aligned} \tag{41}$$

Из (41) получим фундаментальность последовательности $\{v_r(x,t)\}$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$. Так как пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ — полное, то существует такая функция $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$, что $v(x,t) = \lim\limits_{r\to+\infty} v_r(x,t)$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$. Докажем, что построенная функция $v(x,t)$ является решением задачи (8) (при$G \equiv 0$), если $f(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R^n_+)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет условиям (13). Покажем, что она удовлетворяет уравнению (8). Для этого достаточно показать, что $A^-_r v_r \to A^- v$ в $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ при $r \to +\infty$. С учетом (34) получим неравенство

$$\begin{aligned} &\|(A^-_r v_r - A^- v), |p|\|_{s,\alpha,q} \leqslant \|A^-(v_r - v), |p|\|_{s,\alpha,q} + \\ &+\tfrac{1}{r}\left\|\Lambda^{2r_0}_-(p,D_x,D_{\alpha,t})v_r, |p|\right\|_{s,\alpha,q} \leqslant c\{\|v_r - v, |p|\|_{s+q,\alpha,q} + \tfrac{1}{r}N_{s+2r_0,r,1}v_p\} \leqslant \\ &\leqslant c_1\{\|v_r - v, |p|\|_{s+q,\alpha,q} + \tfrac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}F\} \leqslant \\ &\leqslant c_2\{\|v_r - v, |p|\|_{s+q,\alpha,q} + \tfrac{1}{r}\|F, |p|\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}\}, \end{aligned} \tag{42}$$

где число $c_2 > 0$ не зависит от r, p.

Так как правая часть неравенства (42) стремится к нулю при $r \to +\infty$, то $A^-(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = F$.

Таким образом, функция $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ является решением задачи (8), (13) при $F(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R^n_+)$. Но так как пространство $H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R^n_+)$ плотно вложено в пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ при $2r_0 \geqslant q$, то существует единственное решение задачи (10) при любой функции $f(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$.

Аналогично доказывается теорема 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук СССР. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

3. Михлин, С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

4. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

5. Олейник О. А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник, Е. В. Радкевич // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. — М., 1971. — Вып. Математический анализ. — С. 5–93.

6. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

7. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

8. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

9. Baev, A. D. Boundary Value Problems for a Class of Degenerate Pseudodifferetial Equations / A. D. Baev, R. A. Kovalevskii // Doklady Mathematics. — 2015. — V. 91, № 2. — P. 131–133.

10. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

11. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 477, № 1. — С. 7–10.

12. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

13. Глушко, В. П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В. П. Глушко, Ю. Б. Савченко // Математический анализ. М., 1985. — С. 125–218. — Итоги науки и техники / ВИНИТИ. Т. 23.

14. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. On some cases of degeneracy of elliptic type equations at the boundary of the domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravneniyj ellipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Oleynik O.A. On elliptic type equations degenerating at the boundary of the region. [Oleyjnik O.A. Ob uravneniyax ellipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

3. Mikhlin S.G. Degenerate elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya]. *Vestnik Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the Leningrad State University*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

4. Vishik M.I. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M.I. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1954, vol. 35 (77), iss. 33, pp. 513–568.

5. Oleynik O.A., Radkevich E.V. Second order Equations with non-negative characteristic form. [Oleyjnik O.A., Radkevich E.V. Uravneniya vtorogo poryadka s neotricatel'noyj xarakteristicheskoyj formoyj]. *Itogi nauki i texniki. VINITI, M., 1971, vyp. Matematicheskiyj analiz — Results of science and technology. VINITI, Moscow, 1971, iss. Mathematical analysis*, pp. 5–93.

6. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

7. Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

8. Glushko V.P. Theorems of solvability of boundary value problems for one class of degenerate high-order elliptic equations. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: trudy seminara akad. S.L. Soboleva — Partial differential equations: Works of the Seminar of Academician S.L. Sobolev*, 1978, no. 2, pp. 49–68.

9. Baev A.D., Kovalevskii R.A. Boundary Value Problems for a Class of degenerate pseudodifferetial equations. Doklady Mathematics. , 2015, vol. 91, no. 2, pp. 131–133.

10. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

11. Baev A.D.,Rabotinskaya N.I. About some properties of one class of the degenerating pseudo-differential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2017, vol. 477, no. 1, pp. 7–10.

12. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

13. Glushko V.P., Savchenko Yu.B. Degenerate high-order elliptic equations: spaces, operators, boundary value problems. [Glushko V.P., Savchenko Yu.B. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka: prostranstva, operatory, granichnye zadachi]. *Matematicheskiyj analiz. M., 1985, Itogi nauki i texniki / VINITI. T. 23 — Mathematical analysis. Moscow, 1985. The results of science and technology /VINITI. Vol. 23*, pp. 125–218.

14. Glushko V.P. Theorems of solvability of boundary value problems for one class of degenerate high-order elliptic equations. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: trudy seminara akad. S.L. Soboleva — Partial differential equations: Works of the Seminar of Academician S.L. Sobolev*, 1978, no. 2, pp. 49–68.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бахтина Жанна Игоревна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: ioanna83@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Bahtina Zhanna Igorevna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ioanna83@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Бунеев Сергей Сергеевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений Елецкого государственного университета, Елец, Россия
E-mail: limes88@mail.ru
Тел.: +7(950)808–38–12

Buneev Sergey S., Associate Professor of the Department of differential equations of Elechk State University, Elechk, Russia
E-mail: limes88@mail.ru
Tel.: +7(950)808–38–12

Ковалевский Ростислав Александрович, аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Kovalevsky Rostislav A., graduate student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: rkovalevskiy@yandex.ru

Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: 259608@mail.ru
Тел.: +7(951)554–45–44

Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 259608@mail.ru
Tel.: +7(951)554–45–44