УДК 517.927.25

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА–НИКОДИМА И СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ*

С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 05.05.2016 г.

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель четвертого порядка с негладкими решениями и спектральным параметром при второй производной. Эта задача возникает как необходимое условие минимума функционала энергии сжатого стержня при нелокальном условии на экстремаль. При этом функционал содержит интеграл Стилтьеса. Доказано, что спектр полученной модели состоит только из собственных значений, алгебраическая кратность каждого из которых равна единице. Трудности, которые возникают в следствие потере гладкости у решения, мы преодолеваем используя концепцию Ю. В. Покорного поточечной трактовки дифференциального уравнения. Последняя показала свою эффективность — построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем, не только второго порядка, но четвертого.

Ключевые слова: математическая модель, спектр, собственное значение, алгебраическая кратность.

ON ONE SPECTRAL PROBLEM OF THE FOURTH ORDER WITH RADON-NIKODIM DERIVATIVES AND WITH SPECTRAL PARAMETER AT THE SECOND DERIVATIVE

S. A. Shabrov, N. I. Bugakova, O. M. Ilina

Abstract. In the article the mathematical model of the fourth order with nonsmooth solutions and spectral parameter at the second derivative is considered. This problem arises a necessary condition for the minimum of the energy functional of the compressed rod under the nonlocal extremal condition. The functional contains the Stieltjes integral. It is proved that the spectrum of the obtained model consists only of eigenvalues, the algebraic multiplicity of each of which is equal to one. The difficulties which arise in consequence of the loss of smoothness of solutions, we overcome using the concept Yu. V. Pokorniy pointwise interpretation of the differential equation. The latter has shown its effectiveness — an exact parallel of the classical theory of ordinary differential equations up to oscillatory theorems, not only of the second order, but of the fourth order.

Keywords: mathematical model, spectrum, eigenvalue, algebraic multiplicity.

В работе изучается математическая модель:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = -\lambda u''_{x\sigma}, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 16–11–10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете

которая возникает при нахождении критических нагрузок сжатого стержня, находящегося под воздействием не только внешней сжимающей силы, но и под собственным весом. Кроме того, стержень помещен во внешнюю среду, локальный коэффициент которой dQ, $u(x)$ — отклонение от положения равновесия, λ — критическая сила. Наличие локализованных особенностей внешней среды приведет к потере гладкости у решения. Проблемы, которые возникают в этом случае мы преодолеем, используя концепцию Ю. В. Покорного, показавшей свою эффективность и при анализе математических моделей второго порядка, и при анализе математических моделей четвертого порядка, а также моделей с разрывными решениями.

Уравнение из (1) в точках $\xi \in S(\sigma)$ — множестве точек разрыва функции $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;\ell]$ меру σ, понимается следующим образом

$$\Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) - \Delta r u'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = -\lambda \Delta u'_x,$$

где $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)$ — полный скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ.

Под решением будем (1) мы понимаем всякую функцию, удовлетворяющую граничным условиям, которая после подстановки в уравнение в (1) превращает его в тождество почти всюду (по мере σ). Решение модели (1) мы будем искать в классе непрерывно дифференцируемых на $[0;l]$ функций, квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;l]$, третья производная $(pu''_{xx})'_x(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;l]$.

Коэффициенты $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ удовлетворяют следующим условиям: 1) все они σ-абсолютно непрерывны на $[0;l]$; 2) $p(x)$ не только положительна, но и отделена от нуля, т. е. $\inf\limits_{x\in[0;l]} p(x) > 0$; 3) $Q(x)$ не убывает на $[0;l]$.

Эта задача возникает при минимизации функционала энергии стержня:

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu''^2_{xx}}{2}\,dx + \int_0^l \frac{ru'^2_x}{2}\,dx + \int_0^l \frac{u^2}{2}\,dQ,$$

определенного на множестве E непрерывно дифференцируемых на $[0;l]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0;l]$, удовлетворяющих условиям $u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$, при условии

$$\Phi_1(u) \equiv \int_0^l \frac{u'^2_x}{2}\,dx = 1.$$

В самом деле, составим функционал $\Phi_\lambda(u) = \Phi(u) - \lambda(\Phi_1(u) - 1)$, и применяя к нему классическую схему, мы получим:

$$\int_0^l pu''_{xx}h''_{xx}\,dx + \int_0^l ru'_x h'_x\,dx + \int_0^l uh\,dQ - \lambda \int_0^l u'_x h'_x\,dx = 0 \tag{2}$$

для любой допустимой $h \in E$.

Вводя функцию $\alpha(x) = \int_0^x u\,dQ$, проинтегрировав интеграл $\int_0^l uh\,dQ$ по частям, мы можем переписав (2) в виде

$$\int_0^l pu''_{xx}h''_{xx}\,dx + \int_0^l \beta(x)h'_x\,dx = 0, \tag{3}$$

здесь $\beta(x) = ru'_x(x) - \alpha(x) - \lambda u'_x(x)$.

Проинтегрировав второй интеграл в (3) по частям, будем иметь

$$\int\limits_0^l (pu''_{xx}(x) - \beta^{-1}(x))h''_{xx}\,dx = 0, \tag{4}$$

где $\beta^{(-1)}(x) = \int\limits_0^x \beta(x)\,dx$.

Используя результат из [1, стр. 236], мы придем к тождеству

$$\int\limits_0^l pu''_{xx}(x) - \beta^{-1}(x) \equiv C_1 + C_2 x, \tag{5}$$

при некоторых постоянных C_1 и C_2, которое позволит говорить об абсолютной непрерывности на $[0;l]$ функции $pu''_{xx}(x)$, т. е. (5) допускает дифференцирование по x (вспоминая определения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$):

$$(pu''_{xx})'_x(x) - (ru'_x)(x) + \int\limits_0^x u\,dQ + \lambda u'_x(x) \equiv C_2. \tag{6}$$

В [2] доказано существование такой функции $\sigma(x)$, которая порождает на $[0;l]$ меру, что (6) допускает дифференцирование по мере σ, что приводит к (1).

Будем говорить, что λ_0 является собственным значением (1), если существует нетривиальная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая граничным условиями $u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$, которая после подстановки в (1) превращает уравнение в тождество.

Покажем, что спектр задачи (1) состоит только из собственных значений, алгебраическая кратность каждого равна 1.

Пусть $K(x;s)$ — функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(l) = u'_x(l) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Существование и единственность $K(x;s)$ в классе непрерывных на квадрате $[0;l]\times[0;l]$ функций доказывается теми же рассуждениями, которые проведены в [3]. Тогда задача (1) эквивалентна уравнению

$$u(x) = -\lambda \int\limits_0^l K(x;s)u''(s)\,d\sigma. \tag{8}$$

В силу свойств функции $K(x;s)$ равенство (8) допускает перезапись

$$u(x) = -\lambda \int\limits_0^l K''_{ss}(x;s)u(s)\,ds, \tag{9}$$

которое получается двукратным интегрированием по частям интеграла в правой части (8). Оператор $(Au)(x) = \int\limits_0^l K''_{ss}(x;s)u(s)\,ds$ действует из $C[0;l]$ — пространства непрерывных $[0;l]$ на функций, в $C[0;l]$, причем вполне непрерывно.

Последнее обстоятельство говорит о том, что спектр оператора A состоит только из собственных значений, алгебраическая и геометрическая кратность которых конечна, и единственная точка сгущения которых есть точка нуль.

Покажем, что алгебраическая кратность каждого собственного значения равна единице. Предположим, что это не так. Найдется собственное значение λ_k у которого помимо собственной функции $\varphi_k(x)$ имеется присоединенная функция $\psi(x) \not\equiv 0$. Тогда функция $\psi(x)$ является решением следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} Lu \equiv -\lambda_k u''_{x\sigma}(x) + \varphi_k(x), \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(l) = u'(l) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Подставим функцию $\psi(x)$ в уравнение (10), полученное тождество умножим на $\psi_k(x)$, и проинтегрировав от 0 до l по мере σ, будем иметь:

$$\int_0^l (L\psi)(x)\varphi_k(x)\,d\sigma = -\lambda_k \int_0^l \psi''_{x\sigma}(x)\varphi_k(x)\,d\sigma + \int_0^l \varphi_k^2(x)\,d\sigma. \tag{11}$$

Разбивая интеграл $\int_0^l (L\psi)(x)\varphi_k(x)\,d\sigma$ на три $\int_0^l (p\psi''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k\,d\sigma$, $\int_0^l (r\psi'_x)'_\sigma\varphi_k\,d\sigma$, $\int_0^l \psi\varphi Q'_\sigma\,d\sigma$, и проинтегрировав первый из них четыре раза, а второй два раза по частям, в силу того, что $\psi(x)$ должна удовлетворять граничным условиям, получим, что равенство (11) получает следующий вид:

$$\int_0^l \psi(x)(L\varphi_k(x))\,d\sigma = -\lambda_k \int_0^l \psi(x)\varphi_k(x)\,d\sigma + \int_0^l \varphi_k^2(x)\,d\sigma, \tag{12}$$

а так как $\varphi_k(x)$ собственная функция, то из равенства (12) вытекает, что $\int_0^l \varphi_k^2(x)\,d\sigma = 0$ отсюда мы находим, что $\varphi_k(x) = 0$ почти всюду в смысле σ-меры, что вместе с непрерывностью $\varphi(x)$ нам дает равенство нулю функции $\varphi(x)$. Последнее противоречит тому, что $\varphi_k(x)$ собственная функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

2. Шабров, С. А. О μ-регуляризации функции с конечным изменением / С. А. Шабров // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — 1999. — С. 166–169.

3. Тимашова, Е. В. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 2–1. — С. 3–8.

4. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

REFERENCES

1. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

2. Shabrov S.A. On the μ–regularization of a function with finite variation. [Shabrov S.A. O μ-regulyarizacii funkcii s konechnym izmeneniem]. *Sbornik statej aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta VGU — The collection of articles of students and postgraduates of mathematical faculty of VSU*, 1999, pp. 166–169.

3. Ivannikova T.A., Timashova E.V, Shabrov S.A. On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval. [Ivannikova T.A., Timashova E.V., Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa i nulevym koe'fficientom pri starshej proizvodnoj na chasti intervala]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, no. 2–1, pp. 3–8.

4. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

Шабров Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90

Бугакова Надежда Игоревна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru

Bugakova Nadezhda Igorevna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru

Ильина Ольга Михайловна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru

Ilina Olga Mikhailovna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: golovko_nadezhda46@mail.ru