УДК 519.65

СЛАБО ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

Т. Ю. Урывская, Л. В. Бутова, А. С. Чеботарев

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»

Поступила в редакцию 23.06.2016 г.

Аннотация. В статье исследовано уравнение теплопередачи с переменными коэффициентами и нелинейной функцией управления. Для систем с распределенными параметрами, используя принцип максимума, найдено оптимальное управление, сформулированы условия оптимальности этого управления (которое является решением нелинейного интегрального уравнения), разработан алгоритм вычисления приближенного решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказана единственность решения основной задачи и найдены условия для единственности решения сопряженной краевой задачи. Приведенный алгоритм решения проиллюстрирован на примере минимизации квадратичного функционала с разрывной функцией. Построено численное решение с заданной точностью и доказаны условия сходимости.

Ключевые слова: нелинейное управление, уравнение теплопроводности, разрывная функция, квадратичный функционал, максимум функции.

WEAK SOLUTIONS SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION PROBLEM BY MINIMIZING A QUADRATIC WITH DISCRETE STATE

T. Y. Uryvskaya, L. V. Butova, A. S. Chebotarev

Abstract. This paper investigates the heat transfer equation with variable coefficients and the nonlinear control function. For systems with distributed parameters, using the maximum principle, the optimal control is found, the optimality conditions of this control (which is the solution of the nonlinear integral equation) are formulated, an algorithm for calculating the approximate solution of the initial boundary value problem for the heat equation is developed. The uniqueness of the solution of the main problem is proved and the conditions for the uniqueness of the solution of the conjugate boundary value problem are found. The solution algorithm is illustrated by the example of minimizing the quadratic functional with discontinuous function. A numerical solution with a given accuracy is constructed and convergence conditions are proved.

Keywords: weak solution, nonlinear integral equation, differential inequalities, optimal control, diffusion processes.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема повышения надежности и продления срока службы различных узлов и деталей агрегатов, на сегодняшний день, является актуальной задачей. Создание энергетических либо же газотурбинных установок, перспективное развитие авиационно-космической техники и ядерных технологий зависит от уровня температуры и нагрева рабочих процессов, а также увеличения давления. Это, в свою очередь, обеспечивает более эффективное использование и увеличение удельной мощности энергетических установок, увеличение удельной тяги и уменьшение удельного расхода топлива и двигателей, когда затрат энергии приемлемы, а расходы охладителя в системах охлаждения и тепловой защиты стенок проточных частей уменьшаются. Как правило, для решения задач оптимизации с системами с распределенными параметрами в классических областях методы решения таких задач основаны на исследовании линейно-квадратичных задач, в которых есть уравнение управляемого процесса. Оно содержит линейную функцию управления, при этом минимизируется интегральный квадратичный функционал. Для таких задач получены необходимые и достаточные условия оптимальности управления и разработаны методы решения линейно-квадратичных задач [1]. Исследовались задачи по оптимальному восстановлению решения задачи теплопроводности [2], отыскание управления через сопряженную задачу с использование разностных схем [3]. В [4] получены алгоритм отыскания оптимального управление в задаче теплопроводности с сосредоточенными параметрами. Нелинейные задачи оптимизации из-за сложности их исследования и недостаточной разработанности методов их решения относятся к малоизученной области теории оптимального управления (в [5] функция управления линеаризируется, т. е. решается задача с линейным управлением). Следовательно, исследование вопросов разрешимости нелинейных задач оптимизации и разработка конструктивных методов их решения на сегодняшний день продолжает являться практически самой главной задачей теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Приведем математическое описание задачи теплопроводности с управлением, которое описывается скалярной функцией $V(t,x)$ в уравнении:

$$V_t = V_{xx} + a(t)V^3 + g\,(x)\, f\,[t, u\,(t)]\,, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

соответствует начальному

$$V\,(0,x) = \psi\,(x)\,, \quad 0 < x < 1 \tag{2}$$

и граничным

$$\begin{aligned} &V_x(t,0) = 0, \\ &V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \quad \alpha > 0,\, 0 < t \leqslant T, \end{aligned} \tag{3}$$

условиям, где функция $a(t) \in H(0,T)$ — это разрывная функция первого рода, $g(x) \in H(0,1)$, $\psi(x) \in H(0,1)$, $f[t,u(t)] \in H(0,T)$ — заданы. Нелинейная зависимость функции внешнего воздействия от функции управления будет внутри функции $f[t,u(t)]$, где управление $u(t) \in H(0,T)$, H – гильбертово пространство, T фиксировано.

Замечание: Ниже рассматривается частный случай: в качестве пространства H используется пространство l_2 суммируемых с квадратом функций (используется интеграл Лебега), что не умаляет общности представляемого подхода для других пространств H. При этом будем предполагать известной систему собственных функций соответствующей эллиптической части уравнения переноса тепла. Такая система образует базис в упомянутом пространстве.

Определение 1. Назовем функцию $V\,(t,x) \in H\,(Q)$, ($Q = (0,1) \times (0,T)$ — область плоскости xOt) удовлетворяющую при каждом фиксированном управлении $u\,(t) \in H\,(0,\ T)$ нелинейному интегральному уравнению

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n e^{-\int_0^T(\lambda_n-a(\tau))d\tau}+\int\limits_0^t e^{-\int_0^T(\lambda_n-a(\tau))d\tau}\int\limits_0^1 V^3(\tau,\xi)\,z_n(\xi)\,d\xi d\tau+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^t g_n e^{-\lambda_n(t-\tau)}f[\tau,u(\tau)]\,d\tau\right]z_n(x)\,, \quad (4)$$

слабо обобщенным решением начально-краевой задачи (1)–(3).

Встает вопрос о существовании единственного обобщенного решения нелинейного интегрального уравнения (4), который легко решается, при помощи следующей теоремы:

Теорема 1. Пусть функция $V^3(t,x)$ при любом $V(t,x)\in H(Q)$ также принадлежит пространству $H(Q)$ и удовлетворяет условию

$$\varphi_0=\sup_{(t,x)\in Q}(3V^2(t,x))\neq 0. \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) имеет единственное решение в пространстве $H(Q)$ при условии:

$$\lambda_0 T\varphi_0<1 \quad (6)$$

Доказательство этой теоремы строится на нескольких очевидных утверждениях:

1. Функция

$$h(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n e^{-\int_0^T(\lambda_n-a(\tau))d\tau}\right]z_n(x) \quad (7)$$

есть элемент пространства $H(Q)$.

2. Если скалярная функция $V^3(t,x)$ такова, что при любом $V(t,x)\in H(Q)$ она является элементом пространства $H(Q)$, то оператор $K_0[V]$, который определяется соотношением

$$K_0[V(t,x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t e^{-\int_0^T(\lambda_n-a(\tau))d\tau}\int\limits_Q V^3(\tau,\xi)\;z_n(\xi)\,d\xi d\tau\,z_n(x) \quad (8)$$

отображает пространство $H(Q)$ в себя.

3. Если $f(t,u(t))$ функция, которая при любом фиксированном управлении $u(t)\in H(0,T)$, является элементом пространства $H(0,T)$, то оператор $F[t,x,u(t)]$, определяемый соотношением

$$F[t,x,u(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t e^{\int_0^t(-\lambda_n+a(\tau))d\tau}g_n f[\tau,u(\tau)]\,d\tau\,z_n(x)\,. \quad (9)$$

отображает пространство $H(0,T)$ в пространство $H(Q)$.

Согласно этим утверждениям, интегральное уравнение (4) можно записать в операторной форме

$$V=K[V], \quad (10)$$

и оператор $K[V]=h+K_0[V]+F$ в силу утверждений 1–3 при любом фиксированном $u(t)\in H(0,T)$ отображает пространство $H(Q)$ в себя.

Для минимизации квадратичного функционала методом последовательных приближений, найдем решение уравнения (10) согласно [9]

$$V_i(t,x)=K[V_{i-1}(t,x)]\,,\quad i=1,2,3,\ldots$$

За нулевое приближение $V_0(t,x)$ выберем произвольный элемент пространства $H\left(Q\right)$. При этом приближенное решение $V_i\left(t,x\right)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|V\left(t,x\right)-V_i\left(t,x\right)\right\|_{H(Q)}\leqslant\frac{\left(T\lambda_0\varphi_0\right)^n}{1-T\lambda_0\varphi_0}\left\|K\left[V_0\right]-V_0\right\|_{H(Q)}. \quad (11)$$

Замечание. Условие взаимно однозначного соответствия между элементами пространства управлений $H\left(0,T\right)$ и пространства состояний $H\left(Q\right)$ будет выполняться лишь в случае, когда

$$\frac{\partial f\left[t,u\right]}{\partial u}\neq 0,\quad t\in\left[0,T\right]. \quad (12)$$

Следовательно, отображение $u\left(t\right)\to V\left(t,x\right)$ является однозначным лишь при выполнении условий (9) и (11).

Обозначим

$$V_i^k\left(t,x\right)=\sum_{n=1}^{k}\left[\psi_n e^{-\int_0^T(\lambda_n-a(\tau))d\tau}+\int_0^t e^{-\int_0^T(\lambda_n-a(\tau))d\tau}\int_0^1 V^3\left(\tau,\xi\right)z_n\left(\xi\right)d\xi d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_0^t g_n e^{-\lambda_n(t-\tau)}f\left[\tau,u\left(\tau\right)\right]d\tau\right]z_n\left(x\right),$$

Тогда полученные V_i^k — приближение можно оценить по формуле:

$$\left\|V\left(t,x\right)-V_i^k\left(t,x\right)\right\|_{H(Q)}\leqslant\left\|V\left(t,x\right)-V_i\left(t,x\right)\right\|_{H(Q)}+\left\|V_i\left(t,x\right)-V_i^k\left(t,x\right)\right\|_{H(Q)}. \quad (13)$$

Рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала. В краевой задаче (1)–(3): необходимо отыскать допустимую пару функций $\left(u^0\left(t\right),V^0\left(t,x\right)\in H\left(0,T\right)\times H\left(Q\right)\right)$, при которой функционал

$$J[u\left(t\right)]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T u^2(t)dt. \quad (14)$$

принимает наименьшее возможное значение, $\xi(x)\in H(0,1)$ — заданная функция.

Определение 2. Пусть $u^0(t)$ — оптимальное управление, а $V^0(t,x)$ — оптимальный процесс. Тогда допустимая пара $(u^0(t),V^0(t,x))\in H(0,T)\times H(Q)$, на которой функционал (14) достигает минимального значения, называется оптимальной допустимой парой. Для систем с распределенными параметрами, используя принцип максимума найдем оптимальное управление $u^0(t)$

$$\int_0^1 g(x)\omega(t,x)dx\,\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}=2\beta u(t), \quad (15)$$

$$f_{uu}[t,u(t)]\int_0^1 g(x)\omega(t,x)dx-2\beta<0. \quad (16)$$

Эти условия называются условиями оптимальности, а функция $\omega(t,x)$ есть решение сопряженной краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть функция $f(t,u)$ имеет первые и вторые частные производные. Чтобы допустимая пара $\left(u\left(t\right),V\left(t,x\right)\right)\in H\left(0,T\right)\times H\left(Q\right)$, где $H\left(0,T\right)\times H\left(Q\right)$ — декартово произведение пространств, являлась оптимальной необходимо, чтобы функция*

$$\Pi\left[t,x,V\left(t,x\right),\omega\left(t,x\right),u\left(t\right)\right]=\int_Q g\left(x\right)\omega\left(t,x\right)dx\;f\left[t,u\left(t\right)\right]$$

где $\omega\,(t,x)$ *обобщенное решение краевой задачи:*

$$\omega_t+\omega_{xx}+3V^2\omega=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{*}$$

$$\omega\,(T,x)+2\,[V(T,x)-\xi(x)]=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{**}$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{***}$$

удовлетворяло почти всюду на $[0,T]$ *соотношению*

$$\Pi[t,x,V^0(t,x),\omega(t,x),u^0(t)]=\sup_{u\in D}[t,x,V^0(t,x),\omega(t,x),u],$$

где D *является открытым множеством допустимых значений* u, Π — *функция Потрягина.*

Из выше приведенных соотношений, получаем следующее:

$$\int\limits_Q g(x)\omega(t,x)dx\ \frac{\partial f(t,u)}{\partial u}-2\beta\mathrm{sign}(u(t))=0, \tag{17}$$

$$\int\limits_Q g(x)\omega(t,x)dx\ \frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial u^2}<0, \tag{18}$$

Данные соотношения выполняются только на оптимальном управлении $u^0(t)$

$$2\beta\mathrm{sign}(u(t))\left(\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\right)^{-1}=\int\limits_Q g(x)\omega(t,x)dx.$$

Таким образом, показан алгоритм нахождения оптимального управления $u^0(t)$ из системы соотношений (18) и (17), которые называются условиями оптимальности.

Рассмотрим краевую задачу (*)–(***), сопряженную с краевой задачей (1)-(3).

Определение 3. Любая функция $\omega(t,x)\in H\,(Q)$, удовлетворяющая при каждой допустимой паре $(u(t),V(t,x))\in H(0,T)\times H(Q)$, линейному интегральному уравнению

$$\begin{gathered}\omega(t,x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)}3\int\limits_0^1 V^2(\tau,\xi)\omega(\tau,\xi)z_n\,(\xi)\,d\xi d\tau\ z_n\,(x)-\\ -\sum_{n=1}^{\infty}\left(3e^{-\lambda_n(T-t)}\int\limits_0^1 V^2(T,\xi)z_n\,(\xi)\,d\xi\right)z_n\,(x)\,,\end{gathered} \tag{19}$$

является слабо обобщенным решением сопряженной краевой задачи (*)–(***).

Для исследования задачи однозначной разрешимости линейного интегрального уравнения (19) воспользуемся следующими утверждениями.

Лемма 1. Функция

$$y_1\,(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}3e^{-\lambda_n(T-t)}\int\limits_0^1 V^2(T,\xi)z_n\,(\xi)\,d\xi\ z_n\,(x) \tag{20}$$

является элементом пространства $H\,(Q)$.

Лемма 2. Оператор $G_0\,[t,x,\omega\,(t,x)]$, действующий по формуле

$$G_0\,[t,x,\omega\,(t,x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^T 3e^{-\lambda_n(\tau-T)}\int\limits_0^1 V^2(\tau,\xi)\,\omega\,(\tau,\xi)\,z_n\,(\xi)\,d\xi d\tau z_n\,(x) \tag{21}$$

отображает пространство $H\,(Q)$ в себя.

Запишем интегральное уравнение (19), используя соотношения (20) и (21), в операторной форме:

$$\omega = G\,[\omega]\,, \tag{22}$$

где оператор

$$G\,[\omega] = G_0\,[\omega] - y_1, \tag{23}$$

в силу лемм (11) — (12), также отображает пространство $H\,(Q)$ в себя.

Теорема 3. *Операторное уравнение* (14) *при выполнении условий* (20) *и* (21) *имеет единственное решение в пространстве* $H\,(Q)$.

Как и с краевой задачей, отыскание решения сопряженной краевой задачи может быть найдено методом последовательных приближений [8].

$$\omega_i\,(t,x) = G\,[\omega_{i-1}\,(t,x)]\,,\quad i = 1,2,3,\ldots,$$

где $\omega_0\,(t,x)$ является произвольным элементом пространства $H\,(Q)$. Это приближенное решение удовлетворяет оценке:

$$\|\omega\,(t,x) - \omega_i\,(t,x)\|_{H(Q)} \leqslant \frac{(T\lambda_0\varphi_0)^i}{1 - T\lambda_0\varphi_0}\,\|G\,[\omega_0] - \omega_0\|_{H(Q)}\,, \tag{24}$$

а условия оптимальности будут следующие:

$$2\beta\,u(t)\left(\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\right)^{-1} = \int\limits_0^1 g(x)\omega(t,x)dx, \tag{25}$$

$$f_u[t,u(t)](u(t)f_u^{-1}[t,u(t)])_u > 0. \tag{26}$$

Сформулируем алгоритм вычисления приближенного решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Начнем с отыскания оптимального управления, которое сведется к решению нелинейного интегрального уравнения

$$\beta\mathrm{sign}(u(t))\left(\frac{\partial f(t,u(t))}{\partial t}\right)^{-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} 3g_n\int\limits_t^T e^{-\lambda_n(\tau-t)}\int\limits_0^1 V^2\,(\tau,\xi)\,\omega\,(\tau,\xi)\,z_n\,(\xi)\,d\xi d\tau -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-\lambda_n(T-t)}g_n\int\limits_0^1 [V\,(T,\xi) - \eta(\xi)]\,z_n\,(\xi)\,d\xi, \tag{27}$$

где

$$V\,(t,x) = R\,(t,x,f\,[t,u\,(t)])\,.$$

Как показано в [7] нелинейное интегральное уравнение (27) решается следующим образом:

1. Положим

$$\beta\mathrm{sign}(u(t))\left(\frac{\partial f\,[t,u]}{\partial u}\right)^{-1} = B\,(t,f\,[t,(u\,(t))])\,,$$

при этом оператор $B\,[\cdot]$ имеет сложную структуру.

2. Для исследования уравнения (27) необходимо произвести ряд преобразований: положим

$$\beta\mathrm{sign}(u(t))\left(\frac{\partial f\,[t,u\,(t)]}{\partial u}\right)^{-1} = \theta\,(t) \tag{28}$$

3. В силу условий оптимальности (25)–(26) равенство (28) однозначно разрешается относительно управления $u\,(t)$ и существует функция $\mu[t,\theta(t)]$ такая, что

$$u\,(t)=\mu\,[t,\theta\,(t)] \tag{29}$$

4. Используя равенства (28), (29), уравнение (27) преобразуется к виду

$$\theta\,(t)=B\,(t,f\,[t,\mu\,[t,\theta\,(t)]])\,, \tag{30}$$

Оно может быть исследовано методами нелинейного анализа [6]. Таким образом, при исследовании нелинейной задач оптимального управления уравнения теплопроводности, описываемыми полулинейными гиперболическими уравнениями, возникает задача в теории нелинейных интегральных уравнений, при этом, она является достаточно новой и мало исследованной.

3. ПРИМЕР

В описанной выше краевой задаче примем следующие значения функций:

$$V_t \;=\; V_{xx}+a(t)V^3+\frac{x^2}{2}\ln u,\quad 0<x<1,\ 0<t<1, \tag{31}$$

$$V(0,x)=x,\quad 0<x<1, \tag{32}$$

$$V_x(t,0)=0,\quad V_x(t,1)+0.5V(t,1)=0,\quad 0<t\leqslant 1. \tag{33}$$

где функция

$$a(t)\,\in\,H(0,T)=\begin{cases} t,\ 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ t-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{34}$$

Ставится задача о минимизации функционала:

$$I[u^0(t)]=\int\limits_0^1[V^0(T,x)-x]^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(u^0(t)\right)^2dt.$$

Как было показано выше, необходимо вычислить f_u:

$$f_u=\frac{1}{u(t)},\quad f_u^{-1}=u(t),\quad \left(\frac{u}{f_u}\right)_u=2u(t),$$

$$f_u[t,u(t)]\cdot\left(\frac{u}{f_u[t,u(t)]}\right)_u=\frac{2u(t)}{u(t)}=2.$$

Подставляя в условия оптимальности, получаем:

$$f_u[t,u(t)]\cdot\left(\frac{u(t)}{f_u[t,u(t)]}\right)_u=2>0,\ (\max).$$

Пусть $u(t)$ задано в пределах: $a_0\leqslant u(t)\leqslant a_1$, где $a_0=\frac{1}{2}$, $a_1=2$. Тогда согласно формуле (28)

$$\beta u(t)f_u^{-1}[t,u(t)]=\theta(t),\quad \beta u^2(t)=\theta(t).$$

Откуда получаем:

$$\varphi(t,\theta(t),\beta)=\sqrt{\frac{\theta(t)}{\beta}}. \tag{35}$$

Вычислим пределы $\theta(t)$:

$$a_0 \leqslant \varphi(t, \theta(t), \beta) \leqslant a_1, \quad a_0 \leqslant \sqrt{\frac{\theta(t)}{\beta}} \leqslant a_1,$$

$$\beta a_0^2 \leqslant \theta(t) \leqslant \beta a_1^2. \tag{36}$$

Мы получили нелинейное интегральное уравнение:

$$\theta(t) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) \int\limits_0^T G_i(\tau) \ln \sqrt{\frac{|\theta(t)|}{\beta}} d\tau = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) h_i$$

которое в операторной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\theta_n(t) = K\left[\theta_{n-1}(t)\right].$$

Выберем нулевое приближение:

$$\theta_0(t) = \sum_{i=1}^{k} G_i(t) h_i. \tag{37}$$

Тогда первое приближение: $\theta_1(t) = K[\theta_0(t)]$. Встает вопрос об оценки разницы между $\theta_0(t)$ и $K[\theta_0(t)]$:

$$\|K[\theta_0(t)] - \theta_0(t)\|_H \leqslant \lambda_0 T \|g(x)\|_H^2 \|f(\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta))\|_H,$$

где

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{2\int_t^T [-\lambda_i^2 + a(\eta)] d\eta} = \\
&= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{2(\int_0^{1/2} [-\lambda_i^2 + \eta] d\eta + \int_{1/2}^T [-\lambda_i^2 + \eta - \frac{1}{2}] d\eta)} = \\
&= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{2((-\lambda_i^2 t + \frac{t^2}{2})_0^{\frac{1}{2}} - (\lambda_i^2 + \frac{1}{2}) t + \frac{t^2}{2})_{\frac{1}{2}}^T} = \\
&= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{2(-\lambda_i^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - (\lambda_i^2 + \frac{1}{2})(T - \frac{1}{2}) + \frac{T^2}{2} - \frac{1}{8})} = \\
&= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{2(-\lambda_i^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - (\lambda_i^2 + \frac{1}{2})(T - \frac{1}{2}) + \frac{T^2}{2} - \frac{1}{8})} = e^0 = 1,
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\|g(x)\|_H^2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{5}.$$

Оценим $\|f(t, u(t))\|_H^2$:

$$\|f(t, u(t))\|_H^2 = \int\limits_0^T f^2(t, u(t)) dt = \int\limits_0^T (\ln|u(t)|)^2 dt \leqslant \ln^2 2 \cdot T.$$

$$\|f(t, u(t))\|_H^2 \leqslant \ln 2 \cdot \sqrt{T}. \tag{39}$$

Или

$$A_\gamma = \|K[\theta_0(t)] - \theta_0(t)\|_H \leqslant \lambda_0 T \|g(x)\|_H^2 \ln 2 \cdot \sqrt{T} = 0,03466.$$

Для того, чтобы оператор $K[\cdot]$ был сжимающим, необходимо выполнение условия:

$$\gamma = T f_0 \lambda_0 \varphi_0(\beta) ||g(x)||_H^2 < 1.$$

Произведем необходимые вычисления для проверки выполнения данного условия:

1)
$$f(t,u(t)) - f(t,\overline{u}(t)) = f'(t,\eta)\,|u(t) - \overline{u}(t)|\,.$$
$$f'(t,u(t)) = \left|\frac{1}{u(t)}\right|.$$
$$\|f(t,u(t)) - f(t,\overline{u}(t))\|_H \leqslant \left|\frac{1}{u(t)}\right| \cdot \|u(t) - \overline{u}(t)\|_H\,.$$

отсюда
$$f_0 \leqslant \left|\frac{1}{u(t)}\right| \leqslant \frac{1}{a_0} = 2. \tag{40}$$

2)
$$\varphi(t,\theta(t),\beta) - \varphi(t,\overline{\theta}(t),\beta) = \varphi'(t,\eta,\beta)\left|\theta(t) - \overline{\theta}(t)\right|.$$
$$\varphi'(t,\theta(t),\beta) = \left(\sqrt{\frac{|\theta(t)|}{\beta}}\right)' = \sqrt{\frac{\beta}{\theta(t)}}\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2\sqrt{\beta\theta(t)}}.$$
$$\left\|\varphi(t,\theta(t),\beta) - \varphi(t,\overline{\theta}(t),\beta)\right\|_H \leqslant \frac{1}{|\theta(t)|} \cdot \left\|\theta(t) - \overline{\theta}(t)\right\|_H\,.$$

откуда
$$\varphi_0 = \frac{1}{2\sqrt{\beta\theta(t)}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 a_0^2}} = \frac{1}{2\beta a_0} = 2. \tag{41}$$

3) Вычислим γ :
$$\gamma = T f_0 \lambda_0 \varphi_0(\beta)\,\|g(x)\|_H^2 = 0,2. \tag{42}$$

Условие теоремы для единственности решения нелинейного интегрального уравнения выполнено $\gamma < 1$. Получаем формулу для оценки точного и n-го приближенное решения нелинейного интегрального уравнения:

$$\left\|\bar{\theta}(t) - \theta_n(t)\right\|_H \leqslant \frac{0{,}2^n}{0{,}8} 0{,}03466, \tag{43}$$

в которой, задавая различную точность ε, находим необходимое число n:

$$\frac{\gamma^n}{1-\gamma}A_\gamma \leqslant \varepsilon, \quad \gamma^n \leqslant \frac{\varepsilon(1-\gamma)}{A_\gamma},$$

т.к. $\gamma \leqslant 1$, то
$$n > \log_{0,2}\frac{0{,}8\varepsilon}{0{,}03466}. \tag{44}$$

В зависимости от заданной точности, выбирается n. Например, заданная точность $\varepsilon = 0{,}01$ достигается уже при $n = 1$, а точность 0,00001 — при $n = 6$.

Путем несложных выкладок получаем формулы для решения нелинейного интегрального уравнения и его приближений:

$$\left\|\theta_n(t) - \theta_n^k(t)\right\|_H \leqslant (A_k + B_k)\,\frac{1}{1-\gamma} + \gamma^n A_k,$$

где
$$A_k \leqslant 2\sqrt{\lambda_0\lambda_m T}\left(c\frac{k+1}{\pi^2 k^2}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{\pi^2 k^2}\right)^2,$$

$$c = \sqrt{\frac{2(\alpha^2+\lambda_i^2)}{\alpha^2+\lambda_i^2+\alpha\lambda_i}} \xrightarrow[\lambda_n\to\infty]{} \sqrt{2};$$

$$B_k \leqslant \sqrt{\lambda_0 T}\left(c^*\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)\|f(t,\varphi(t,\theta_{n-1},\beta))\|_H = \ln 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{k+1}{\pi^2k^2}.$$

$$\left\|\theta_n(t)-\theta_n^k(t)\right\|_H \leqslant \left(\left(\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)^2+\ln 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)\frac{1}{1-\gamma}+\gamma^n\left(\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)^2. \qquad (45)$$

Суммируя (43) и (45), получаем общую оценку сходимости (n,k)-го приближения к точному решению нелинейного интегрального уравнения:

$$\left\|\bar{\theta}(t)-\theta_n^k(t)\right\|_H \leqslant \frac{0{,}2^n}{0{,}8}0{,}03466+\left(\left(\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)^2+\ln 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)\frac{1}{0{,}8}+0{,}2^n\left(\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)^2.$$

Для сходимости оптимального управления:

$$\left\|u^0(t)-u_n^k(t)\right\|_H \leqslant \frac{0{,}2^n}{11}+2\left(\left(\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)^2+\ln 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{k+1}{\pi^2k^2}+2\cdot 0{,}2^n\left(\frac{k+1}{\pi^2k^2}\right)^2\right).$$

Для сходимости оптимального процесса:

$$\left\|V^0(t,x)-V_n^k(t,x)\right\|_H \leqslant \sqrt{0{,}1}\cdot\left\|u^0(t)-u_n(t)\right\|_H\sqrt{2}\frac{k+1}{\pi^2k^2}+\sqrt{0{,}1}\left\|u_n(t)-u_n^k(t)\right\|_H+\sqrt{2}\frac{k+1}{\pi^2k^2}.$$

Для сходимости минимального значения функционала:

$$\left|I[u^0]-I[u_n^k]\right| \leqslant N_1\left\|V^0(T,x)-V_n(T,x)\right\|_H+\beta T\left\|u^0(t)-u_n(t)\right\|_H+$$

$$+N_2\left\|V_n(T,x)-V_n^k(T,x)\right\|_H+\beta T\left\|u_n(t)-u_n^k(t)\right\|_H,$$

где

$$N_1 = \left\|V^0(T,x)\right\|_H+\|V_n(T,x)\|_H+\|\xi(x)\|_H \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\lambda_0 T}\Big[\|\psi(x)\|_H+\|g(x)\|_H\|f(t,u(t))\|_H\Big]+\|\xi(x)\|_H = 2\,[1+0{,}05\ln 2]+\frac{1}{3} = \ln\left(e^{8/3}2^{0{,}1}\right)$$

$$N_2 = \left\|V_n^k(T,x)\right\|_H+\|V_n(T,x)\|_H+\|\xi(x)\|_H \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{\lambda_0 T}\Big[\|\psi(x)\|_H+\|g(x)\|_H\|f(t,u(t))\|_H\Big]+\|\xi(x)\|_H = 2\,[1+0{,}05\ln 2]+\frac{1}{3} = \ln\left(e^{8/3}2^{0{,}1}\right)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение нелинейного интегрального уравнения, которое получается при исследовании приведенной выше задачи теплопроводности представляет собой практический интерес, так как данные уравнения возникают при решении прикладных задач. Развитие численных методов в последнее время позволяет разрешать задачи, подобного рода, при этом необходимость доказывать сходимость такого численного решения можно проделать так, как показано в предыдущем пункте статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Провоторов, В. В. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе / В. В. Провоторов, А. С. Волкова. — Воронеж : Научная книга, 2014. — 188 с.

2. Введенская, Е. В. Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени / Е. В. Введенская // Владикавказский математический журнал. — 2006. — Т. 8, № 1. — С. 16–21.

3. Лелевкина, Л. Г. Оптимальное управление процессом теплопроводности / Л. Г. Лелевкина, С. Н. Скляр, О. С. Хлыбов // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 4. — С. 119–133.

4. Кузьменков, Д. С. Оптимальное управление тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах / Д. С. Кузьменков // ПФМТ. — 2012. — № 2. — С. 81–87.

5. Барановский, Е. С. Об оптимальных задачах для систем параболического типа с асферичными множествами допустимых управлений / Е. С. Барановский // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2009. — № 12. — С. 74–79.

6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.

7. Плотников, В. И. Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций / В. И. Плотников // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1968. — Т. 32, № 4. — С. 743–755.

8. Егоров, А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров. — М. : Наука, 1978. — 464 с.

9. Керимбеков, А. Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач / А. Керимбеков. — Бишкек : Изд–во КРСУ, 2008. — 132 с.

10. Люстерник, Л. Н. Элементы функционального анализа / Л. Н. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Наука, 1965. — 520 с.

11. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

REFERENCES

1. Provotorov V.V., Volkova A.S. Initial and regional taskswith the distributed parameters on the graph. [Provotorov V.V., Volkova A.S. Nachal'no-kraevye zadachi s raspredelennimi parametrami na grafe]. Voronezh: Nauchnaya kniga, 20014, 188 p.

2. Vvedenskaya E.V. About optimum recovery of the solution of the equation of heat conductivity on it is ineact to the set temperature in various timepoint. [Vvedenskaya E.V. Ob optimal'nom vosstanovlenii resheniya uravneniya teploprovodnosti po netochno zadannoj temperature v razlichnye momenty vremeni]. *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal — Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2006, vol. 8, no. 1, pp. 16–21.

3. Lelyevkina L.G., Sklyar S.N., Khlybov O.S. Optimum control of heat conductivity processes. [Lelevkina L.G., Sklyar S.N., Xlybov O.S. Optimal'noe upravlenie processom teploprovodnosti]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote*, 2008, no. 4, pp. 119–133.

4. Kuz'menkov D.S. Optimal control of thermal process in a core with heat exchange on both ends. [Kuz'menkov D.S. Optimal'noe upravlenie teplovym processom v sterjne s teploobmenom na oboih koncah]. *Problemy fiziki, matematiki i texniki — Problems of Physics, Mathematics and Technology*, 2012, no. 2. pp. 81–87.

5. Baranovskiy E.S. About optimal tasks for the systems of parabolic type with aspherical sets of admissible control. [Baranovskij E.S. Ob optimal'nyx zadachax dlya sistem parabolicheskogo tipa s asferichnymi mnozhestvami dopustimyx upravlenij]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 2009, no. 12, pp. 74–79.

6. Tihonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of mathematical physics. [Tixonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1972, 735 p.

7. Plotnikov V.I. Energy inequality and properties of redefiniteness systems of own function. [Plotnikov V.I. E'nergeticheskoe neravenstvo i svojstva pereopredelennosti sistemy sobstvennyx

funkcij]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Otdelenie matematicheskix i estestvennyx nauk. Seriya matematicheskaya — Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Branch of Mathematical and Natural Sciences. Mathematical Series*, 1968, vol. 32, no. 4, pp. 743–755.

8. Egorov A.I. Optimal control of thermal and diffusive processes. [Egorov A.I. Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi processami]. Moscow: Nauka, 1978, 464 p.

9. Kerimbekov A. Nonlinear optimal control of functions in lines of transfers. [Kerimbekov A. Nelinejnoe optimal'noe upravlenie kolebaniyami v liniyax peredach]. Bishkek: KRSU, 2008, 132 p.

10. Lyusternic L.N., Sobolev V.I. Elements of the functional analysis. [Lyusternik L.N., Sobolev V.I. E'lementy funkcional'nogo analiza]. Moscow: Nauka, 1965, 520 p.

11. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

Урывская Т. Ю., Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия
E-mail: u_tanya2002@mail.ru
Тел.: 8(980)348–77–41

Uryvskaya T. Y., Senior Researcher, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Military training and scientific center of the air force «Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Voronezh, Russia
E-mail: u_tanya2002@mail.ru
Tel.: 8(980)348–77–41

Бутова Л. В., доцент кафедры математики, кандидат физико-математических наук, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия
E-mail: lvbutova@mail.ru
Тел.: +7903–851–32–97

Butova L. V., Associate professor of Departmen mathematic, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Military training and scientific center of the air force «Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin», Voronezh, Russia
E-mail: lvbutova@mail.ru
Tel.: +7903–851–32–97

Чеботарев А. С., доцент кафедры математики, кандидат физико-математических наук, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия
E-mail: xeba@amm.vsu.ru

Chebotarev A. S., associate professor of Departmen mathematic, candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Military training and scientific center of the air force «Air force Academy named after prof. N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin», Voronezh, Russia
E-mail: xeba@amm.vsu.ru