УДК 517.55 + 519.688

О ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ 5-ГО ПОРЯДКА В УРАВНЕНИЯХ ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^3$

В. И. Суковых

DataArt

Поступила в редакцию 09.10.2017 г.

Аннотация. Однородные многообразия могут быть описаны конечными наборами тейлоровских коэффициентов из определяющих эти многообразия уравнений. В случае вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств для таких описаний часто используются нормальные (канонические) уравнения Мозера. В предыдущих работах автора показана роль коэффициентов 5-го порядка из таких уравнений при описании однородных поверхностей общего положения в $\mathbb{C}^3$. Многие рассмотрения при этом используют выделенный коэффициент канонического уравнения и опираются на неравенство этого коэффициента нулю.

В настоящей работе показано, что с точностью до естественных симметрий канонических уравнений упомянутое неравенство является единственно возможным. Этот результат получен фактически за счет использования символьной математики. «Традиционными» математическими рассмотрениями удается исключить из числа возможных лишь простейшие случаи, также описанные в статье.

Ключевые слова: однородное многообразие, полиномиальное уравнение, символьные вычисления.

ON THE FIFTH ORDER TAYLOR'S COEFFICIENTS IN THE EQUATIONS OF HOMOGENEOUS HYPERSURFACES IN $\mathbb{C}^3$

V. I. Sukovykh

Abstract. Homogeneous varieties can be described by finite sets of Taylor coefficients from the equations defining these manifolds. In the case of real hypersurfaces of multidimensional complex spaces the normal (canonical) Moser equations are often used for such descriptions. In previous author's works the role was shown of the 5-th order coefficients from such equations in the description of homogeneous surfaces of general position in $\mathbb{C}^3$. Many corresponding considerations use the distinguished coefficient of the canonical equation and are based on the nonvanishing property of this coefficient.

In the present paper it is shown that up to the natural symmetries of the canonical equations, the above inequality is the only possible one. This result is obtained actually by using the symbolic mathematics. By means of «traditional» mathematical considerations, one can exclude from the number of possible cases only simplest ones, also described in the article.

Keywords: homogeneous manifold, polynomial equation, symbolic computations.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье изучается задача коэффициентного описания однородных вещественных гиперповерхностей в 3-мерном комплексном пространстве. В этой задаче важную роль играют (см. [1–3], [9]) многочлены 4-го и 5-го порядков из специальных нормальных мозеровских [4] уравнений таких поверхностей.

В частности, в [1] получены необходимые условия однородности строго псевдо-выпуклых (СПВ) гиперповерхностей при том, что многочлен 4-го порядка в их уравнениях имеет общий вид и отличен от нуля один выделенный коэффициент 5-го порядка. Поскольку многочлен 5-го порядка (от двух комплексных переменных)

$$\begin{gathered} N_{320} = z_1^3(\omega_1\bar z_1^2 + \omega_2\bar z_1\bar z_2 + \omega_3\bar z_2^2) + z_1^2 z_2(\omega_4\bar z_1^2 + \omega_5\bar z_1\bar z_2 + \omega_6\bar z_2^2) + \\ z_1 z_2^2(\omega_7\bar z_1^2 + \omega_8\bar z_1\bar z_2 + \omega_9\bar z_2^2) + z_2^3(\omega_{10}\bar z_1^2 + \omega_{11}\bar z_1\bar z_2 + \omega_{12}\bar z_2^2) \end{gathered} \tag{0.1}$$

имеет 12 коэффициентов, естественными являются вопросы о возможном обращении в нуль выделенного в [1] коэффициента ω_3 и о свойствах других коэффициентов многочленов (0.1) из уравнений однородных поверхностей.

Основным результатом данной статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. У многочлена N_{320} из специального нормального уравнения голоморфно-однородной СПВ-гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ хотя бы один из двух коэффициентов ω_3 или ω_{10} отличен от нуля.

Можно заметить, что нормальный вид уравнения поверхности сохраняется при симметрии $z_1 \leftrightarrow z_2$, меняющей местами ω_3 и ω_{10}. Это означает, что результаты работ [2], [1] имеют не частный, а общий характер, по крайней мере, для однородных поверхностей общего положения.

Подчеркнем еще одну важную особенность статьи. Обсуждаемая "чисто математическая" задача многомерного комплексного анализа решается в работе средствами информатики и компьютерных вычислений. Практически все результаты данной работы получены за счет символьных вычислений в пакете Maple (имеется зарегистрированная автором статьи компьютерная программа [12] исследования системы соответствующих полиномиальных уравнений). Многие утверждения, приводимые ниже, можно проверить только с использованием компьютерных программ: громоздкие промежуточные формулы (занимающие иногда несколько страниц) имеет смысл удерживать в памяти компьютера, но не на печатном листе.

Отметим, что аналогичные формулы, полученные "компьютерным способом" в [1], удалось подтвердить на примерах однородных поверхностей. В настоящей работе, утверждающей отсутствие объектов с некоторыми свойствами, ситуация иная. Основной результат работы, возможно, допускает его получение и проверку другими способами, однако пока имеется только такой путь к этому результату.

Подчеркнем также, что после работы Э.Картана [10], построившего полное описание голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей в двумерных комплексных пространствах, аналогичная задача в следующем, трехмерном, случае пока не решена. Использование нормальных форм в задаче об однородности, как ожидается, должно оказаться эффективным не только в аффинной постановке (см. [11]).

Автор благодарит своего научного руководителя проф. Лободу А. В. за постоянное внимание к работе.

1. КОЭФФИЦИЕНТНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ОБ ОДНОРОДНОСТИ

В настоящей работе свойство однородности изучается в терминах нормальных уравнений Мозера. Зададим в соответствии с [4] изучаемую голоморфно-однородную вещественную гиперповерхность M в $\mathbb{C}^3$ таким уравнением, имеющим вид

$$v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \sum_{k,l\geqslant 2, m\geqslant 0} N_{klm}(z,\bar z)u^m, \tag{1.1}$$

где $z = (z_1, z_2)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, $u = Re\, w$, $v = Im\, w$, $N_{klm}(z,\bar{z})$ — однородный многочлен степени k по z, l по $\bar{z}$.

В случае голоморфной однородности M коэффициенты многочленов N_{klm} из этого уравнения удовлетворяют большой системе полиномиальных соотношений. Получать эти соотношения можно из т.н. основного тождества (см. [3], [1])

$$Re(Z(\Phi)_{|M} \equiv 0, \tag{1.2}$$

где Φ — определяющая функция поверхности M, а

$$Z = f_1(z,w)\frac{\partial}{\partial z_1} + f_2(z,w)\frac{\partial}{\partial z_2} + g(z,w)\frac{\partial}{\partial w} \tag{1.3}$$

— голоморфное векторное поле, касательное к M.

В соответствии с [4], [3] векторное поле Z на произвольной (не обязательно однородной) поверхности полностью определяется своими 15 вещественными тейлоровскими коэффициентами. В их числе сдвиговые параметры

$$p_1 = f_1(0,0),\ p_2 = f_2(0,0),\ q = g(0,0) \tag{1.4}$$

и еще десять следующих вещественных параметров поля (1.3):

$$\begin{gathered}\alpha_1 = Re\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0,0)\right), \alpha_2 = Im\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0,0)\right),\\ \beta_1 = Re\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_2}(0,0)\right), \beta_2 = Im\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_2}(0,0)\right), \delta_2 = Im\left(\frac{\partial f_2}{\partial z_2}(0,0)\right),\\ a_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial w}(0,0)\right), a_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial w}(0,0)\right), r = Re\left(\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(0,0)\right).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Согласно [3], определением голоморфной однородности вещественной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ вида (1.1) можно считать условие свободы

$$p_1, p_2 \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{R}$$

пяти вещественных сдвиговых параметров (1.4).

Мы изучаем поверхности, в уравнениях (1.1) которых младший многочлен N_{220} удовлетворяет условию общности положения

$$N_{220} = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2) + \mu\,(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4),\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Для любой такой поверхности M алгебра касательных полей к ней является в точности 5-мерной (см. [5]), а набор параметров (1.5) определяется пятеркой сдвигов (1.4). Соответствующие достаточно объемные формулы для определения набора этих параметров имеются в [1], например,

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}Re\,((18\mu\omega_3 - 2\omega_4 + \omega_8 - 3\omega_2)p_1 + (18\mu\omega_{10} + 3\omega_{11} + 2\omega_9 - \omega_5)p_2) + \frac{3}{2}\mu q\lambda_1, \tag{1.7}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{2}Re\,(\omega_3 p_1 + \omega_{10}p_2) - \frac{1}{2}q\lambda_1', \quad \beta_2 = \frac{3}{2}Im\,(\omega_3 p_1 - \omega_{10}p_2) + \frac{1}{2}q\lambda_2'.$$

В [1] показано также, что у однородной поверхности общего положения многочлен N_{320} не может быть нулевым и выписаны следующие три формальные возможности для коэффициентов этого многочлена:

1) ω_3-случай: $\omega_3 \neq 0$,
2) ω_2-случай: $\omega_3 = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_2 \neq 0$,
3) ω_1-случай: $\omega_3 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_{10} = 0$, $\omega_{11} = 0$, $\omega_1 \neq 0$.

При этом формулы для всех параметров (1.5), кроме α_2, являются универсальными для поверхностей общего положения независимо от трех выписанных случаев (ниже мы будем использовать эти формулы без дополнительных комментариев). Лишь параметр α_2 определяется по-разному в зависимости от того, какой из коэффициентов многочлена N_{320} считается ненулевым.

В качестве основного в [1] рассматривался ω_3-случай. Задачей нашей работы является доказательство (анонсированной в [6]) невозможности случаев 2) и 3) для однородных поверхностей общего положения.

Отметим, что поворотами в плоскостях переменных z_1, z_2 можно привести любой ненулевой коэффициент многочлена N_{320} в вещественное положительное состояние. Поэтому коэффициент $\omega_k > 0$, дающий название соответствующему случаю, всегда считается положительным.

Перед рассмотрением более простого ω_1-случая приведем здесь несколько формул для коэффициентов уравнения (1.1) однородной поверхности в ω_2-случае и параметра α_2 векторного поля, касательного к такой поверхности. В этих формулах и далее имеется в виду (см. [1]), что многочлены N_{420}, N_{330} и N_{221} определяются наборами своих коэффициентов $s_k (1 \leqslant k \leqslant 15), t_j (1 \leqslant j \leqslant 16)$ и $\lambda_0, \ldots, \lambda_5$ соответственно. Многочлен N_{321} описывается формулой вида (0.1), но с заменой коэффициентов ω_k на ω'_k.

Кроме того, для коэффициентов многочленов N_{320} и N_{221} мы считаем выполненными (полученные в [1] без ограничения общности) следующие условия:

$$\omega_6 = \omega_7 = 0, \ \lambda_3 = 0.$$

Предложение 1. *В ω_2-случае имеют место следующие утверждения о параметре α_2 и коэффициентах многочлена N_{420}:*

$$\alpha_2 = -\frac{i}{4\omega_2\left(9\,\mu^2+4\right)}\left(C_1p_1 + C_2p_2 + C_3\bar{p}_1 + C_4\bar{p}_2 + C_5q\right), \textit{где}$$

$$C_1 = -12\,\omega_{12}\omega_2 + 18\,\omega_2\mu\,\omega_1 - 64\,s_2 - 144\,\mu^2 s_2 + 54\,\omega_2{}^2\mu^2 - 9\,\omega_2\mu\,\omega_{11} + 30\,\omega_2{}^2;$$

$$C_2 = 54\,\omega_{11}\mu^2\omega_2 + 60\,\omega_2\omega_1 - 16\,s_5 - 36\,\mu^2 s_5 - 6\,\omega_2\omega_{11} + 90\,\omega_2\mu\,\omega_{12} - 45\,\omega_2{}^2\mu;$$

$$C_3 = 6\,\omega_2{}^2 - 60\,\omega_2\bar{\omega}_{12} - 45\,\omega_2\mu\,\bar{\omega}_{11} + 90\,\omega_2\mu\,\bar{\omega}_1 - 32\,t_2 - 72\,\mu^2 t_2 - 54\,\omega_2{}^2\mu^2;$$

$$C_4 = 72\,\mu^2 - 72\,\mu^2 t_3 - 9\,\omega_2{}^2\mu - 32\,\lambda_2 - 32\,t_3 + 12\,\omega_2\bar{\omega}_1 - 30\,\omega_2\bar{\omega}_{11} + 32\,i\lambda_1 +$$
$$+72\,i\mu^2\lambda_1 - 72\,\mu^2\lambda_2 - 54\,\bar{\omega}_{11}\mu^2\omega_2 + 18\,\omega_2\mu\,\bar{\omega}_{12} + 32;$$

$$C_5 = -4\left(9\,\mu^2+4\right)\omega'_2 + 4i\omega_2\left(9\,\mu^2+4\right)\lambda_4 +$$
$$+2\left(-81\,\mu^3\omega_2 + 36\,\mu^2\omega_1 - 9\,\mu^2\omega_{11} - 30\,\mu\,\omega_2 - 12\,\mu\,\omega_{12} + 8\,\omega_1\right)\lambda_1 +$$
$$+2i\left(-54\,\mu^3\omega_2 + 36\,\mu^2\omega_1 - 9\,\mu^2\omega_{11} - 18\,\mu\,\omega_2 - 12\,\mu\,\omega_{12} + 8\,\omega_1\right)\lambda_2.$$

Все коэффициенты многочлена N_{420} однозначно определяются из $(3,2,0)$-тождества. При этом, в частности,

$$s_2 = -\frac{1}{2}\bar{t}_2 - \frac{1}{4}\,\frac{-27\,\omega_2\mu\,\omega_1 - 9\,\omega_2{}^2 + 18\,\omega_{12}\omega_2}{9\,\mu^2+4},$$

$$s_5 = \frac{-27\mu\,\omega_2{}^2 + 54\mu\omega_2\omega_{12} + 144\mu^2 + 36\omega_1\omega_2 + 64}{2(9\mu^2+4)},$$

$$s_7 = \frac{3}{8\omega_2 \left(9\mu^2+4\right)^2}(-81\mu^3{\omega_2}^3 + 162\mu^3{\omega_2}^2\omega_{12} + 1296\mu^4\omega_2 + 216\mu^2\omega_1{\omega_2}^2 +$$

$$+576\mu^2\omega_2 - 1728\mu^3\omega_1 - 144\mu{\omega_1}^2\omega_2 - 72\mu{\omega_2}^2\omega_{12} - 216\mu^2\omega_1\omega_2\omega_{12}$$

$$+1152\mu^2\omega_{12} + 96\omega_1\omega_2\omega_{12} - 768\mu\omega_1 + 512\omega_{12} + 144\mu\omega_2{\omega_{12}}^2),$$

$$s_{10} = 0.$$

Отметим, что все формулы этого предложения получены по схеме работы [1], а необходимые выкладки реализованы в пакете Maple.

В заключение этого раздела отметим следующий момент, существенно отличающий настоящую работу от [1]. Ниже будут рассмотрены не три, а четыре тейлоровских компоненты основного тождества: стандартная схема, связанная с изучением $(2,2,0)$-, $(3,2,0)$- и $(2,2,1)$-компонент, дополняется $(4,2,0)$-компонентой тождества (1.2). Все эти четыре компоненты содержат в себе коэффициенты опорного набора многочленов

$$N_{220}, N_{320}, N_{221}, N_{420}, N_{330}, N_{321}, N_{222} \tag{1.8}$$

и параметры (1.4), (1.5) векторных полей. Исключение последних десяти параметров из обсуждений в ω_1- и ω_2-случаях приводит к более простым, чем в [1], соотношениям на коэффициенты набора (1.8) и позволяет получить главный результат статьи.

2. ω_1-СЛУЧАЙ

Теорема 2. *Не существует однородных поверхностей общего положения, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_{10} = \omega_{11} = 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Выпишем здесь несколько уравнений, имеющих универсальный характер и получаемых в рамках случая общего положения (независимо от подслучаев) в (3,2,0)-тождестве. Для рассмотрения ω_1-подслучая нам потребуются $\Omega_2-,\Omega_3-,\Omega_{10}-,\Omega_{11}-$ следствия (3,2,0)-тождества, первоначально имеющие вид:

$$\Omega_2 \ : \ 4s_2p_1 + s_5p_2 + 2t_2\bar{p}_1 - 2\left(i\lambda_1 - \lambda_2 - t_3 + 1\right)\bar{p}_2 + \omega_2'q -$$

$$-2\alpha_1\omega_2 + 3\omega_2\left(\alpha_1 + i\alpha_2\right) + \omega_5\left(-\beta_1 + i\beta_2\right) + 2\omega_1\left(\beta_1 - i\beta_2\right) +$$

$$+\omega_2\left(\alpha_1 - i\alpha_2\right) + \omega_2\left(\alpha_1 - i\delta_2\right) + 2\,\omega_3\left(-\beta_1 - i\beta_2\right) = 0,$$

$$\Omega_3 \ : \ 4s_3p_1 + s_6p_2 + \left(i\lambda_1 - \lambda_2 + t_3 + 1\right)\bar{p}_1 + 3t_4\bar{p}_2 + \omega_3'q -$$

$$-2\alpha_1\omega_3 + 3\omega_3\left(\alpha_1 + i\alpha_2\right) + \omega_6\left(-\beta_1 + i\beta_2\right) + \omega_2\left(\beta_1 - i\beta_2\right) + 2\omega_3\left(\alpha_1 - i\delta_2\right) = 0,$$

$$\Omega_{10} \ : \ s_{10}p_1 + 4s_{13}p_2 + 3t_{13}\bar{p}_1 + \left(i\lambda_1 + \lambda_2 + t_{14} + 1\right)\bar{p}_2 - 2\alpha_1\omega_{10} +$$

$$+\omega_7\left(\beta_1 + i\beta_2\right) + 3\omega_{10}\left(\alpha_1 + i\delta_2\right) + 2\omega_{10}\left(\alpha_1 - i\alpha_2\right) + \omega_{11}\left(-\beta_1 - i\beta_2\right) + \omega_{10}'q = 0,$$

$$\Omega_{11} \ : \ s_{11}p_1 + 4s_{14}p_2 - 2\left(i\lambda_1 + \lambda_2 - t_{14} + 1\right)\bar{p}_1 + 2t_{15}\bar{p}_2 + \omega_{11}'q -$$

$$-2\alpha_1\omega_{11} + \omega_8\left(\beta_1 + i\beta_2\right) + 2\omega_{12}\left(-\beta_1 - i\beta_2\right) + 2\omega_{10}\left(\beta_1 - i\beta_2\right) +$$

$$+\omega_{11}\left(\alpha_1 - i\alpha_2\right) + \omega_{11}\left(\alpha_1 - i\delta_2\right) + 3\omega_{11}\left(\alpha_1 + i\delta_2\right) = 0.$$

Согласно общей схеме исследования тройки основных тождеств, в скалярные уравнения (3,2,0)-тождества нужно подставить формулы раздела 2 для параметров $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \delta_2$, полученные из (2,2,0)-тождества. Далее необходимо выразить уже из (3,2,0)-тождества еще несколько параметров: a_1,a_2, α_2.

Однако, при обсуждении четырех выписанных уравнений в ω_1-случае информация об этих трех параметрах (а также о вещественном параметре r, определяемом из (2,2,1)-тождества) нам не потребуется. В самом деле, параметры a_1, a_2 в этих уравнениях отсутствуют. А параметр α_2 входит в каждое из этих уравнений с коэффициентами $\omega_2, \omega_3, \omega_{10}, \omega_{11}$, соответственно. Все эти коэффициенты равны нулю в силу (2.1).

Следовательно, в ω_1-случае каждое из четырех обсуждаемых уравнений зависит только от основной пятерки параметров (p_1,p_2,q). Теперь, как и при рассмотрении случая $N_{320} = 0$ в работе [1], оказывается достаточно свойства свободного изменения этих параметров и применения леммы о единственности [8].

В этой ситуации мы обсудим $(p, \bar{p})$-составляющие четырех выписанных уравнений. Помимо явного вхождения параметры $p_1, p_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ могли бы появиться в этих уравнениях опосредованно, через "промежуточные"параметры β_1 и β_2 из выражений типа $\omega_k(\beta_1 \pm i\beta_2)$.

Например, $(p, \bar{p})$-составляющая U_2-уравнения имеет с учетом сказанного вид:

$$4s_2p_1 + s_5p_2 + 2t_2\bar{p}_1 - 2\left(i\lambda_1 - \lambda_2 - t_3 + 1\right)\bar{p}_2 +$$

$$+\omega_5\left(-\beta_1 + i\beta_2\right) + 2\omega_1\left(\beta_1 - i\beta_2\right) = 0$$

Но в силу формул (1.7) и (2.1) параметры β_1, β_2 в ω_1-случае зависят только от параметра q. Это означает, что $\bar{p}$-части всех четырех уравнений Ω_2-,Ω_3-,$\Omega_{10}-$,$\Omega_{11}-$ имеют в ω_1-случае такой же точно вид, как и в изученном в [1] случае полностью нулевого многочлена N_{320}. В частности, для однородной поверхности общего положения, удовлетворяющей условиям (2.1), должны выполняться следующие четыре $\bar{p}$-соотношения:

$$\begin{aligned}
U_2 &: \; 2t_2\bar{p}_1 - 2\left(i\lambda_1 - \lambda_2 - t_3 + 1\right)\bar{p}_2 = 0,\\
U_3 &: \; \left(i\lambda_1 - \lambda_2 + t_3 + 1\right)\bar{p}_1 + 3t_4\bar{p}_2 = 0,\\
U_{10} &: \; 3t_{13}\bar{p}_1 + \left(i\lambda_1 + \lambda_2 + t_{14} + 1\right)\bar{p}_2 = 0,\\
U_{11} &: \; -2\left(i\lambda_1 + \lambda_2 - t_{14} + 1\right)\bar{p}_1 + 2t_{15}\bar{p}_2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Напомним, что в [1] доказана противоречивость именно этих соотношений при вещественных λ_1, λ_2. Теорема 2, тем самым, доказана.

3. $(9 + 4)$-СИСТЕМА В ω_2-СЛУЧАЕ

Для доказательства других утверждений, входящих составными частями в теорему 1, выпишем некоторые вспомогательные уравнения, вытекающие из (3,2,0)-компоненты основного тождества и относящиеся к ω_2-случаю. Эти уравнения получаются по схемам, описанным в [1], [5], и являются результатами упрощений $\bar{p}$-*подсистемы* и *смешанной подсистемы* уравнений в этом случае. $\bar{p}$-система сводится к 9 достаточно сложным вещественным уравнениям (относительно переменных $\mu, tre_2, u_k = Re\,\omega_k, v_k = Im\,\omega_k$) а от смешанной системы остаются 4 комплексных уравнения.

Уравнения первой подсистемы линейны относительно коэффициента $tre_2 = Re\,t_2$, а второй – относительно ω_4'. Мы выпишем полностью только 9 первых уравнений $V_1, \ldots, V_9$, а смешанная система будет представлена в краткой форме.

$$V_1 \; : \; u_2\left(9\mu^2 + 4\right)\left(3\mu u_2 - 6\mu u_{12} - 4u_1\right) tre_2 +$$

$$+3456\mu^2 u_2 u_{12} - 1944\mu^3 u_2^3 u_{12} - 2268\mu^2 u_1 u_2^3 - 5184\mu^3 u_1 u_2 + 24 + 432\mu u_2^2 v_1^2 -$$
$$-20736\mu^3 v_1 v_{12} - 1296\mu u_2^2 v_{12}^2 - 1296\mu u_2^2 u_{12}^2 - 2304\mu u_1 u_2 - 2592\mu^2 u_1 u_2 v_{12}^2 +$$
$$+1296\mu u_1^2 u_2^2 + 432\mu u_2^3 u_{12} - 864 u_1 u_2^2 u_{12} + 648\mu^2 u_2^2 v_1 v_{12} + 108\mu u_2^4 - 256 u_2^2 -$$
$$-13824\mu^2 v_1^2 + 2592\mu^4 u_2^2 + 1536 u_2 u_{12} + 576\mu^2 u_2^2 - 1728\mu u_1 u_2 v_1 v_{12} +$$
$$+2592\mu^2 u_2 u_{12} v_1 v_{12} + 972\mu^3 u_2^4 - 21504 v_1^2 + 1728\mu u_2 u_{12} v_1^2 +$$
$$+1944\mu^2 u_1 u_2^2 u_{12} - 144 u_1 u_2^3 - 34560\mu^2 v_{12}^2 - 864 u_2^2 v_1 v_{12} - 55296\mu v_1 v_{12} = 0,$$
$$V_2 \ : \ 6\left(9\mu^2+4\right)(u_2+2u_{12})\, tre_2 + 162\mu^2 u_2^3 u_{12} + 216\mu^3 u_2^2 +$$
$$+27\mu u_1 u_2^3 - 162\mu u_1 u_2^2 u_{12} + 216\mu u_1 u_2 v_{12}^2 - 54\mu u_2^2 v_1 v_{12} - 216\mu u_2 u_{12} v_1 v_{12} +$$
$$+432\mu^2 u_1 u_2 + 1728\mu^2 v_1 v_{12} - 36 u_1^2 u_2^2 + 36 u_2^3 u_{12} + 72 u_2^2 u_{12}^2 - 36 u_2^2 v_1^2 +$$
$$+72 u_2^2 v_{12}^2 + 96\mu u_2^2 + 2880\mu v_{12}^2 + 192 u_1 u_2 + 2688 v_1 v_{12} = 0,$$
$$V_3 \ : \ -36\mu\left(9\mu^2+4\right)(3\mu u_2 - 6\mu u_{12} - 4u_1)\, tre_2 -$$
$$-6\mu(864\mu^2 u_2 u_{12} - 486\mu^3 u_2^3 u_{12} - 567\mu^2 u_1 u_2^3 - 1296\mu^3 u_1 u_2 + 108\mu u_2^2 v_1^2 -$$
$$-5184\mu^3 v_1 v_{12} - 324\mu u_2^2 v_{12}^2 - 324\mu u_2^2 u_{12}^2 - 576\mu u_1 u_2 - 648\mu^2 u_1 u_2 v_{12}^2 +$$
$$+108\mu u_2^3 u_{12} - 216 u_1 u_2^2 u_{12} + 162\mu^2 u_2^2 v_1 v_{12} + 27\mu u_2^4 - 64 u_2^2 - 3456\mu^2 v_1^2 +$$
$$+648\mu^4 u_2^2 + 384 u_2 u_{12} + 144\mu^2 u_2^2 - 432\mu u_1 u_2 v_1 v_{12} + 648\mu^2 u_2 u_{12} v_1 v_{12} +$$
$$+243\mu^3 u_2^4 - 5376 v_1^2 + 432\mu u_2 u_{12} v_1^2 + 486\mu^2 u_1 u_2^2 u_{12} - 36 u_1 u_2^3 -$$
$$-8640\mu^2 v_{12}^2 - 216 u_2^2 v_1 v_{12} - 13824\mu v_1 v_{12} + 324\mu u_1^2 u_2^2) = 0,$$
$$V_4 \ : \ 2u_2\left(9\mu^2+4\right)(3\mu v_{12} + 5v_1)\, tre_2 + 81\mu^3 u_2^3 v_{12} - 27\mu^2 u_1 u_2^2 v_{12} -$$
$$-108\mu^2 u_1 u_2 u_{12} v_{12} + 81\mu^2 u_2^3 v_1 - 27\mu^2 u_2^2 u_{12} v_1 - 2240 u_1 v_1 + 15 u_2^3 v_1 +$$
$$+108\mu^2 u_2 u_{12}^2 v_1 + 216\mu^3 u_2 v_1 - 864\mu^3 u_{12} v_1 - 180\mu u_1^2 u_2 v_{12} - 90\mu u_1 u_2^2 v_1 +$$
$$+180\mu u_1 u_2 u_{12} v_1 + 18\mu u_2^3 v_{12} - 1440\mu^2 u_1 v_1 + 360\mu^2 u_2 v_{12} - 1440\mu^2 u_{12} v_{12} -$$
$$-30 u_1 u_2^2 v_{12} + 30 u_2^2 u_{12} v_1 - 2400\mu u_1 v_{12} + 336\mu u_2 v_1 - 1344\mu u_{12} v_1 = 0,$$
$$V_5 \ : \ 2\left(9\mu^2+4\right)\left(9\mu^2 v_{12} - 15\mu v_1 + 14 v_{12}\right)\mu tre_2 +$$
$$\mu(648\mu^4 u_2 v_1 + 4320\mu^3 u_1 v_1 - 162\mu^3 u_2^3 v_1 - 4320\mu^3 u_{12} v_{12} + 297\mu^2 u_2^3 v_{12} +$$
$$+2736\mu^2 u_2 v_1 + 243\mu^4 u_2^3 v_{12} + 2880\mu u_2 v_{12} + 1080\mu^3 u_2 v_{12} + 504\mu u_2 u_{12}^2 v_1 +$$
$$+324\mu^3 u_2 u_{12}^2 v_1 + 540\mu^2 u_1^2 u_2 v_{12} - 81\mu^3 u_1 u_2^2 v_{12} - 324\mu^3 u_1 u_2 u_{12} v_{12} + 7200\mu^2 u_1 v_{12} +$$
$$+144\mu u_1 u_2^2 v_{12} + 270\mu^2 u_1 u_2^2 v_1 - 6720\mu u_{12} v_{12} - 6272 u_{12} v_1 - 81\mu^3 u_2^2 u_{12} v_1 +$$
$$+18\mu u_2^3 v_1 - 8064\mu^2 u_{12} v_1 + 84u2^3 v_{12} + 6720\mu u_1 v_1 - 540\mu^2 u_1 u_2 u_{12} v_1 -$$
$$-396\mu u_2^2 u_{12} v_1 - 504\mu u_1 u_2 u_{12} v_{12} - 2592\mu^4 u_{12} v_1 + 2688 u_2 v_1) = 0,$$
$$V_6 \ : \ 24\left(9\mu^2+4\right)\left(9\mu^2 v_{12} - 15\mu v_1 + 14 v_{12}\right) tre_2 - 81\mu^3 u_1 u_2^2 v_{12} +$$
$$+648\mu^4 u_2 v_1 + 4320\mu^3 u_1 v_1 - 162\mu^3 u_2^3 v_1 - 4320\mu^3 u_{12} v_{12} + 297\mu^2 u_2^3 v_{12} -$$
$$-2592\mu^4 u_{12} v_1 + 2736\mu^2 u_2 v_1 + 243\mu^4 u_2^3 v_{12} + 2880\mu u_2 v_{12} + 1080\mu^3 u_2 v_{12} +$$
$$+504\mu u_2 u_{12}^2 v_1 + 324\mu^3 u_2 u_{12}^2 v_1 + 540\mu^2 u_1^2 u_2 v_{12} - 324\mu^3 u_1 u_2 u_{12} v_{12} +$$
$$+7200\mu^2 u_1 v_{12} + 144\mu u_1 u_2^2 v_{12} + 270\mu^2 u_1 u_2^2 v_1 - 6720\mu u_{12} v_{12} + 2688 u_2 v_1 -$$
$$-6272 u_{12} v_1 - 81\mu^3 u_2^2 u_{12} v_1 + 18\mu u_2^3 v_1 - 8064\mu^2 u_{12} v_1 + 84 u_2^3 v_{12} +$$

$$+6720\mu u_1 v_1 - 540\mu^2 u_1 u_2 u_{12} v_1 - 396\mu u_2^2 u_{12} v_1 - 504\mu u_1 u_2 u_{12} v_{12} = 0,$$

$$V_7 \ : \ 4u_2 v_{12} \left(9\mu^2+4\right) tre_2 + 54\mu^2 u_2^3 v_{12} + 144\mu^2 u_2 v_1 + 12u_2^3 v_{12} -$$

$$-18\mu u_1 u_2^2 v_{12} - 72\mu u_1 u_2 u_{12} v_{12} + 9\mu u_2^3 v_1 - 18\mu u_2^2 u_{12} v_1 + 72\mu u_2 u_{12}^2 v_1 -$$

$$-576\mu^2 u_{12} v_1 + 480\mu u_2 v_{12} - 960\mu u_{12} v_{12} + 384 u_2 v_1 - 896 u_{12} v_1 = 0,$$

$$V_8 \ : \ 4\left(9\mu^2+4\right) v_{12} tre_2 + 54\mu^2 u_2^3 v_{12} - 18\mu u_1 u_2^2 v_{12} + 12u_2^3 v_{12} -$$

$$-72\mu u_1 u_2 u_{12} v_{12} + 9\mu u_2^3 v_1 - 18\mu u_2^2 u_{12} v_1 + 72\mu u_2 u_{12}^2 v_1 + 144\mu^2 u_2 v_1 -$$

$$-576\mu^2 u_{12} v_1 + 480\mu u_2 v_{12} - 960\mu u_{12} v_{12} + 384 u_2 v_1 - 896 u_{12} v_1 = 0,$$

$$V_9 \ : \ 12u_2 \mu v_{12} \left(9\mu^2+4\right) tre_2 + 162\mu^3 u_2^3 v_{12} - 54\mu^2 u_1 u_2^2 v_{12} -$$

$$-216\mu^2 u_1 u_2 u_{12} v_{12} + 27\mu^2 u_2^3 v_1 - 54\mu^2 u_2^2 u_{12} v_1 + 216\mu^2 u_2 u_{12}^2 v_1 -$$

$$-1728\mu^3 u_{12} v_1 - 54\mu u_2^3 v_{12} - 2880\mu^2 u_{12} v_{12} + 120 u_1 u_2^2 v_{12} - 120 u_2^2 u_{12} v_1 +$$

$$+672\mu u_2 v_1 - 2688\mu u_{12} v_1 - 320 u_2 v_{12} + 432\mu^3 u_2 v_1 = 0.$$

Выпишем здесь также одно из уравнений смешанной системы:

$$U_1 \ : \ 8i\omega_1\left(4+9\mu^2\right)\omega_4' + 180\mu^2\lambda_4\omega_1\omega_2 + 216\mu\lambda_4\omega_2\omega_{12} + \tag{3.1}$$

$$+18\overline{t_{10}}\mu\omega_2\omega_{12} + 27\overline{t_7}\mu^2\omega_1\omega_2 - 54\overline{\omega_{12}}\mu^2\omega_2 s_7 - 36\overline{\omega_1}\mu^2\omega_1 s_9 - 18\overline{t_{10}}\mu^2\omega_1\omega_{12} +$$

$$+36\mu\omega_1\omega_2 s_7 + 18\overline{t_7}\mu\omega_2\omega_{12} - 72\overline{\omega_{12}}\mu\omega_1 s_7 + 24\overline{\omega_{12}}\mu\omega_1 s_9 - 12\overline{t_{10}}\mu\omega_1^2 +$$

$$+36\overline{\omega_1}\mu\omega_2 s_9 - 36\overline{\omega_1}\mu\omega_2 s_7 - 12\omega_2^2 s_9 + 60\mu^2\omega_1^2 - 36\mu^2\omega_2^2 + 96\omega_2\omega_{12} +$$

$$+240\lambda_4\omega_1\omega_{12} - 54\mu^2\omega_2^2 s_9 + 27\mu^2\omega_2^2 s_7 - 384\mu\lambda_4\omega_1^2 + 24\overline{t_7}\omega_1\omega_{12} +$$

$$+12\overline{t_7}\omega_1\omega_2 - 24\overline{\omega_{12}}\omega_2 s_9 - 9\overline{t_7}\mu\omega_2^2 + 12\overline{t_{10}}\omega_1\omega_2 - 48\overline{\omega_1}\omega_1 s_7 - 36\overline{t_7}\mu\omega_1^2 + 96\lambda_4\omega_1\omega_2 +$$

$$+912\mu\omega_1\omega_{12} - 108\mu\lambda_4\omega_2^2 - 9\overline{t_{10}}\mu\omega_2^2 + 360\mu^3\omega_1\omega_{12} + 288\mu^2\omega_2\omega_{12} - 72\mu^3\omega_1\omega_2 -$$

$$-360\mu\omega_1\omega_2 + 528\omega_1^2 + 9\overline{t_{10}}\mu^2\omega_1\omega_2 - 12\mu\omega_1\omega_2 s_9 - 36\mu^2\lambda_4\omega_1\omega_{12} = 0.$$

Остальные три уравнения мы не приводим, ограничиваясь лишь выписыванием коэффициентов при переменной ω_4', входящей линейным образом во всю эту четверку уравнений. Итак, коэффициенты C_k из четырех уравнений вида

$$C_j \cdot \omega_4' + D_j = 0 \ (j = 1, \ldots, 4). \tag{3.2}$$

равны:

$$C_1 = 8i\omega_1\left(4+9\mu^2\right),$$

$$C_2 = 8\left(3\mu\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_{12}\right)\mu\left(4+9\mu^2\right),$$

$$C_3 = 4\left(3\mu\omega_2 - 6\mu\omega_{12} - 4\omega_1\right)\mu\left(4+9\mu^2\right),$$

$$C_4 = -4i\left(2\omega_{12}+\omega_2\right)\left(4+9\mu^2\right).$$

Объединяя эти четыре уравнения с девятью предыдущими, будем говорить об *основной (9+4)-системе ω_2-случая.*

Напомним, что каждое уравнение из первой подсистемы может быть записано в виде:

$$A_k \cdot tre_2 + B_k = 0 \ (k = 1, \ldots, 9).$$

4. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ОСНОВНОЙ $(9+4)$-СИСТЕМЫ

Самые первые утверждения о выписанных коэффициентах A_k, C_j опираются на полную информацию об этих уравнениях.

Предложение 2. *Если набор величин A_k, B_k, C_j, D_j является решением двух систем уравнений, выписанных в разделе 3, то:*

1) значение хотя бы одного из 9 выписанных коэффициентов A_k этого набора отлично от нуля;

2) значение хотя бы одного из 4 выписанных коэффициентов C_k этого набора отлично от нуля.

Следствие. Однородная поверхность из ω_2-случая определяется не более чем шестью вещественными коэффициентами. Действительно, выбирая из двух групп уравнений по одному, содержащему ненулевые коэффициенты A_k и C_j, выразим из этих уравнений tre_2 и ω_4' соответственно. С учетом комплексного характера коэффициента ω_4' это означает, что всякая однородная поверхность однозначно определяется оставшимися 6 вещественными коэффициентами $\mu, u_1, v_1, u_2, u_{12}, v_{12}$.

Замечание. В современной терминологии это следствие означает, что размерность пространства модулей для семейства однородных поверхностей из ω_2-случая не превышает 6.

Доказательство предложения 2.

Предположим, что некоторый набор коэффициентов $(\mu, u_k, v_j, \ldots)$ многочленов (1.8) является решением (9+4)-системы и обсудим, как такое допущение связано с коэффициентами A_k, C_j.

Легко видеть, что с учетом неравенств $4 + 9\,\mu^2 \neq 0$ и $\omega_2 \neq 0$ система 4-х уравнений

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ C_3 = 0,\ C_4 = 0 \tag{4.1}$$

равносильна более простой системе из трех уравнений:

$$\omega_1 = 0,\ \mu = 0,\ 2\omega_{12} + \omega_2 = 0. \tag{4.2}$$

Аналогично, обращение в нуль всех девяти коэффициентов из A_k равносильно следующей системе из 4-х уравнений:

$$v_{12} = 0,\ v_1 = 0,\ u_{12} = -\frac{1}{2}u_2,\ u_1 = \frac{3}{2}\mu u_2. \tag{4.3}$$

Заметим, что подстановка условий (4.2), например, в приведенное выше уравнение V_1 (из подсистемы 9 уравнений) превращает его в противоречивое равенство

$$-1024\,u_2 = 0.$$

Это означает, что для обсуждаемого решения (9+4)-системы (если оно существует) все три равенства (4.2) выполняться одновременно не могут. Аналогично проверяется и вторая часть предложения 3.

Замечание. Подстановка условий (4.2) в другие уравнения (9+4)-системы может привести к верным равенствам. Например, второе из выписанных выше уравнений, а именно U_2, превращается в тождество $0 = 0$. Но для доказательства предложения 3 интерес представляют именно обнаруживаемые противоречия.

Таким образом, дальнейшее изучение однородности в ω_2-случае можно разбить на несколько подслучаев, связанных с парой нарушающихся соотношений (одно из набора (4.2), другое - из (4.3)). При таком подходе придется разбирать $4 \times 3 = 12$ случаев. Можно предложить и другие варианты, например, следующие четыре ситуации, охватывающие все возможности и имеющие очевидные связи с наборами (4.2) и (4.3)):

$$1)\ v_1 \neq 0, \quad 2)\ v_1 = 0,\ 2u_{12} + u_2 \neq 0, \quad 3)\ v_1 = 0,\ 2u_{12} + u_2 = 0,\ v_{12} \neq 0,$$

$$4)\ v_1 = 0,\ 2u_{12} + u_2 = 0,\ v_{12} = 0, u_1 - \frac{3}{2}\mu u_2 \neq 0. \tag{4.4}$$

Именно компьютерное исследование этих четырех ситуаций в ω_2-случае позволило получить основной результат настоящей статьи.

Мы опишем здесь подробное рассмотрение лишь первой, самой общей ситуации из (4.4), выделяя в ней два подслучая. Три остальные, содержащие дополнительные ограничения, разбираются несколько проще. Но технические детали их подробного описания все же невозможно вместить в объем одной статьи.

Подслучаи, выделяемые при обсуждении однородных поверхностей, удовлетворяющих условиям ω_2-случая и неравенству $v_1 \neq 0$, связаны с обращением в нуль или отличием от нуля коэффициента v_{12} из нормальных уравнений изучаемых поверхностей.

5. ОПИСАНИЕ ПЕРВОГО ПОДСЛУЧАЯ: $v_1 \neq 0, v_{12} = 0$

Теорема 3. *Не существует голоморфно однородных поверхностей, удовлетворяющих условиям ω_2-случая, неравенству $v_1 \neq 0$ и условию $v_{12} = 0$.*

Доказательство теоремы 3. Сначала упростим по отдельности $\bar{p}$-систему и смешанную систему, учитывая дополнительное условие $v_{12} = 0$. Эти упрощения проделаны в пакете Maple, а потому здесь в основном будут приведены лишь комментарии к ним.

Предложение 3. *При условии $v_{12} = 0$ $\bar{p}$-система из 9 уравнений равносильна следующей системе из 5 уравнений:*

$$\mu = -\frac{1}{4}u_2 u_{12}, \tag{5.1}$$

$$tre_2 = -\frac{\left(-2160u_2^2u_{12}^2 + 360u_2^3u_{12} - 35840\right)u_1}{10u_2\left(9u_2^2u_{12}^2 + 64\right)} - \tag{5.2}$$

$$-\frac{81u_2^5u_{12}^2 - 81u_2^4u_{12}^3 + 324u_2^3u_{12}^4 + 5376u_2u_{12}^2 + 240u_2^3 - 864u_2^2u_{12}}{10u_2\left(9u_2^2u_{12}^2 + 64\right)},$$

$$9u_2^4u_{12} - 54u_2^3u_{12}^2 + 216u_2^2u_{12}^3 - 1536u_2 + 3584u_{12} = 0, \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}-1720320u_1^2 - 1720320v_1^2 - 387072u_1u_2^2u_{12} + 4374u_2^5u_{12}^5 + \\ +54432u_2^3u_{12}^4u_1 - 103680u_2^2u_{12}^2u_1^2 - 13608u_2^4u_{12}^3u_1 - 8640u_2^3u_{12}v_1^2 - \\ -96768u_2^2u_{12}^4 - 17856u_2^4u_{12}^2 - 8640u_2^3u_{12}u_1^2 - 103680u_2^2u_{12}^2v_1^2 - \\ -4212u_2^5u_{12}^2u_1 - 20480u_2^2 + 1053u_2^6u_{12}^4 + 122880u_2u_{12} - 5832u_2^4u_{12}^6 + \\ +107136u_2^3u_{12}^3 + 903168u_1u_2u_{12}^2 - 486u_2^7u_{12}^3 = 0,\end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered}-162u_2^4u_{12}^4 + 99u_2^5u_{12}^3 - 648u_2^3u_{12}^5 + 3240u_2^3u_{12}^2u_1 + 4320u_2^2u_{12}^3u_1 - \\ -1728u_2^2u_{12}^2 - 10752u_2u_{12}^3 - 540u_2^4u_{12}u_1 + 704u_2^3u_{12} - 81u_2^6u_{12}^2 - \\ -960u_1^2u_2^2 + 40960u_1u_2 - 240u_2^4 - 960u_2^2v_1^2 + 71680u_{12}u_1 = 0.\end{gathered} \tag{5.5}$$

Для доказательства этого предложения заметим, что в случае $v_{12} = 0$ коэффициент при неизвестной tre_2 в уравнении V_4 упрощается, и само это уравнение можно разрешить относительно tre_2. Подстановка полученной формулы в остальные восемь уравнений $\bar{p}$-системы приводит к тому, что лишь пять из них остаются содержательными, а еще три уравнения оказываются следствиями этих пяти.

Приведем пять содержательных следствий указанной подстановки:

$$U_1\ :\ -26880u_1^2+1296\mu^4u_2^2-17280\mu^2v_1^2-26880v_1^2-24192\mu^2u_{12}^2-2304\mu^2u_2^2-$$

$$-729\mu^3u_2^3u_{12}+486\mu^3u_2^4+2160\mu u_2u_{12}v_1^2+2160\mu u_1^2u_2u_{12}-1134\mu^2u_1u_2^2u_{12}-$$

$$-56448\mu u_1u_{12}+4536\mu^2u_{12}^2u_1u_2+11664\mu^4u_2u_{12}+540\mu u_2^3u_{12}+9072\mu^3u_1u_2-$$

$$-1080\mu u_2^2u_{12}^2+540\mu u_2^2v_1^2+21312\mu u_1u_2+22464\mu^2u_2u_{12}+540\mu u_1^2u_2^2-$$

$$-36288\mu^3u_{12}u_1+1944\mu^3u_{12}^3u_2-1458\mu^3u_{12}^2u_2^2-15552\mu^4u_{12}^2-17280\mu^2u_1^2-$$

$$-720u_1u_2^2u_{12}-1053\mu^2u_1u_2^3+1920u_2u_{12}-320u_2^2=0,$$

$$U_2\ :\ 432\mu^3u_2u_{12}+144\mu^3u_2^2+1728\mu^3u_{12}^2+135\mu^2u_2^3u_{12}-54\mu^2u_{12}^2u_2^2+$$

$$+2160\mu^2u_1u_2+2880\mu^2u_{12}u_1-81\mu^2u_2^4+672\mu u_2u_{12}+2688\mu u_{12}^2+135\mu u_1u_2^3-$$

$$-176\mu u_2^2-360\mu u_1u_2u_{12}^2-60u_1^2u_2^2+2560u_1u_2-15u_2^4-60u_2^2v_1^2+4480u_{12}u_1-$$

$$-216\mu^2u_2u_{12}^3-270\mu u_1u_2^2u_{12}+60u_2^2u_{12}^2=0,$$

$$U_5\ :\ (-306\mu u_2^2u_{12}-162\mu^3u_2^2u_{12}+648\mu^3u_2u_{12}^2+63\mu u_2^3+1296\mu^4u_2-6272u_{12}+$$

$$+2688u_2-5184\mu^4u_{12}+81\mu^3u_2^3+3744\mu^2u_2+504\mu u_2u_{12}^2-12096\mu^2u_{12})\mu v_1=0,$$

$$U_7\ :\ 9\mu u_2^3-18\mu u_2^2u_{12}+72\mu u_2u_{12}^2+144\mu^2u_2-576\mu^2u_{12}+384u_2-896u_{12}=0,$$

$$U_9\ :\ 9\mu^2u_2^3-18\mu^2u_2^2u_{12}+72\mu^2u_2u_{12}^2+144\mu^3u_2-576\mu^3u_{12}-$$

$$-40u_2^2u_{12}+224\mu u_2-896\mu u_{12}=0.$$

При исследовании подобных систем уравнений бывает удобно применять алгоритм построения базисов Гребнера идеала, порожденного изучаемой системой уравнений. Применяя этот алгоритм (с опцией tdeg) получаем систему, эквивалентную исходной и содержащую (в зависимости от упорядочения переменных) около 40 уравнений. Одно из новых уравнений принимает вид

$$u_2\,(u_2\,u_{12}+4\,\mu)=0.$$

Так как в ω_2-случае неизвестный вещественный коэффициент $u_2\neq 0$, то из этого уравнения мы получаем формулу (5.1) доказываемого предложения. Подставляя ее в пять приведенных выше следствий первой подстановки, получим из них три содержательных уравнения (5.3), (5.4), (5.5). Формула (5.2) возникает при решении исходного уравнения U_4 с учетом (5.1).

Остальные уравнения системы, полученной после первой подстановки, также оказываются следствиями уравнений (5.1) - (5.5).

Завершая доказательство предложения 7, отметим, что подстановка формул (5.1) и (5.2) в исходные 9 уравнений $\bar{p}$-системы превращает все их левые части в выражения, кратные левым частям уравнений (5.3) - (5.5). Это означает, что при выполнении равенств (5.1) - (5.5) и условия $v_{12}=0$ оказываются справедливыми все 9 уравнений исходной $\bar{p}$-системы.

Предложение 3 доказано.

Перейдем теперь к упрощению смешанной системы.

Во-первых, в силу условия $v_1\neq 0$ мы можем разрешить уравнение (3.1) этой системы относительно ω_4'. Подставим полученную формулу в остальные три уравнения. В эти же уравнения необходимо подставить формулы для коэффициентов опорного набора $t_7, t_{10}, tim_2, s_7, s_9, \lambda_4$, получаемые по схемам работы [1] при упрощении смешанной системы.

Следующим шагом является переход от этих трех комплексных уравнений к их вещественным и мнимым частям. Подставляя одновременно в эти уравнения формулы для tre_2 и μ, получим шесть вещественных уравнений, зависящих от четырех вещественных неизвестных величин

$$u_1, v_1, u_2, u_{12}. \tag{5.6}$$

Напомним, что и начальная четверка уравнений смешанной системы, и подставляемые в них формулы чрезвычайно сложны. Поэтому и итоговые шесть уравнений также остаются громоздкими, а потому здесь не приводятся. Отметим лишь, что и здесь, как и раньше, часть уравнений оказывается следствиями некоторых других, т. что из шести обсуждаемых уравнений содержательными являются лишь четыре.

Однако, эти четыре уравнения вместе с тремя уравнениями (5.3)-(5.5), также зависящими от четверки величин (5.6), образуют переопределенную систему. При этом уравнение (5.3) является достаточно простым и имеет небольшую степень. В итоге для объединенной системы этих семи уравнений (будем называть её (3+4)-системой) алгоритм Гребнера оказывается вполне продуктивным.

Предложение 4. *(3+4) система не имеет решений при* $u_2 \neq 0$.

Комментируя доказательство, этого предложения отметим, что базис Гребнера, порожденный левыми частями обсуждаемых семи уравнений, содержит 15 многочленов. Среди них имеются два следующих полинома

$$P_1 = v_1^2(3u_2 - 7u_{12}),\ P_2 = u_{12}^2 v_1^2.$$

Ясно, что одновременное обращение в нуль обоих этих многочленов при $v_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ невозможно. Тем самым, нет решений у (3+4)-системы из обсуждаемого предложения.

Вместе с предложением 4 доказан и первый случай теоремы 4.

6. ОПИСАНИЕ ВТОРОГО ПОДСЛУЧАЯ: $v_1 \neq 0, v_{12} \neq 0$

Теорема 4. *Не существует голоморфно однородных поверхностей, удовлетворяющих условиям* ω_2*-случая и неравенствам* $v_1 \neq 0$ *и* $v_{12} \neq 0$.

Доказательство. При $v_1 \neq 0, v_{12} \neq 0$ мы, как и в первом случае, решим относительно ω_4' уравнение (3.1), подставим полученную формулу вместе с выражениями для t_k,s_j в остальные три уравнения смешанной системы и перейдем к вещественным и мнимым частям этих уравнений.

Относительно tre_2 в этом случае можно решить уравнение V_8 из $\bar{p}$-системы. Более того, после подстановки полученной формулы для tre_2 еще одно уравнение этой системы удается решить относительно v_{12}. В итоге в смешанной системе остается шесть содержательных вещественных уравнений (которые мы по-прежнему не приводим в силу их большого объема), а в $\bar{p}$-системе - три уравнения. Два первых из них содержат соответственно 94 и 75 слагаемых, а третье имеет вид:

$$243\mu^3 u_2^4 v_{12}^2 + 7776\mu^4 u_2^2 v_{12}^2 + 243\mu^2 u_2^4 v_1 v_{12} + 62208\mu^5 v_{12}^2 + 2304 u_2^2 v_1^2 +$$

$$+6480\mu^3 u_2^2 v_1 v_{12} + 54\mu u_2^4 v_1^2 + 54\,\mu\, {u_2}^4 {v_{12}}^2 + 82944\mu^4 v_1 v_{12} + 14336 v_1 v_{12} +$$

$$+1296\mu^2 u_2^2 v_1^2 + 7776\mu^2 u_2^2 v_{12}^2 + 36 u_2^4 v_1 v_{12} + 20736\mu^3 v_1^2 + 96768\mu^3 v_{12}^2 +$$

$$+8064\mu u_2^2 v_1 v_{12} + 105984\mu^2 v_1 v_{12} + 192 u_2^2 v_{12}^2 + 21504\mu v_1^2 + 18432\mu v_{12}^2 = 0.$$

Предложение 5. *Для любого решения полученной (3+6)-системы уравнений выполняется неравенство* $\mu \neq 0$.

Доказательство. При $\mu = 0$ четыре из шести уравнений смешанной системы превратятся в тривиальные тождества, а содержательными останутся только два уравнения. Тройка уравнений $\bar{p}$-системы упрощается, так что одно из пяти получаемых уравнений принимает вид:

$$9u_2^4 v_1 v_{12} + 576 u_2^2 v_1^2 + 48 u_2^2 v_{12}^2 + 3584 v_1 v_{12} = 0.$$

Применяя далее алгоритм Гребнера к пяти оставшимся уравнениям, получаем базис из 27 многочленов, среди которых имеется моном $v_{12}^4 u_2$. Так как ни один из множителей в этом мономе в обсуждаемом случае не равен нулю, допущение о равенстве $\mu = 0$ является противоречивым.

Полученное в предложении 5 неравенство окажется полезным далее, а здесь отметим, что оно сохраняет все шесть неизвестных

$$u_1, v_1, u_2, u_{12}, v_{12}, \mu \tag{6.1}$$

в объединенной (3+6)-системе. При этом максимальная суммарная степень мономов, входящих в уравнения системы, равна 14. Сами уравнения - длинные, в каждом из них содержится порядка сотен слагаемых. Факторизовать эти уравнения не удается; теряется смысл дальнейшей обработки этих уравнений.

Это означает, что для получения дальнейших конкретных утверждений об однородных поверхностях нужны "качественно новые" источники информации о них.

Здесь мы привлекаем еще одну, (4,2,0)-компоненту основного тождества. В [3] эта компонента не обсуждалась, но сама схема этой работы позволяет выписать ее достаточно легко. Например, можно утверждать, что для однородных поверхностей (1.1), удовлетворяющих условию (1.3), p-часть выражения

$$\begin{gathered}
T_{420} = \left(\frac{\partial N_{520}}{\partial z_1} p_1 + \frac{\partial N_{520}}{\partial z_2} p_2\right) + \left(\frac{\partial N_{420}}{\partial z_1}(\alpha z_1 + \beta z_2) + \frac{\partial N_{420}}{\partial z_2}(-\bar{\beta} z_1 + \delta z_2)\right) \\
+ \left(\frac{\partial N_{420}}{\partial \bar{z}_1}\overline{(\alpha z_1 + \beta z_2)} + \frac{\partial N_{420}}{\partial \bar{z}_2}\overline{(-\bar{\beta} z_1 + \delta z_2)}\right) - 2\alpha_1 N_{420} + \qquad (6.2) \\
+4i(z_1 \bar{a}_1 + z_2 \bar{a}_2) N_{320} - 2i(|z_1|^2 + |z_2|^2)\left(\frac{\partial N_{320}}{\partial \bar{z}_1}\bar{a}_1 + \frac{\partial N_{320}}{\partial \bar{z}_2}\bar{a}_2\right)
\end{gathered}$$

тождественно равна нулю.

Подставим в (6.2) упоминавшиеся выше формулы для параметров $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\delta = \alpha_1 + i\delta_2$, a_1, a_2, зависящие, вообще говоря, не только от p_1, p_2, но и от $\bar{p}_1, \bar{p}_2, q$. После отделения в получаемых формулах коэффициентов при p_1, p_2 можно обсуждать $30 = 15 \times 2$ отдельных уравнений (по числу различных мономов степени 4 относительно переменной z и степени 2 относительно $\bar{z}$). Но исключая из этих уравнений 18 неизвестных коэффициентов многочлена N_{520}, получим в остатке 12 уравнений, содержащих только коэффициенты многочленов $N_{220}, N_{320}, N_{420}, N_{330}, N_{221}$.

Приведем здесь два из них:

$$\begin{gathered}
-243\mu^2\omega_2^2 s_{10} + 162\mu^2\omega_2\omega_{11}s_7 + 432\mu^2 s_2 s_{10} - 72\mu^2 s_5 s_7 - 90\mu\omega_2^2 s_7 + \\
+180\mu\omega_2\omega_{12}s_7 + 120\omega_1\omega_2 s_7 - 108\omega_2^2 s_{10} + 12\omega_2\omega_{11}s_7 + 192 s_2 s_{10} - 32 s_5 s_7 = 0, \\
-18\mu^2\omega_2^2 s_9 - 432\mu^2\omega_2^2 s_{15} + 108\mu^2\omega_2\omega_{11}s_6 + 81\mu^2\omega_2\omega_{11}s_{12} + 72\mu^2\omega_2\omega_{12}s_9 + \\
+576\mu^2 s_2 s_{15} - 36\mu^2 s_5 s_{12} + 24\mu\omega_1\omega_2 s_9 + 216\mu\omega_1\omega_2 s_{15} - 36\mu\omega_2^2 s_{12} - \qquad (6.3) \\
-12\mu\omega_2\omega_{11}s_9 - 108\mu\omega_2\omega_{11}s_{15} + 72\mu\omega_2\omega_{12}s_{12} + 48\omega_1\omega_2 s_{12} - 120\omega_2^2 s_{15} +
\end{gathered}$$

$$+48\omega_2\omega_{11}s_6 + 12\omega_2\omega_{11}s_{12} + 16\omega_2\omega_{12}s_9 - 144\omega_2\omega_{12}s_{15} + 256s_2s_{15} - 16s_5s_{12} = 0.$$

При подстановке в эти 12 уравнений всех ранее полученных выражений для коэффициентов t_k, s_j, λ_4 мы получим, вообще говоря, более сложные полиномиальные уравнения. Количество слагаемых в некоторых из них превосходит 800, а суммарные степени по оставшимся переменным для отдельных мономов достигают числа 12. В то же время три уравнения из 12 после такой подстановки оказываются тождественно нулевыми, а еще одно, а именно, выписанное выше уравнение (6.3), приобретает вид $P_1P_2P_3 = 0$. Здесь

$$P_1 = 36i\mu u_2v_{12}v_1 - 27\mu^2u_2^2v_{12} + 24iu_2v_1^2 - 432\mu^3v_{12} + 36\mu u_1u_2v_{12} - 18\mu u_2^2v_1 +$$
$$+432\mu^2v_1 + 24u_2u_1v_1 - 96\mu v_{12} + 256v_1, \tag{6.4}$$
$$P_2 = 36i\mu u_2v_{12}v_1 - 27\mu^2u_2^2v_{12} + 24iu_2v_1^2 - 432\mu^3v_{12} + 36\mu u_1u_2v_{12} - 18\mu u_2^2v_1 +$$
$$+144\mu^2v_1 + 24u_2u_1v_1 - 96\mu v_{12} + 128v_1,$$
$$P_3 = 36i\mu u_2v_1^2 - 27\mu^2u_2^2v_1 - 24iu_2v_{12}v_1 + 36\mu u_1u_2v_1 + 18\mu u_2^2v_{12} +$$
$$+288\mu^2v_{12} - 24u_2u_1v_{12} + 96\mu v_1 + 64v_{12}$$

— комплекснозначные многочлены от шести вещественных переменных $u_1, v_1, u_2, u_{12}, v_{12}, \mu$.

Отделяя у каждого такого многочлена мнимые части, получаем:

$$Im\,P_1 = 12\,u_2v_1\,(3\,\mu\,v_{12} + 2\,v_1)\,, \quad Im\,P_2 = 12\,u_2v_1\,(3\,\mu\,v_{12} + 2\,v_1)\,,$$
$$Im\,P_3 = 12\,u_2v_1\,(3\,\mu\,v_1 - 2\,v_{12})\,.$$

Так как $u_2 \neq 0,\ v_1 \neq 0$ в рамках нашего случая, то

$$\text{либо } v_1 = -\frac{3}{2}\,\mu\,v_{12}, \quad \text{либо } v_{12} = \frac{3}{2}\,\mu\,v_1. \tag{6.5}$$

Подстановка первой формулы (6.5) в вещественные части многочленов P_1, P_2, P_3 из (6.4) превращает их в следующие выражения:

$$Re\,P_1 = -120\,\mu\,v_{12}\left(9\,\mu^2 + 4\right),\ Re\,P_2 = -72\,\mu\,v_{12}\left(9\,\mu^2 + 4\right),$$
$$Re\,P_3 = 48\,\mu\,v_1\left(9\,\mu^2 + 4\right).$$

В условиях обсуждаемого случая с учетом предложения 9 ни один из этих многочленов не может равняться нулю. Аналогичное противоречие получается и при рассмотрении второго случая из (6.5).

Теорема 4 доказана.

Таким образом, (независимо от значений, принимаемых коэффициентом v_{12}) при условии $v_1 \neq 0$ НЕ существует однородных поверхностей. Самая общая ситуация из набора случаев (4.4) рассмотрена полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанов, А. В. О голоморфной однородности вещественных гиперповерхностей общего положения в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Атанов, А. В. Лобода, В. И. Суковых // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. — 2017. — Т. 298. — С. 1–22.

2. Суковых, В. И. Формулы для младших тейлоровских коэффициентов однородных поверхностей / В. И. Суковых // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1 : Математика. Физика. — 2016. — № 5 (36). — С. 104–123.

3. Лобода, А. В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А. В. Лобода // Матем. сборник. — 2001. — Т. 192. — С. 3–24.

4. Chern, S. S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S. S. Chern, J. K. Moser // Acta Math. — 1974. — V. 133, № 3. — P. 219–271.

5. Лобода, А. В. Использование компьютерных алгоритмов в задаче коэффициентного описания однородных поверхностей / А. В. Лобода, В. И. Суковых // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 14–22.

6. Суковых, В. И. О голоморфно-однородных гиперповерхностях, представляемых лакунарными уравнениями / В. И. Суковых // Материалы VI Российско-Армянского совещания по матем. анализу, мат. физике и аналитической механике. — Ростов-на-Дону, 2016. — С. 20–21.

7. Лобода, А. В. О тейлоровских коэффициентах голоморфно-однородных поверхностей общего положения / А. В. Лобода, В. И. Суковых // Тезисы докл. Воронежской зимней матем. школы. — Воронеж, 2015. — С. 72–73.

8. Лобода, А. В. Локальное описание однородных вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства в терминах их нормальных уравнений / А. В. Лобода // Функц. анализ. — 2000. — Т. 34, вып. 2. — С. 33–42.

9. Лобода, А. В. Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения / А. В. Лобода // Матем. заметки. — 2003. — Т. 73, № 3. — С. 419–423.

10. Cartan, E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — V. 11, № 4. — P. 17–90.

11. Eastwood, M. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space / M. Eastwood, V. V. Ezhov // Geom. Dedicata. — 1999. — V. 77. — P. 11–69.

12. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / В. И. Суковых // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2017618414. 01.08.2017.

REFERENCES

1. Atanov A.V., Loboda A.V., Sukovykh V.I. On holomorphic homogeneity of real hypersurfaces of general position in $\mathbb{C}^3$. [Atanov A.V., Loboda A.V., Sukovykh V.I. O golomorfnoy odnorodnosti veshchestvennyh giperpoverhnostey obshchego polozheniya v $\mathbb{C}^3$]. *Trudy MIAN im. V. A. Steklova — Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 298, pp. 1–22.

2. Sukovykh V.I. The formulas for the lower taylor coefficients of homogenious surfaces. [Sukovykh V.I. Formuly dlya mladshih teylorovskih koefficientov odnorodnyh poverhnostey]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Phizika — Volgograd State University Journal. Mathematics. Physics*, 2016, no. 5 (36), pp. 104–123.

3. Loboda A.V. Homogenious strictly pseudoconvex hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with two-dimensional isotropy groups. [Loboda A.V. Odnorodnye strogo psevdo-vypuklye giperpoverhnosti v $\mathbb{C}^3$ s dvumernymi gruppami izotropii]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, pp. 3–24.

4. Chern S.S., Moser J.K. Real hypersurfaces in complex manifolds. Acta Math., 1974, vol. 133, no. 3, pp. 219–271.

5. Loboda A.V., Sukovykh V.I. Computer algorithms in the problem of the coefficient description of homogeneous surfaces. [Loboda A.V., Sukovykh V.I. Ispol'zovanie komp'yuternyh algoritmov v zadache koefficientnogo opisaniya odnorodnyh poverhnostey]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye texnologii — Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies*, 2015, no. 1, pp. 14–22.

6. Sukovykh V.I. On holomorphically homogeneous hypersurfaces represented by lacunary equations. [Sukovykh V.I. O golomorfno-odnorodnyh giperpoverhnostyah, predstavlyaemyh lakunarnymi uravneniyami]. Materials VI Russian-Armenian Meetings on Mathematical Analysis, Mathematical Physics and Analytical Mechanics. Rostov-on-Don, 2016, pp. 20–21.

7. Loboda A.V., Sukovykh V.I. On taylor coefficients of holomorphic homogenious surfaces of general position. [Loboda A.V., Sukovykh V.I. O teylorovskih koefficientah golomorfno-odnorodnyh poverhnostey obshchego polozheniya]. Abstracts of the Voronezh Winter Mathematical School. Voronezh, 2015, pp. 72–73.

8. Loboda A.V. Local description of homogeneous real hypersurfaces of a two-dimensional complex space in terms of their normal equations. [Loboda A.V. Lokal'noe opisanie odnorodnyh veshchestvennyh giperpoverhnostey dvumernogo kompleksnogo prostranstva v terminah ih normal'nyh uravneniy]. *Funkcional'nyj analiz — Functional analysis*, 2000, vol. 34, iss. 2, pp. 33–42.

9. Loboda A.V. On determination of a homogeneous strictly pseudoconvex hypersurface from the coefficients of its normal equation. [Loboda A.V. Ob opredelenii odnorodnoy strogo psevdovypukloy giperpoverhnosti po koefficientam ee normal'nogo uravneniya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2003, vol. 73, no. 3, pp. 419–423.

10. Cartan E. Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes. Ann. Math. Pura Appl., 1932, vol. 11, no. 4, pp. 17–90.

11. Eastwood M., Ezhov V.V. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space. Geom. Dedicata, 1999, vol. 77, pp. 11–69.

12. Sukovykh V.I. Computer program state registration certificate. Registered in the register of computer programs. № 2017618414. 01.08.2017.

Суковых В. И., инженер, DataArt, Воронеж, Россия
E-mail: sukovyh@gmail.com

Sukovykh V. I., engineer, DataArt, Voronezh, Russia
E-mail: sukovyh@gmail.com