УДК 517.983.23

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ-ЛИТТЛЬВУДА

Е. А. Павлов, А. И. Фурменко

Крымский инженерно-педагогический университет;
Академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

Поступила в редакцию 30.06.2016 г.

Аннотация. Харди доказал важное неравенство, которое связывает конечные и бесконечные суммы (ряды) арифметических средних в степени с показателем p, где $p > 1$ с конечными и бесконечными суммами (рядами) элементов ${a_n}^p$, $p > 1$. Затем Харди обобщил это неравенство на интегралы. С точки зрения функционального анализа интегральное неравенство Харди означает непрерывность оператора Харди-Литтльвуда в пространствах Лебега L_p, где $p > 1$. В данной статье изучен обобщенный оператор Харди-Литтльвуда H_φ, где $\varphi(t) \geqslant 0 : \varphi(t) \nearrow$ на $(0, +\infty)$. Оператор H_φ изучен с точки зрения ограниченности его в симметричных пространствах и более общих идеальных структурах, обладающих свойством Миньковского и в которых ограниченно действует оператор растяжения. Получен критерий ограниченности этого оператора в симметричных пространствах для случая, когда верхний и нижний показатели растяжения функции μ_φ совпадают. Получены достаточные условия ограниченности оператора H_φ в идеальных структурах с выше перечисленными свойствами. В частности получен критерий ограниченности оператора H_{t^l} в симметричных пространствах. Оператор H_{t^l} был рассмотрен в монографии С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина, Е. М. Семенова, в которой сформулированы достаточные условия ограниченности этого оператора в L_p.

Ключевые слова: оператора Харди-Литтльвуда, ограниченный, симметричные пространства, идеальная структура.

ON SOME GENERALIZATIONS OF THE HARDY-LITTLEWOOD INEQUALITY

E. A. Pavlov, A. I. Furmenko

Abstract. Hardy has proved an important inequality that connects finite and infinite sums (series) of arithmetic means to a power with exponent p, where $p > 1$ with finite and infinite sums of elements ${a_n}^p$, $p > 1$. Hardy the generalized this inequality to integrals. From the point of view of functional analysis the integral Hardy inequality means the continuity of an operator in Lebesgue spaces L_p where $p > 1$. In this paper we study the generalized Hardy-Littlewood operator H_φ, where $\varphi(t) \geqslant 0 : \varphi(t) \nearrow$ on $(0, +\infty)$. The operator H_φ is studied from the point of view of its boundedness in symmetric spaces and more general ideal structures possessing the Minkowski property and in which the operator of extension. The criterion of boundedness of this operator in symmetric spaces is obtained for the case when the upper and lower exponents of the function μ_φ coincide. Sufficient conditions for the boundedness of an operator H_φ in ideal structures over the above properties are obtained In particular the criterion for the boundedness of operator in symmetric space. The operator H_{t^l} was considered in the Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M. monograph in which sufficient conditions for the boundedness of this operator are formulated in L_p.

Keywords: operator Hardy-Littlewood, symmetric spaces, ideal structure.

1. Введение

В работе [1] Г.Г. Харди было получено неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^p \ > 1, \tag{1}$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
Было доказано, что (см.[1]) константа $(p/(p-1))^p$ является точной. Так же было получено обобщение неравенства (1) для интегралов (см.[1], [4]). Мы запишем интегральное неравенство Харди-Литтльвуда в преобразованной форме

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{\infty}(f(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p>1, \tag{2}$$

если $f(x) \geqslant 0$. Полагая в неравенстве (2) $f(t) = |g(t)|$ с помощью простых преобразований получим

$$\left(\int_0^{\infty}|\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_0^{\infty}|\frac{1}{x}\int_0^x |g(t)|\,dt|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\infty}(\frac{1}{x}\int_0^x |g(t)|\,dt)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{\infty}|g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, p>1. \tag{3}$$

Обозначим

$$(H\,g)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g(x)\,dx \tag{4}$$

оператор, который получил название оператора Харди-Литтльвуда (см.[1], [4], [2], [6]). С учетом равенства (4) неравенство (3) можно записать в виде

$$\|H\,g\|_{L_p} \leqslant \frac{p}{p-1}\|g\|_{L_p}, \tag{4}$$

где

$$\|g\|_{L_p} = \left(\int_0^{\infty}|g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < \infty, \tag{5}$$

$$\|g\|_{L_\infty} = ess \sup_{0<t<+\infty} |g(t)|. \tag{6}$$

В данной статье все функциональные пространства определяются для функций определенных на $(0,\ +\infty)$ и измеримых в смысле Лебега, хотя результаты могут быть обобщены на более широкий класс мер.

В дальнейшем неравенство Харди-Литтльвуда обобщалось разными авторами, в основном, в трех направлениях: первое – неравенство Харди-Литтльвуда обобщалось на Лебеговы пространства с разными весами и мерами. Одним из первых результатов в этом направлении был получен Макенхауптом в [3]. В дальнейшем используя технику доказательства Макенхауптом и ее модификации были получены многочисленные результаты в этом направлении. Значительная часть которых нашла свое отражение в монографии [8], см. так же [14], [15], [16] и др.

Второе- оператор Харди-Литтльвуда изучался в симметричных (см. [5], [4]) (перестановочно-инвариантных, в другой терминологии (см. [2], [4], [6], [13])) пространствах и симметричных пространствах с весом (см. [4], [13], [6], [14]). Были получены результаты для обобщенных операторов Харди-Литтльвуда и их формально сопряженных (см. [10], [4], [6]). Третье- оператор Харди-Литтльвуда изучался в различных функциональных пространствах: С.Соболева, пространствах аналитических функций и др. (см. [9], [7], [8]).

Результаты данной статьи относятся ко второму направлению.

Все необходимые определения обозначения и необходимые факты, касающиеся идеальных структур, симметричных пространств и др. можно найти в [4], [5], [6].

Теорема. (Т. Шимогоки [2], см. также [4]). Для того, чтобы оператор Харди-Литтльвуда ограниченно действовал в симметричном пространстве, необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\|\sigma_t\|_E = o(t) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{7}$$

или равносильного соотношения

$$\beta_E < 1, \tag{8}$$

где β_E верхний индекс Бойда пространства E (см.[16]).

Доказательство несколько отличное от данного в [2], можно найти в [4].

Операторы Харди-Литтльвуда играют важную роль в теории интерполяции линейных операторов, теоремах вложения и других разделах математики. Важную роль в теории интерполяции линейных операторов играют, так же, обобщенные операторы Харди-Литтльвуда (см. [4], [12], [10]).

Задачей данной работы является изучение оператора Харди-Литтльвуда и его обобщений в симметричных пространствах, симметричных пространствах с весом и ряде более общих идеальных структурах.

Основные результаты.

Теорема 2. Пусть идеальная структура E (см. [4], [6], [5]) обладает свойствами:

1) В E выполняется обобщенное неравенство Миньковского (см., например, [17] или [4] стр.189-199);

2) Оператор растяжения $\sigma_t\, x(s) = x(s/t)$ ограниченно действует в E.

Тогда, если выполняется соотношение

$$\int\limits_0^1 \| \ \sigma_{\frac{1}{\tau}} \ \|_E \ dt < \infty, \tag{9}$$

то оператор Харди-Литтльвуда ограниченно действует в E.

Доказательство. Делая замену переменной $s = t \cdot \tau$ и пользуясь обобщенным неравенством Миньковского (см.[17], [4]), получаем

$$\|\frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)\, ds\|_E = \|\int\limits_0^1 x(t\cdot\tau)\, d\tau\|_E \leqslant \int\limits_0^1 \|x(t\cdot\tau)\|_E\, d\tau \leqslant \int\limits_0^1 \| \ \sigma_{\frac{1}{\tau}} \ \|_E \ d\tau \cdot \|x\|_E \tag{10}$$

Замечание. Константа

$$C = \int\limits_0^1 \| \ \sigma_{\frac{1}{\tau}} \ \|_E \ d\tau. \tag{11}$$

является точной в классе симметрических пространств, т.е. найдется симметричное пространство, для которого точность константы либо очевидна, либо уже была доказана. Действительно, если $E = L_p$, то, как несложно вычислить, $C = \frac{p}{p-1}$.

Рассмотрим теперь обобщенный оператор Харди-Литтльвуда

$$(H_\varphi x)(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \int\limits_0^t x(s)\, d\varphi(s), \tag{12}$$

где $\varphi(s) \geqslant 0, \varphi(s)$ возрастает на $(0, +\infty)$. Такие операторы и формально сопряженные к ним (для некоторых конкретных функций $\varphi(s)$) изучались в работах [4], [6], [10], [12] и др.)
Теорема 3. Пусть идеальная структура обладает свойствами 1), 2) из теоремы 2. Тогда, если выполняется соотношение

$$\int\limits_0^1 \parallel \sigma_{\frac{1}{\tau}} \parallel_E \ dM\varphi(\tau) < \infty, \tag{13}$$

где $M_\varphi(\tau)$ функция растяжения для $\varphi(\tau)$ (см.[4]), тогда оператор H_φ ограниченно действует в E.

Схема доказательства. Делая замену переменной $s = t \cdot \tau$ и пользуясь обобщенным неравенством Миньковского (см.[4]), получаем

$$\|(H_\varphi x(t))\|_E \leqslant \| \int\limits_0^1 |x(t \cdot \tau)|\, dM_\varphi(\tau)\|_E \leqslant \int\limits_0^1 \parallel x(t{\cdot}\tau) \parallel_E \ dM_\varphi(\tau) \leqslant \int\limits_0^1 \parallel \sigma_{\frac{1}{\tau}} \parallel_E \ dM_\varphi(\tau){\cdot} \parallel x \parallel < \infty, \tag{14}$$

Теорема доказана.
Введем некоторые обозначения

$$\parallel \sigma_\tau \parallel_{E_\searrow} \stackrel{def}{=} \sup_{x_\searrow} \frac{\parallel \sigma_\tau x \parallel_E}{\|x\|_E}, \tag{15}$$

$\sup\limits_{x_\searrow}$ означает, что sup берется только по неотрицательным убывающим функциям.

Теорема 4. Пусть функция $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi(t)$ возрастает на $(0, +\infty)$, $M_\varphi(+0) = 0$. Тогда, если операторH_φ ограниченно действует в идеальной структуре со свойствами 1) и 2) из теоремы 2, то будет выполняться соотношение

$$\parallel \sigma_\tau \parallel_{E_\searrow} = o(M_\varphi(\tau)),\ \tau \to \infty. \tag{16}$$

Схема доказательства. В [12, стр. 122] было доказано неравенство

$$x^*(\frac{t}{\tau}) \leqslant \frac{M_\varphi(\tau)}{1 + ln[M_\varphi(\tau^{-1})]^{-1}} \cdot (H_\varphi^2 x)(t). \tag{17}$$

При доказательстве этого неравенства использовались только два свойства перестановки $x^*(t)$: неотрицательность и убывание Т.е. при доказательстве этого неравенства можно было просто считать $x(t)$ неотрицательной и убывающей. Используя неравенство (15), где вместо $x^*(t)$ любая неотрицательная и убывающая функция $x(t)$ соотношение $M_\varphi(+0) = 0$ и ограниченность H_φ в E несложно показать, что будет справедлива оценка (16). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть симметричное пространство E и положительная возрастающая на $(0 + \infty)$ функция $\varphi(t)$ таковы, что выполняется неравенство

$$\beta_E < \alpha_\varphi. \tag{18}$$

Тогда оператор H_φ ограниченно действует в симметричном пространстве E .

Схема доказательства. Доказательство следует из утверждения теоремы 3, свойств симметрических пространств (см.[5], [4], [6]), леммы Е.М. Семенова (см.[4] стр.136), свойств индексов Бойда (см.[16], [4], [6]) и свойств полумультипликативных функций (см.[4], [6]). Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть E симметричное пространство и оператор H_φ ограниченно действует в E. Тогда справедливо соотношение

$$\beta_E < \beta_\varphi, \tag{19}$$

если $M_\varphi(+0) = 0$.

Схема доказательства. Доказательство следует из соотношения (16), равенства $\| \sigma_\tau \|_{E_\searrow} = \| \sigma_\tau \|_E$, а, так же, свойств показателей растяжения α_φ и β_φ функции $\varphi(t)$ (см. [4], [6]) и свойств индекса Бойда пространства E (см. [16], [4]). Следствие доказано.

Теорема 5. Пусть положительная возрастающая на $(0, +\infty)$ функция $\varphi(t)$ такова, что $\alpha_\varphi = \beta_\varphi$. Тогда для того, чтобы оператор H_φ ограниченно действовал в симметричном пространстве E необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\beta_E < \alpha_\varphi = \beta_\varphi, \tag{20}$$

если $M_\varphi(+0) = 0$. Доказательство следует из следствий 1, 2. Теорема доказана.

В монографии [4] был рассмотрен оператор

$$(H_l x)(t) = \frac{1}{t^{l+1}} \int\limits_0^t x(s) s^l \, ds \tag{21}$$

И получены достаточные условия ограниченности его действия в L_p: если $l \cdot p' > -1$, где $\frac{1}{(\frac{p+1}{p'})} = 1$.

Оператор H_l можно переписать в виде

$$(H_l x)(t) = \frac{1}{(l+1)p^{l+1}} \int\limits_0^t x(s) s^{l+1} \, ds \tag{22}$$

Функция $\varphi(s) = s^{l+1}$ при $l > -1$ является положительной и возрастающей на $(0, \ +\infty)$.

Теорема 6. Пусть $l > -1$. Тогда для того, чтобы оператор H_l ограниченно действовал в симметричном пространстве E, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\beta_E < l + 1. \tag{23}$$

Схема доказательства. Оператор H_l, заданный равенством (22) — эквивалентен оператору H_φ при $\varphi(t) = t^{l+1}$. Поэтому утверждения теоремы 6 следует из теоремы 5 и того факта, что $\alpha_\varphi = \beta_\varphi = l + 1$ для функции $\varphi(t)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харди, Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Д. У. Литтльвуд, Г. Полиа. — М. : ИЛ., 1948.

2. Shimogaki, T. Hardy-Littlewood majorants in function spaces / T. Shimogaki // J. Math. Soc. Japan. — 1965. — V. 17 (4). — P. — 365–375.

3. Muchenhoupt, B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function / B. Muchenhoupt // Trans of American Mathematical Society. — 1972. — V. 165. — P. 207–226.

4. Крейн, С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М. : Наука, 1978.

5. Семенов, Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций / Е. М. Семенов // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1038–1041.

6. Брудный, Ю. А. Интерполяция линейных операторов / Ю. А. Брудный, С. Г. Крейн, Е. М. Семенов // Итоги науки и техники. — 1986. — Т. 24. — С. 3–163.

7. Авхадиев, Ф. Г. Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах / Ф. Г. Авхадиев // Труды МИАН. — 2006. — Т. 255. — С. 8–18.

8. Прохоров, Д. В. Интегральные операторы Харди-Стеклова / Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушаков // Современные проблемы математики. — 2016. — Т. 22. — С. 3–185.

9. Голубов, Б. Н. Об ограниченности операторов Харди и Харди-Литтльвуда в пространствах $Re\, H^1$ и BMO / Б. Н. Голубов // Математический сборник. — 1997. — Т. 188, № 7. — С. 93–106.

10. Maligranda, L. Generalized Hardy inequlities in rearrangement invariant spaces / L. Maligranda // T. Math Pures et Appl. — 1980. — V. 59, № 4. — P. 405–415.

11. Luxemburg, W. A. Rearrangement-invariant Banach function spaces / W. A. Luxemburg // Queen's Papers Pur. Appl. Math. — 1967. — V. 10. — P. 83–144.

12. Павлов, Е. А. Об операторе Кальдерона / Е. А. Павлов // Anal. Math. — 1978. — V. 4, № 2. — P. 117–124.

13. Павлов Е. А. Некоторые свойства оператора Харди-Литтльвуда / Е. А. Павлов // Математические заметки. — 1979. — Т. 26, вып. 6. — С. 909–912.

14. Arino, M. Maximal funchions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for non-increasing functions / M. Arino, B. Muchenhoupt // Tras. Amer. Math. Soc. — 1990. — V. 320. — P. 727–735.

15. Muchenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function / B. Muchenhoupt // Trans of American Mathematical Society. — 1972. — V. 165. — P. 207–226.

16. Boyd, D. W. Indices of function spaces and their relationship to interpolation / D. W. Boyd // Canad. J. Math. — 1963. — V. 5. — P. 1245–1254.

17. Павлов, Е. А. Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах / Е. А. Павлов // Сиб. Матем. журнал. — 1977. — № 1. — С. 189–194.

REFERENCES

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities. [Xardi G.G., Littl'vud D.U., Polia G. Neravenstva]. Moscow: 1948.

2. Shimogaki T. Hardy-Littlewood majorants in function spaces. J. Math. Soc. Japan, 1965, vol. 17 (4), pp. 365–375.

3. Muchenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. of American Mathematical Society. 1972, vol. 165, pp. 207–226.

4. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolation of linear operators. [Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolyaciya linejnyx operatorov]. Moscow: Nauka, 1978.

5. Semenov E.M. Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions. [Semenov E.M. Teoremy vlozheniya dlya banaxovyx prostranstv izmerimyx funkcij]. *Doklady AN SSSR — Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 1964, vol. 156, no. 6, pp. 1038–1041.

6. Brudnyi Yu.A., Krein S.G., Semenov E.M. Interpolation of linear operators. [Brudnyj Yu.A., Krejn S.G., Semenov E.M. Interpolyaciya linejnyx operatorov]. *Itogi nauki i texniki — The results of science and technology*, 1986, vol. 24, pp. 3–164.

7. Avkhadiev F.G. Hardi type inequalities in planar and spatially open sets. [Avxadiev F.G. Neravenstva tipa Xardi v ploskix i prostranstvennyx otkrytyx mnozhestvax]. *Trudy MIAN — Proceeding of Steklof Math. Inst.*, 2006, vol. 255, pp. 8–18.

8. Prokhorov D.V., Stepanov V.D., Ushakova E.P. Hardy–Steklov Integral Operators. [Proxorov D.V., Stepanov V.D., Ushakov E.P. Integral'nye operatory Xardi-Steklova]. *Sovremennye*

problemy matematiki — Modern problems of mathematics, 2016, vol. 22, pp. 3–185.

9. Golubov B.N. The boundedness of operators Hardy and Hardy-Littlewood in spaces $Re\,H^1$ and BMO. [Golubov B.N. Ob ogranichennosti operatorov Xardi i Xardi-Littl'vuda v prostranstvax $Re\,H^1$ i BMO]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 7. pp. 93–106.

10. Maligranda L. Generalized Hardy inequlities in rearrangement invariant spaces. T. Math Pures et Appl., 1980, vol. 59, no. 4, pp. 405–415.

11. Luxemburg W.A. Rearrangement-invariant Banach function spaces. Queen's Papers Pur. Appl. Math., 1967, vol. 10, pp. 83–144.

12. Pavlov E.A. On tbe Calderon type operator. [Pavlov E.A. Ob operatore Kal'derona]. *Anal. Math. — Anal. Math.*, 1978, vol. 4, no. 2, pp. 117–124.

13. Pavlov E.A. Some properties of the operator Hardy-Littlewood. [Pavlov E.A. Nekotorye svojstva operatora Xardi-Littl'vuda]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 1979, vol. 26, iss. 6, pp. 909–912.

14. Arino M., Muchenhoupt B. Maximal funchions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for non-increasing functions. Tras. Amer. Math. Soc., 1990, vol. 320, pp. 727–735.

15. Muchenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans of American Mathematical Society, 1972, vol. 165, pp. 207–226.

16. Boyd D.W. Indices of function spaces and their relationship to interpolation. Canad. J. Math., 1963, vol. 5, pp. 1245–1254.

17. Pavlov E.A. On operators that are invariant with respect to a shift in symmetric spaces. [Pavlov E.A. Ob operatorax, invariantnyx otnositel'no sdviga v simmetrichnyx prostranstvax]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1977, no. 1, pp. 189–194.

Павлов Евгений Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой математики Крымского инженерно-педагогического университета, г. Симферополь, Российская Федерация
E-mail: pavlov-oe@b.k.ru

Pavlov Evgeniy Aleksandrovich, Professor, Head of Department of Mathematics, The Crimean State Engineering Pedagogical University, Simferopol, Russia
E-mail: pavlov-oe@b.k.ru

Фурменко Александр Иванович, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математики академии им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: furmenko@mail.ru

Furmenko Aleksandr Ivanovich, Associate Professor of the Department of Mathematics,"N.E. Zhukovskiy and Yu.A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russia
E-mail: furmenko@mail.ru