УДК 519.1

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

С. Ч. Муртузалиева, В. А. Скороходов

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 09.06.2015 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению вопроса об оценках спектрального радиуса графа. Предложена оценка спектрального радиуса для произвольного ориентированного графа через спектральный радиус вспомогательного графа. Для этой цели переопределена операция стягивания дуги ориентированного графа таким образом, чтобы она допускала появление петель и кратных дуг. Показано, что спектральный радиус произвольного ориентированного графа не превосходит спектральный радиус графа, полученного из исходного графа при применении предложенной операции стягивания произвольной его дуги. Предложенная в работе оценка даёт возможность обоснования аналогичной оценки спектрального радиуса для некоторых классов графов с нестандартной достижимостью.

Ключевые слова: ориентированный граф, спектральный радиус графа, стягивание дуги графа, оценка спектрального радиуса мультиграфа.

ONE CHARACTERIZATION OF THE SPECTRAL RADIUS OF AN DIRECTED GRAPH

S. C. Murtuzalieva, V. A. Skorokhodov

Abstract. This paper is devoted to studying of a question of estimates of spectral radius of the graph. Assessment of spectral radius for any directed graph through the spectral radius of the auxiliary graph is offered. For this purpose we redefine the operation of shrinkage of an arc of the auxiliary graph so that it allows loops and multiple arcs to appear. It is shown that the spectral radius of any directed graph is not exceed of the spectral radius of the graph wich is received from the initial graph by application of the offered operation of shrinkage of its arc. This estimate gives the opportunity of justification of similar estimate of spectral radius for some classes of graphs with nonstandard reachability.

Keywords: directed graph, spectral radius of graph, shrinkage of arc on graph, estimation of spectral radius of multygraph.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших характеристик в спектральной теории графов является спектральный радиус графа, который также называется индексом графа. Существует довольно много оценок индекса графа (см., например, [1], [2]). Однако, в основном это оценки индекса для неориентированных графов или ориентированных графов без петель и кратных дуг.

В настоящей статье предложена оценка для спектрального радиуса произвольного ориентированного графа через спектральный радиус некоторого вспомогательного графа специального вида, который конструируется по исходному графу путем стягивания (см. [3]) одной из его дуг. Однако, классическая операция стягивания дуги в данном случае не подходит, поскольку при её использовании для ориентированного или неориентированного графа без петель и кратных дуг снова получается граф без петель и кратных дуг, спектральный радиус которого может быть существенно меньше, чем у исходного графа, что для предложенной далее оценки является недостатком. Поэтому, предложена операция стягивания дуги, допускающая возникновение и петель и кратных дуг. Показано, что спектральный радиус произвольного ориентированного графа не превосходит спектральный радиус графа, полученного из исходного графа при применении предложенной нами операции стягивания любой его дуги.

При исследовании свойств графов с нестандартной достижимостью ([4] — [6]) естественным образом возникает вопрос о связи спектральных радиусов классического ориентированного графа G и графа с нестандартной достижимостью G_φ, полученного из G путём введения некоторого ограничения на прохождение по дугам выделенных подмножеств. Оказалось, что для некоторых классов нестандартной достижимости спектральный радиус исходного графа не меньше, чем спектральный радиус соответствующего графа с условием нестандартной достижимости. Предложенная в статье оценка даёт возможность обоснования этого факта.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим ориентированный граф $G(X, U, f)$. В классическом понимании (см. [3]) операция стягивания некоторой дуги $u \in U$ графа G приводит к образованию графа $G'(X', U', f')$ такого, что $|X'| = |X| - 1$, $|U'| < |U|$ и состоит в следующем:

1. дуга u удаляется, а инцидентные ей вершины x и y заменяются одной $< xy >$;
2. вершина $< xy >$ объявляется смежной со всеми теми и только теми вершинами множества $Y = X \setminus \{x, y\}$, которые в графе G были смежны или с вершиной x, или с вершиной y;
3. смежности вершин множества Y остаются прежними.

Поскольку в настоящей работе рассматриваются графы, которые могут быть и мультиграфами, и графами с петлями, то нам потребуется несколько отличающаяся от класссической операция стягивания дуги в графе.

Рассмотрим произвольный ориентированный граф $G(X, U, f)$. Пусть $u \in U$ — некоторая дуга графа G, не являющаяся петлёй.

Определение 1. Будем говорить, что граф $G'(X', U', f')$ получен из графа $G(X, U, f)$ стягиванием дуги u если $|X'| = |X| - 1$, $|U'| = |U| - 1$ и существует два сюръективных отображения $\varphi : X \to X'$ и $\psi : U \to U'$ таких, что $\forall v \in U \setminus u$ $(\varphi \circ p_i \circ f)(v) = (p_i \circ f' \circ \psi)(v)$.

Другими словами, граф G' может быть построен по следующему правилу:

1. как и при выполнении классической операции стягивания, дуга u удаляется, инцидентные ей вершины x и y заменяются одной $< xy >$;
2. для каждой дуги $v \in U \setminus \{u\}$ такой, что v начинаналась в x или в y, полагаем что на графе G' она начинается в $< xy >$. Для каждой дуги $v \in U \setminus \{u\}$ такой, что v заканчивалась в x или в y, полагаем что на графе G' она заканчивается в $< xy >$;
3. инцидентность остальных дуг остаётся прежней.

Покажем применение рассматриваемой операции стягивания на следующем примере.

Пример 2.

Рассмотрим граф G на рис. 1. Выделим не нём две дуги: u и v.

На G стянем дугу u, затем дугу v. Получим соответственно графы G' и G'' показанные на рис. 2.

Пример 1 показывает, что при такой операции стягивания для графа G без петель на графе G' могут появляться петли, а для графа без кратных дуг — кратные дуги.

Далее приведем несколько результатов из теории матриц и спектральной теории графов.

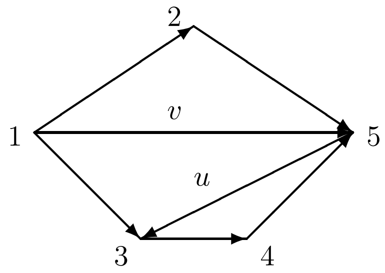

Рис. 1. *Граф G с выделенными дугами u и v.*

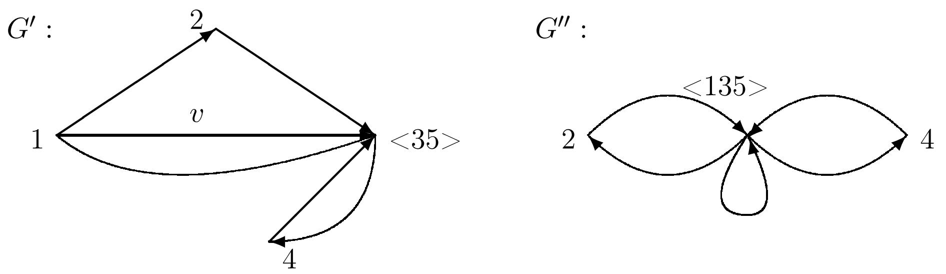

Рис. 2. *Графы G' и G''.*

Определение 3. Матрица A называется разложимой, если имеется матрица перестановок P такая, что матрица $P^{-1} \cdot A \cdot P$ имеет вид $\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}$, где X и Z — квадратные матрицы. В противном случае матрица A называется неразложимой.

Неразложимость матрицы смежности графа связана со свойством сильной связности. Так матрица смежности сильно связного орграфа неразложима (см. [7]).

Определение 4. Спектральным радиусом (индексом) графа называется максимальное по модулю собственное значение его матрицы смежности.

Спектральный радиус графа G обозначается как $r(G)$.

Заметим, что поскольку матрица смежности любого графа G является неотрицательной матрицей, то имеют место следующие теоремы (см. [1], [8]).

Теорема 5. *Неразложимая неотрицательная матрица A всегда имеет вещественное положительное собственное значение r, которое является простым корнем характеристического уравнения. Модули всех других собственных значений не превосходят числа r.*

Теорема 6. *Максимальное по модулю собственное значение r' любой главной подматрицы (порядок которой меньше n) неотрицательной матрицы A (порядка n) не превосходит максимального по модулю собственного значения r матрицы A.*

Теорема 7. *При увеличении любого элемента неотрицательной матрицы A максимальное по модулю собственное значение не уменьшается. Оно строго возрастает, если A — неразложимая матрица.*

3. ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА ПРИ СТЯГИВАНИИ ДУГИ

Поскольку спектральный радиус любого бесконтурного графа равен нулю, то всюду далее будем рассматривать графы имеющие хотя бы один контур и, как следствие, хотя бы одну компоненту сильной связности в которой больше одной вершины.

Замечание. Так как при любом изменении нумерации вершин графа получим граф изоморфный исходному, то поскольку выбранная дуга u не является петлёй, значит, всегда можно выбрать такую нумерацию, чтобы $f(u) = (x_1, x_2)$. Таким образом без нарушения общности далее будем полагать, что дуга u по которой стягивается граф G такая, что $f(u) = (x_1, x_2)$.

Лемма 1. *Пусть граф G' получен из графа G стягиванием дуги и такой, что:*

1. $[(p_1 \circ f)(u)]^+ = [(p_2 \circ f)(u)]^- = \{u\}$,
2. $[(p_1 \circ f)(u)]^- \cap [(p_2 \circ f)(u)]^+ = \varnothing$,

тогда $r(G) \leqslant r(G')$.

Здесь и далее будем полагать $[x]^+ = \{u \in U | (p_1 \circ f)(u) = x\}$ — множество дуг, выходящих из вершины x и $[x]^- = \{u \in U | (p_2 \circ f)(u) = x\}$ — множество дуг, входящих в вершину x.

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности графа G:

$$A_G = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ b_n & 0 & & & \end{array}\right).$$

Здесь и далее $A_{G''}$ — матрица смежности подграфа G'' графа G, порождённого множеством $X \setminus \{x_1, x_2\}$.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы A_G (определитель матрицы $\lambda E - A_G$).

$$P_{A_G}(\lambda) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -a_1 & \cdots & -a_n \\ \hline -b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & 0 & & & \end{array}\right|. \tag{1}$$

Характеристический многочлен матрицы $A_{G'}$ имеет вид:

$$P_{A_{G'}}(\lambda) = \left|\begin{array}{cccc} \lambda & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{array}\right|.$$

Разложим определитель в правой части равенства (1) по первой строке. Получим

$$P_{A_G}(\lambda) = \lambda^2 P_{A_{G''}}(\lambda) + \left|\begin{array}{cccc} 0 & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{array}\right| =$$

$$= \lambda^2 P_{A_{G''}}(\lambda) + \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - \lambda) P_{A_{G''}}(\lambda) + P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Таким образом, получили

$$P_{A_G}(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda) P_{A_{G''}}(\lambda) + P_{A_{G'}}(\lambda). \tag{2}$$

Положим $\lambda^* = r(G')$, $\lambda_1 = r(G)$ и $\lambda_2 = r(G'')$. Отметим, что по теореме 6 поскольку матрица $A_{G''}$ является главной подматрицей и для A_G, и для $A_{G'}$ следует, что $\lambda^* \geqslant \lambda_2$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$. Также

$$P_{A_G}(\lambda_1) = (\lambda_1^2 - \lambda_1) P_{A_{G''}}(\lambda_1) + P_{A_{G'}}(\lambda_1) = 0, \tag{3}$$

поскольку λ_1 — собственное значение матрицы A_G.

Так, как $\lambda_1 \geqslant 1$, это следует из того, что в графе G существует хотя бы одна компонента сильной связности с количеством вершин, большим единицы, значит, $(\lambda_1^2 - \lambda_1) \geqslant 0$.

Покажем, что $\lambda^* \geqslant \lambda_1$. Предположим противное: $\lambda^* < \lambda_1$. Но в силу того, что $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ получим:

1. $P_{A_{G''}}(\lambda_1) > 0$, поскольку для всех значений $\lambda > \lambda_2$ функция $P_{A_{G''}}(\lambda)$ принимает положительное значение и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$;

2. $P_{A_{G'}}(\lambda_1) > 0$, поскольку для всех значений $\lambda > \lambda^*$ функция $P_{A_{G'}}(\lambda)$ принимает положительное значение и $\lambda_1 \geqslant \lambda^*$.

Таким образом, получили:

$$P_{A_G}(\lambda_1) = (\lambda_1^2 - \lambda_1) P_{A_{G''}}(\lambda_1) + P_{A_{G'}}(\lambda_1) > 0,$$

что противоречит соотношению (3).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть граф G' получен из графа G стягиванием дуги и такой, что:*

1. $[(p_1 \circ f)(u)]^+ = [(p_2 \circ f)(u)]^- = \{u\} \cup \{v_k\}_{k=1}^{\eta-1}$, $\eta \geqslant 2$,

2. $[(p_1 \circ f)(u)]^- \cap [(p_2 \circ f)(u)]^+ = \varnothing$,

тогда $r(G) \leqslant r(G')$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности A_G графа G и её характеристический многочлен P_{A_G}:

$$A_G = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & \eta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ b_n & 0 & & & \end{array}\right),$$

$$A_G(\lambda) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda & -\eta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -a_1 & \cdots & -a_n \\ \hline -b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & 0 & & & \end{array}\right|. \tag{4}$$

Характеристический многочлен матрицы $A_{G'}$ в этом случае имеет вид:

$$P_{A_{G'}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\eta+1 & -a_1 & \ldots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_k & & & \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель в правой части равенства (4) по первой строке и получим:

$$P_{A_G}(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & a_1 & \ldots & -a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & \ldots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 P_{A_{G''}}(\lambda) + \eta \begin{vmatrix} \lambda-\eta+1 & -a_1 & \ldots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} -$$

$$-\eta \begin{vmatrix} \lambda-\eta+1 & 0 & \ldots & 0 \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - \eta\lambda + \eta^2 - \eta)P_{A_{G''}}(\lambda) + \eta P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Таким образом, получили

$$P_{A_G}(\lambda) = (\lambda^2 - \eta\lambda + \eta^2 - \eta)P_{A_{G''}}(\lambda) + P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Положим $\lambda^* = r(G')$, $\lambda_1 = r(G)$ и $\lambda_2 = r(G'')$. Отметим, что $\lambda^* \geqslant \lambda_2$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$. Также, поскольку в графе G' имеется $\eta - 1$ петель, следовательно, по теореме 6 $\lambda^* \geqslant \eta - 1$.

Кроме этого,

$$P_{A_G}(\lambda_1) = 0, \tag{5}$$

поскольку λ_1 — собственное значение матрицы A_G.

Теперь покажем, что $\lambda^* \geqslant \lambda_1$. Предположим противное: $\lambda^* < \lambda_1$. Но в силу того, что $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ и $\lambda^* \geqslant \eta - 1 \geqslant 1$ получим:

1.
$$(\lambda_1^2 - \eta\lambda_1 + \eta^2 - \eta) \geqslant ((\eta-1)^2 - \eta(\eta-1) + \eta^2 - \eta) =$$
$$= \eta^2 - 2\eta + 1 - \eta^2 + \eta + \eta^2 - \eta = \eta^2 - 2\eta + 1,$$
следовательно, поскольку $\eta \geqslant 2$, значит, $(\lambda_1^2 - \eta\lambda_1 + \eta^2 - \eta) \geqslant 1$;

2. $P_{A_{G''}}(\lambda_1) > 0$, поскольку $\lambda_1 > \lambda_2$;

3. $P_{A_{G'}}(\lambda_1) > 0$, поскольку предположили, что $\lambda_1 \geqslant \lambda^*$.

Таким образом, получили:

$$P_{A_G}(\lambda_1) = (\lambda_1^2 - \eta\lambda_1 + \eta^2 - \eta)P_{A_{G''}}(\lambda_1) + P_{A_{G'}}(\lambda_1) > 0,$$

что противоречит условию (5).

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть граф G' получен из графа G стягиванием дуги и такой, что:*

1. $[(p_1 \circ f)(u)]^+ = [(p_2 \circ f)(u)]^- = \{u\}$,
2. $|[(p_1 \circ f)(u)]^- \cap [(p_2 \circ f)(u)]^+| = \eta \geqslant 1$,

тогда $r(G) \leqslant r(G')$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности A_G графа G и её характеристический многочлен $P_{A_G}(\lambda)$:

$$A_G = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta & 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ b_n & 0 & & & \end{array}\right),$$

$$P_{A_G}(\lambda) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta & \lambda & -a_1 & \cdots & -a_n \\ \hline -b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & 0 & & & \end{array}\right|. \tag{6}$$

Характеристический многочлен матрицы $A_{G'}$ в этом случае имеет вид:

$$P_{A_{G'}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \eta & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель в правой части равенства (6) по первой строке и получим:

$$P_{A_G}(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & \dots & -a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\eta & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 P_{A_{G''}}(\lambda) + \begin{vmatrix} \lambda - \eta & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} = (\lambda^2 - \lambda) P_{A_{G''}}(\lambda) + P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Таким образом, получили

$$P_{A_G}(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda) P_{A_{G''}}(\lambda) + P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Точно такое же выражение для $P_{A_G}(\lambda)$, что и в (2) в доказательстве леммы 1. Значит, из доказательства леммы 1 следует, что и в данном случае $r(G) \leqslant r(G')$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть граф G' получен из графа G стягиванием дуги и такой, что:*

1. $[(p_2 \circ f)(u)]^- = \{u\}$,
2. $[(p_2 \circ f)(u)]^+ \bigcap [(p_1 \circ f)(u)]^- = \varnothing$,
3. $\forall v \in [(p_1 \circ f)(u)]^+ \ (p_1 \circ f)(v) \neq (p_2 \circ f)(v)$,

тогда $r(G) \leqslant r(G')$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности A_G графа G и её характеристический многочлен $P_{A_G}(\lambda)$:

$$A_G = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \hline c_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ c_n & 0 & & & \end{array}\right),$$

$$P_{A_G}(\lambda) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda & -1 & -a_1 & \cdots & -a_n \\ 0 & \lambda & -b_1 & \cdots & -b_n \\ \hline -c_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & 0 & & & \end{array}\right|. \tag{7}$$

Характеристический многочлен матрицы $A_{G'}$ в этом случае имеет вид:

$$P_{A_{G'}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 - b_1 & \ldots & -a_n - b_n \\ -c_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & & & \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель в правой части равенства (7) по второму столбцу и получим:

$$P_{A_G}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -b_1 & \ldots & -b_n \\ -c_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & & & \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & \ldots & -a_n \\ -c_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 - b_1 & \ldots & -a_n - b_n \\ -c_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & & & \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & \ldots & -a_n \\ -c_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & & & \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & \ldots & -a_n \\ -c_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & & & \end{vmatrix} =$$

$$= P_{A_{G'}}(\lambda) + (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -a_1 & \ldots & -a_n \\ -c_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & & & \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим вспомогательный граф $\widetilde{G}$, матрица смежности которого $A_{\widetilde{G}}$ имеет вид:

$$A_{\widetilde{G}} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & a_n \\ c_1 & & & \\ \vdots & & A_{G''} & \\ c_n & & & \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили

$$P_{A_G}(\lambda) = P_{A_{G'}}(\lambda) + (\lambda - 1)P_{A_{\widetilde{G}}}(\lambda).$$

Положим $\lambda^* = r(G')$, $\lambda_1 = r(G)$ и $\lambda_2 = r(\widetilde{G})$. Отметим, что $\lambda_1 \geqslant 1$.

Поскольку матрица $A_{\widetilde{G}}$ является главной подматрицей матрицы A_G, значит, по теореме 6 $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$. Также заметим, что матрица $A_{G'}$ может быть получена из матрицы $A_{\widetilde{G}}$ путем увеличения элементов первой строки, что по теореме 7 означает, что $\lambda_2 \leqslant \lambda^*$.

Кроме этого,

$$P_{A_G}(\lambda_1) = 0, \tag{8}$$

поскольку λ_1 — собственное значение матрицы A_G.

Покажем, что $\lambda^* \geqslant \lambda_1$. Предположим противное: $\lambda^* < \lambda_1$. Но в силу того, что $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ имеем:

1. $P_{\widetilde{A}}(\lambda_1) > 0$, поскольку $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$;
2. $P_{A_{G'}}(\lambda_1) > 0$, поскольку предположили, что $\lambda_1 > \lambda^*$.

Таким образом, получили $P_{A_G}(\lambda_1) = P_{A_{G'}}(\lambda_1) + (\lambda_1 - 1)P_{A_{\widetilde{G}}}(\lambda_1) > 0$, а это противоречит условию (8).

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть граф G' получен из графа G стягиванием дуги и такой, что:*

1. $[(p_2 \circ f)(u)]^- = \{u\}$,

2. $[(p_2 \circ f)(u)]^+ \cap [(p_1 \circ f)(u)]^- = \varnothing$,

3. $|[(p_1 \circ f)(u)]^+| = \eta + 1$, *причём* $\eta \geqslant 1$,

4. $\forall v \in [(p_1 \circ f)(u)]^+ \setminus \{u\}\ (p_1 \circ f)(v) = (p_2 \circ f)(v)$,

тогда $r(G) \leqslant r(G')$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности A_G графа G и её характеристический многочлен $P_{A_G}(\lambda)$:

$$A_G = \left(\begin{array}{cc|ccc} \eta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \hline b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ b_n & 0 & & & \end{array}\right),$$

$$P_{A_G}(\lambda) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda - \eta & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -a_1 & \cdots & -a_n \\ \hline -b_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & 0 & & & \end{array}\right|. \tag{9}$$

Характеристический многочлен матрицы $A_{G'}$ в этом случае имеет вид:

$$P_{A_{G'}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\eta & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель в правой части равенства (9) по первой строке и получим:

$$P_{A_G}(\lambda) = \lambda(\lambda-\eta)P_{A_{G''}(\lambda)} + \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda-\eta)P_{A_{G''}}(\lambda) + \begin{vmatrix} \lambda-\eta & -a_1 & \dots & -a_n \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} \lambda-\eta & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -b_n & & & \end{vmatrix} = (\lambda^2 - \lambda\eta - \lambda + \eta)P_{A_{G''}}(\lambda) + P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Таким образом, получили

$$P_{A_G}(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-\eta)P_{A_{G''}}(\lambda) + P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Положим $\lambda^* = r(A_{G'})$, $\lambda_1 = r(A_G)$ и $\lambda_2 = r(A_{G''})$. Отметим, что $\lambda^* \geqslant \lambda_2$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$. Также, поскольку в графе G' имеется η петель, следовательно, по теореме 6 $\lambda^* \geqslant \eta \geqslant 1$.

Кроме этого,

$$P_{A_G}(\lambda_1) = 0, \tag{10}$$

поскольку λ_1 — собственное значение матрицы A_G.

Теперь покажем, что $\lambda^* \geqslant \lambda_1$. Предположим противное: $\lambda^* < \lambda_1$. Но в силу того, что $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ и $\lambda^* \geqslant \eta - 1 \geqslant 1$ получим:

1. $(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \eta) \geqslant 0$, поскольку $\lambda_1 > \lambda^* \geqslant \eta \geqslant 1$;
2. $P_{A_{G''}}(\lambda_1) > 0$, поскольку $\lambda_1 > \lambda_2$;
3. $P_{A_{G'}}(\lambda_1) > 0$, поскольку предположили, что $\lambda_1 \geqslant \lambda^*$.

Таким образом, получили:

$$P_{A_G}(\lambda_1) = (\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - \eta)P_{A_{G''}}(\lambda_1) + P_{A_{G'}}(\lambda_1) > 0,$$

что противоречит условию (10).

Лемма доказана.

Сформулируем и докажем основную теорему данной работы.

Теорема 8. *Пусть граф G' получен из графа G стягиванием некоторой дуги u (u — произвольная дуга графа G, не являющаяся петлёй), тогда $r(G') \geqslant r(G)$*

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности A_G графа G:

$$A_G = \left(\begin{array}{cc|ccc} A & B & a_1 & \cdots & a_n \\ C & D & b_1 & \cdots & b_n \\ \hline c_1 & d_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ c_n & d_n & & & \end{array}\right).$$

Матрица $A_{G'}$ графа G' имеет вид:

$$P_{A_{G'}}(\lambda) = \left|\begin{array}{cccc} \lambda - A - B - C - D + 1 & -a_1 - b_1 & \dots & -a_n - b_n \\ -c_1 - d_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n - d_n & & & \end{array}\right|$$

Здесь величины A, B, C и D определяют количества дуг, началами и концами которых могут быть только вершины $(p_1 \circ f)(u)$ и $(p_2 \circ f)(u)$. Следовательно, $A, C, D \geqslant 0$ и $B \geqslant 1$.

Если $A = C = D = 0$ и для всех значений i $d_i = 0$, то мы получим несколько случаев графов и стягиваемых на них дуг, описанных в формулировках лемм 1, 2 и 4.

Рассмотрим пока только такие графы G, для которых в матрице смежности A_G для величин C и D имеет место соотношение $C^2 + D^2 > 0$.

В данном случае рассмотрим вспомогательный граф G^* такой, что его матрица смежности A_{G^*} имеет вид:

$$A_{G^*} = \left(\begin{array}{cc|ccc} A & B + C + D - 1 & a_1 + b_1 & \cdots & a_n + b_n \\ A + C & D + B - 1 & a_1 + b_1 & \cdots & a_n + b_n \\ \hline c_1 & d_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ c_n & d_n & & & \end{array}\right).$$

Заметим, что A_{G^*} получена из A_G увеличением некоторого числа элементов, следовательно, по теореме 7 имеем

$$r(G) \leqslant r(G^*). \tag{11}$$

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы A_{G^*}:

$$P_{A_{G^*}}(\lambda) = \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda - A & -B - C - D + 1 & -a_1 - b_1 & \cdots & -a_n - b_n \\ -A - C & \lambda - D - B + 1 & -a_1 - b_1 & \cdots & -a_n - b_n \\ \hline -c_1 & -d_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & -d_n & & & \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda - A & -B - C - D + 1 & -a_1 - b_1 & \cdots & -a_n - b_n \\ -\lambda - C & \lambda + C & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -c_1 & -d_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n & -d_n & & & \end{array}\right| =$$

Прибавим к первому столбцу второй и положим $F = A + B + C + D - 1$:

$$= \left|\begin{array}{cc|ccc} \lambda - F & -F + A & -a_1 - b_1 & \cdots & -a_n - b_n \\ 0 & \lambda + C & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -c_1 - d_1 & -d_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n - d_n & -d_n & & & \end{array}\right| =$$

Разложим по второй строке

$$= (\lambda + C)\begin{vmatrix} \lambda - F & -a_1 - b_1 & \dots & -a_n - b_n \\ -c_1 - d_1 & & & \\ \vdots & & \lambda E - A_{G''} & \\ -c_n - d_n & & & \end{vmatrix} = (\lambda + C)P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Таким образом,

$$P_{A_{G^*}}(\lambda) = (\lambda + C)P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Отсюда следует, что $Sp(A_{G^*}) = Sp(A_{G'}) \cup \{-C\}$. Тогда в силу теоремы 5 получили, что $r(G') = r(G^*)$. Из последнего равенства и неравенства (11) следует, что $r(G') \geqslant r(G)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть такие графы G, для которых в матрице смежности A_G для величин C и D имеет место соотношение $C = D = 0$.

В данном случае рассмотрим вспомогательный граф G^* такой, что его матрица смежности A_{G^*} имеет вид:

$$A_{G^*} = \left(\begin{array}{cc|ccc} A & B+1 & a_1+b_1 & \cdots & a_n+b_n \\ A+1 & B & a_1+b_1 & \cdots & a_n+b_n \\ \hline c_1 & d_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{G''} & \\ c_n & d_n & & & \end{array}\right).$$

Отметим, что и для рассматриваемого графа G^* имеет место неравенство (11).

Выполняя те же самые преобразования для характеристического многочлена $P_{G^*}(\lambda)$ получим

$$P_{A_{G^*}}(\lambda) = (\lambda + 1)P_{A_{G'}}(\lambda).$$

Отсюда следует, что $Sp(A_{G^*}) = Sp(A_{G'}) \cup \{-1\}$. Тогда в силу теоремы 5 получили, что $r(G') = r(G^*)$. Из последнего равенства и неравенства (11) следует, что $r(G') \geqslant r(G)$.

Таким образом теорема доказана полностью.

Как следствие предыдущей теоремы получается оценка спектрального радиуса произвольного ориентированного графа.

Теорема 9. *Пусть G — произвольный ориентированный граф, тогда имеет место следующее неравенство:*

$$r(G) \leqslant \min_{u \in U} \left\{ r(G'_u) \right\},$$

где G'_u — граф, полученный из графа G стягиванием дуги u.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цветкович, Д. Спектры графов. Теория и приложения / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс. — Киев : Наукова думка, 1984. — 384 с.

2. Brouwer, A. E. Spectra of graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. — Springer, New York, etc., 2012. — 256 p.

3. Зыков, А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. — М. : Вузовская книга, 2004. — 584 с.

4. Ерусалимский, Я. М. Общий подход к нестандартной достижимости на графах / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2005. — Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — С. 64–67.

5. Графы с нестандартной достижимостью : задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян. — Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.

6. Скороходов, В. А. Нестандартная достижимость на графах : модели и алгоритмы / В. А. Скороходов, Я. М. Ерусалимский. — Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011. — 188 с.

7. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир, 1989. — 655 с.

8. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Физматлит, 2010. — 560 с.

REFERENCES

1. Cvetkovich D., Dub M., Zahs H. Spectres of graphs. [Cvetkovich D., Dub M., Zahs H. Spektry grafov: teoria i primenenie]. Kiev: Naukova dumka, 1984, 384 p.

2. Brouwer, A.E., Haemers W.H. Spectra of graphs. Springer, New York, etc., 2012, 256 p.

3. Zykov A.A. Graph theory bases. [Zykov A.A. Osnovy teorii grafov]. Moscow: Vuzovskaja kniga, 2004, 584 p.

4. Erusalimskij Ya.M., Skorokhodov V.A. General aproach to nonstandard reachability on graphs. [Erusalimskij Ya.M., Skorohodov V.A. Obshii podhod k nestandartnoi dostizhimosti na grafah]. *Izvestija vuzov. Severo-Kavkazskij region. Estestvennye nauki. Psevdodifferencialnye uravnenija i nekotorye problemy matematicheskoj fiziki — Proceedings of high schools. North-Caucasian region. The natural sciences. Pseudodifferential equations and some problems of mathematical physics*, 2005, pp. 64–67.

5. Erusalimskij Ya.M., Skorokhodov V.A., Kuzminova M.V., Petrosyan A.G. Graphs with nonstandard reachability: tasks, applications. [Erusalimskii Ya.M., Skorokhodov V.A., Kuz'minova M.V., Petrosyan A.G. Grafy s nestandartnoi dostizhimost'yu: zadachi, prilozheniya]. Rostov-na-Donu: Yuzhnyi federal'nyi universitet, 2009, 195 p.

6. Erusalimskij Ya.M., Skorokhodov V.A. Nonstandard reachability on graphs: models and algorithms. [Erusalimskii Ya.M., Skorokhodov V.A. Nestandartnaja dostizhimost' na grafah: modeli i algoritmy]. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011, 188 p.

7. Horn R., Johnson C. Matrix analises. [Horn R., Dzhonson Ch. Matrichnyj analiz]. Moscow: Mir, 1989, 655 p.

8. Gantmaher F.R. Theory of marixes. [Gantmaher F.R. Teoria matric]. Moscow: Fizmatlit, 2010, 560 p.

Муртузалиева Софья Чамсыевна, студент кафедры алгебры и дискретной математики факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, Ростов–на–Дону, Россия
E-mail: aveilazutrum4@yandex.ru
Тел.: +7(863)297–51–11

Murtuzalieva Sofya Chamsyevna, student, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: aveilazutrum4@yandex.ru
Tel.: +7(863)297–51–11

Скороходов Владимир Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и дискретной математики факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, Ростов–на–Дону, Россия
E-mail: pdvaskor@yandex.ru
Тел.: +7(863)297–51–11

Skorokhodov Vladimir Aleksandrovich, Associate Professor of Department of algebra and Discrete mathematics of Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: pdvaskor@yandex.ru
Tel.: +7(863)297–51–11